

Sur les fonctions thêta d'ordre deux et les singularités du diviseur thêta

Arnaud BEAUVILLE, Olivier DEBARRE, Ron DONAGI et Gerard VAN DER GEER

Résumé — Pour une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) on désigne par Γ_{00} l'espace des sections de $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ qui s'annulent à l'origine avec multiplicité ≥ 4 . Nous construisons des éléments de Γ_{00} en utilisant les singularités de Θ et nous confirmons ainsi une conjecture sur les zéros de Γ_{00} pour certaines variétés abéliennes principalement polarisées.

On second order theta functions and the singularities of the theta divisor

Abstract — For a principally polarized abelian variety (A, Θ) one defines Γ_{00} as the space of sections of $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ vanishing with multiplicity at least 4 at the origin. We construct elements of Γ_{00} using singularities of Θ and we confirm a conjecture on the set of zeroes of Γ_{00} for certain principally polarized abelian varieties.

INTRODUCTION. — Soient A une variété abélienne complexe de dimension g , et $\mathfrak{g} \in \text{NS}(A)$ une polarisation principale sur A ; nous supposons que (A, \mathfrak{g}) est *indécomposable*. Choisissons un diviseur symétrique (effectif) Θ sur A , de classe \mathfrak{g} ; le faisceau $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ ne dépend pas du choix de Θ . Ses sections sont symétriques, et par conséquent leur multiplicité à l'origine est paire. On note Γ_{00} le sous-espace de $\Gamma = \Gamma(A, \mathcal{O}_A(2\Theta))$ formé des sections qui s'annulent en 0 avec multiplicité ≥ 4 , et $V(\Gamma_{00})$ le sous-ensemble de A où toutes les sections de Γ_{00} s'annulent.

Si (A, \mathfrak{g}) est la jacobienne d'une courbe C , Welters [8] a prouvé que $V(\Gamma_{00})$ est égal pour $g \neq 4$ au sous-ensemble $C - C$ de A formé des classes de diviseurs de la forme $[x] - [y]$, avec x, y dans C (pour $g = 4$, $V(\Gamma_{00})$ peut contenir en outre deux points isolés). On conjecture au contraire que $V(\Gamma_{00})$ est *réduit à zéro* si (A, \mathfrak{g}) n'est pas une jacobienne ([6], [5]). Cette conjecture est étroitement liée au problème de Schottky (*loc. cit.*).

Nous démontrons dans cette Note quelques résultats en direction de cette conjecture :

PROPOSITION 1. — Si (A, \mathfrak{g}) est la jacobienne intermédiaire d'une hypersurface cubique lisse dans \mathbf{P}^4 , l'ensemble $V(\Gamma_{00})$ est réduit à zéro.

PROPOSITION 2. — Soit C une courbe plane lisse; soit η un élément d'ordre 2 de JC , satisfaisant à $H^0(C, \mathcal{O}_C(2) \otimes \eta) = 0$ (un tel élément existe toujours si $\text{deg}(C) \geq 7$). Si (A, \mathfrak{g}) est la variété de Prym associée à (C, η) , l'ensemble $V(\Gamma_{00})$ est réduit à zéro.

PROPOSITION 3. — Si $g = 5$ ou $g \geq 14$, et si (A, \mathfrak{g}) est une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension g , l'ensemble $V(\Gamma_{00})$ est fini.

1. LA JACOBienne INTERMÉDIAIRE D'UNE HYPERSURFACE CUBIQUE DANS \mathbf{P}^4 . — *Démonstration de la proposition 1.* — Le diviseur Θ de la jacobienne intermédiaire (A, \mathfrak{g}) d'une hypersurface cubique lisse dans \mathbf{P}^4 a un seul point singulier, qui est de multiplicité 3 [3]; on peut prendre ce point comme origine de A . Soit $\pi: V \rightarrow A$ le revêtement universel de A ; notons θ la fonction thêta sur V de diviseur $\pi^*\Theta$, et identifions Γ à l'espace des fonctions thêta du second ordre sur V . Soit $(\partial_i)_{1 \leq i \leq 5}$ une base de l'espace des champs de vecteurs sur A . Posons

$$\varphi_{ij} = \theta \partial_i \partial_j \theta - \partial_i \theta \partial_j \theta \quad (1 \leq i \leq j \leq 5).$$

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

On a $\varphi_{ij} = (1/2) \partial_i \partial_j [\theta(z+u)\theta(z-u)]_{u=0}$ (∂_i et ∂_j opérant par rapport à la variable u); comme la fonction $\theta(z+u)\theta(z-u)$ appartient à Γ pour tout $u \in V$, on en déduit $\varphi_{ij} \in \Gamma$. Puisque θ s'annule avec multiplicité 3 à l'origine, les fonctions θ^2 et φ_{ij} appartiennent à Γ_{00} ; il en résulte qu'on a

$$V(\Gamma_{00}) = \text{Sing } \Theta = \{0\}. \quad \blacksquare$$

Soit (A, \mathfrak{g}) une variété abélienne principalement polarisée indécomposable. Notons $\mathbf{P}(T)$ l'espace projectif tangent à l'origine de A . En associant à un élément de Γ_{00} sa forme initiale à l'origine on définit un homomorphisme $\alpha: \Gamma_{00} \rightarrow H^0(\mathbf{P}(T), \mathcal{O}(4))$. Son noyau est le sous-espace Γ_{000} de Γ_{00} formé des éléments de Γ s'annulant avec multiplicité ≥ 6 en 0. Son image est un système linéaire de quartiques dans $\mathbf{P}(T)$. Si (A, \mathfrak{g}) est une jacobienne, le lieu de base de ce système linéaire est la courbe canonique (sauf pour $g=4$, où il peut contenir en outre un point isolé); dans le cas contraire on conjecture que ce système est sans point base (voir [5], où sont également discutées les relations de cette conjecture avec le problème de Schottky).

Revenons au cas où (A, \mathfrak{g}) est la jacobienne intermédiaire d'une hypersurface cubique lisse X dans \mathbf{P}^4 ; choisissons comme ci-dessus le diviseur Θ de façon qu'il ait un point triple à l'origine.

PROPOSITION 4. — L'espace Γ_{000} est de dimension 1, engendré par θ^2 ; le système linéaire $\alpha(\Gamma_{00})$ est sans point base.

Conservons les notations de la démonstration de la proposition 1. Notons f le premier terme du développement en série de θ à l'origine; c'est un polynôme homogène de degré 3 sur T , et l'hypersurface $f=0$ dans $\mathbf{P}(T)$ s'identifie à X [3]. On a $\alpha(\theta^2) = 0$ et

$$\alpha(\varphi_{ij}) = f \partial_i \partial_j f - \partial_i f \partial_j f.$$

Les polynômes $\alpha(\varphi_{ij})$ sont linéairement indépendants dans $H^0(\mathbf{P}(T), \mathcal{O}(4))$, et même dans $H^0(X, \mathcal{O}(4))$: en effet l'hypersurface duale de X est de degré 24, et ne peut donc être contenue dans une quadrique. Ainsi l'espace Γ_{000} est de dimension 1, engendré par θ^2 .

On a $\sum_{i,j} x_i x_j \alpha(\varphi_{ij}) = -3f^2$; on en déduit facilement que le seul zéro commun des $\alpha(\varphi_{ij})$ est 0. Ainsi le système linéaire $\alpha(\Gamma_{00})$ est sans point base, conformément à la conjecture de Donagi. \blacksquare

Il résulte de la démonstration que les éléments θ^2 et φ_{ij} ($1 \leq i \leq j \leq 5$) de Γ_{00} sont linéairement indépendants. D'autre part la dimension de Γ_{00} est $2^g - (1/2)g(g+1) = 16$ [6]. Par suite les fonctions θ^2 et φ_{ij} forment une base de Γ_{00} .

2. UNE GÉNÉRALISATION. — Si Z est une sous-variété de A et a un point de A , nous noterons Z_a le translaté $Z+a$ de Z par a . Si a est un point singulier de Θ , le diviseur $\Theta_a + \Theta_{-a}$ est le diviseur d'un élément de Γ_{00} ; on a donc $V(\Gamma_{00}) \subset \Theta_a \cup \Theta_{-a}$. La démonstration de la proposition 1 est basée sur une généralisation de cette remarque, que nous allons maintenant expliciter. Pour $k \geq 0$, notons Θ^k l'ensemble des points de A en lesquels la multiplicité de Θ est $\geq k$.

PROPOSITION 5. — Pour $a \in \Theta^k$, on a $V(\Gamma_{00}) \subset \bigcup_{p+q=2k-3} (\Theta_a^p \cap \Theta_{-a}^q)$.

Notons comme précédemment $\pi: V \rightarrow A$ le revêtement universel de A , et θ une fonction thêta sur V de diviseur $\pi^* \Theta$. Choisissons un représentant de a dans V , que nous noterons encore a . Si D est un opérateur différentiel sur V , à coefficients constants, opérant par

rapport à la variable u , on pose

$$\varphi_D(z) = D[\theta(z+u)\theta(z-u)]_{u=a}.$$

on vérifie comme dans la démonstration de la proposition 1 que la fonction φ_D appartient à Γ ; si de plus D est d'ordre $\leq 2k-4$, elle appartient à Γ_{00} .

Prouvons par récurrence sur n que l'ensemble des zéros de φ_D , pour D d'ordre $\leq n$, est contenu dans la réunion des ensembles $\pi^*(\Theta_a^p \cap \Theta_{-a}^q)$, pour $p+q=n+1$. C'est clair pour $n=0$. Soit x un zéro commun à tous les φ_D , pour D d'ordre $\leq n$. Par l'hypothèse de récurrence il existe deux entiers p, q de somme n tels qu'on ait $\pi(x) \in \Theta_a^p \cap \Theta_{-a}^q$. Par conséquent, si E et F sont deux opérateurs différentiels à coefficients constants sur V , d'ordre $< q$ et p respectivement, on a

$$(E\theta)(x+a)=0 \quad \text{et} \quad (F\theta)(x-a)=0.$$

Si maintenant E et F sont d'ordre $\leq q$ et p respectivement, on obtient

$$0 = \varphi_{E \circ F}(x) = (-1)^p E\theta(x+a)F\theta(x-a);$$

on en déduit qu'on a ou bien $E\theta(x+a)=0$ pour tout E d'ordre $\leq q$, c'est-à-dire $\pi(x) \in \Theta_{-a}^{q+1}$, ou bien $F\theta(x-a)=0$ pour tout F d'ordre $\leq p$, c'est-à-dire $\pi(x) \in \Theta_a^{p+1}$. Dans le premier cas $\pi(x)$ appartient à $\Theta_a^p \cap \Theta_{-a}^{q+1}$, dans le second à $\Theta_a^{p+1} \cap \Theta_{-a}^q$; cela prouve notre assertion par récurrence, et la proposition en résulte. ■

COROLLAIRE. — Sous les hypothèses de la proposition, on a $V(\Gamma_{00}) \subset \Theta_a^{k-1} \cup \Theta_{-a}^{k-1}$. ■

3. VARIÉTÉS DE PRYM DES COURBES PLANES. — Soient A une variété abélienne et Θ un diviseur symétrique définissant une polarisation principale sur A . L'ensemble $V(\Gamma_{00})$ est contenu dans $\Theta_a \cup \Theta_{-a}$ pour tout $a \in \text{Sing } \Theta$; pour prouver qu'il est réduit à $\{0\}$, il suffit donc d'exhiber une sous-variété irréductible Z de $\text{Sing } \Theta$ telle que l'inclusion $Z_a \subset \Theta$ entraîne $a=0$.

Démonstration de la proposition 2. — Soient C une courbe plane lisse de degré d et η un élément d'ordre 2 de J_C . Notons $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ le revêtement étale double associé à η , et σ l'involution de \tilde{C} correspondante. Soit A la variété de Prym associée à (C, η) , c'est-à-dire [7] la sous-variété abélienne $\text{Im}(1-\sigma)$ de $J\tilde{C}$. Elle s'identifie par translation à la sous-variété P de $\text{Pic}(\tilde{C})$ formée des classes de diviseurs \tilde{D} sur \tilde{C} tels qu'on ait $\pi_* \tilde{D} \equiv K_C$ et que $h^0(\tilde{D})$ soit pair [nous abrégons $\dim H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}))$ en $h^0(\tilde{D})$]. Cette sous-variété contient un diviseur Θ canonique, formé des classes de diviseurs \tilde{D} tels que $h^0(\tilde{D}) > 0$.

Notons H le diviseur découpé sur C par une droite de \mathbf{P}^2 . Nous allons appliquer la remarque précédant la démonstration en prenant pour Z la sous-variété de P formée des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $\pi^*H + \tilde{x} - \sigma\tilde{x} + \tilde{E}$, où \tilde{x} est un point de \tilde{C} et \tilde{E} un diviseur effectif sur \tilde{C} . D'après [7], la variété Z est contenue dans $\text{Sing } \Theta$; d'autre part elle est l'image dans P du produit de \tilde{C} et d'une sous-variété spéciale (au sens de [2]) associée au système linéaire $|K_C - 2H|$. Il ressort alors du corollaire du paragraphe 2 de [2] que Z est irréductible.

L'ingrédient essentiel de la démonstration est le lemme suivant, démontré dans [4] :

LEMME. — Soient \tilde{D} un diviseur sur \tilde{C} et $E \in |K_C - \pi_* \tilde{D}|$ un diviseur réduit. On suppose que pour tout diviseur effectif \tilde{E} sur \tilde{C} tel que $\pi_* \tilde{E} = E$, on a $h^0(\tilde{D} + \tilde{E}) \geq 1$. On a alors $h^0(\tilde{D}) \geq 1$. ■

Soit alors $a \in A$; il résulte du lemme que la condition $Z_a \subset \Theta$ implique $h^0(a + \pi^*H + \tilde{x} - \sigma\tilde{x}) \geq 1$ pour tout point \tilde{x} de \tilde{C} . On en déduit $h^0(a + \pi^*H) \geq 2$. Soit \tilde{D} un élément de $|a + \pi^*H|$; écrivons $\tilde{D} = \pi^*E + \tilde{F}$, où E et \tilde{F} sont effectifs et \tilde{F} est disjoint

de $\sigma \tilde{F}$. On a alors une suite exacte ([7], p. 338)

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(E) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) \rightarrow \mathcal{O}_C(\pi_* \tilde{D} + \eta - E) \rightarrow 0.$$

Comme $\pi_* \tilde{D} \equiv 2H$, l'hypothèse sur η implique $h^0(\pi_* \tilde{D} + \eta - E) = 0$. On en déduit $h^0(E) \geq 2$; comme $\deg(E) \leq d$, cela entraîne $E \equiv H$ ou $E \equiv H - x$ ($x \in C$). Dans le second cas a serait de la forme $\tilde{x} - \sigma \tilde{x}$, ce qui est impossible (un tel point n'appartient pas à A). On a donc $E \equiv H$ et $a = 0$, d'où la proposition. ■

La démonstration précédente s'étend sans grand changement au cas où C est la normalisée d'une courbe plane irréductible de degré d , admettant comme seules singularités δ points doubles ordinaires. On obtient comme ci-dessus la relation $a + \pi_* H \equiv \pi_* E + \tilde{F}$, avec \tilde{F} effectif et $h^0(E) \geq 2$. Si $\deg(E) = d$ on obtient que a est un point d'ordre 2 de A . Si $\deg(E) \leq d - 1$, supposons en outre $d \geq 8$ et $\delta \leq d - 3$; un raisonnement classique (cf. [1], p. 56, exerc. 20) permet de prouver que E est linéairement équivalent à $H - x$, pour $x \in C$, ou à $H - p - q$, où p et q sont deux points distincts de C ayant même image dans \mathbf{P}^2 . On exclut le premier cas comme ci-dessus; dans le second on obtient que a est de la forme $\tilde{p}' - \tilde{p}'' + \tilde{q}' - \tilde{q}''$, avec $\pi^{-1}(p) = \{\tilde{p}', \tilde{p}''\}$ et $\pi^{-1}(q) = \{\tilde{q}', \tilde{q}''\}$. On conclut que $V(\Gamma_{00})$ est fini (sous les hypothèses $d \geq 8$, $\delta \leq d - 3$ et $h^0(2H + \eta) = 0$). On obtient ainsi pour tout $g \geq 17$ une courbe C de genre g et un élément d'ordre 2 de J_C tel que l'ensemble $V(\Gamma_{00})$ de la variété de Prym associée (qui est de dimension $g - 1$) soit fini. On peut descendre à $g \leq 15$ en prenant pour C une courbe plane lisse de degré 7 (prop. 2) ou une courbe de bidegré (5,5) dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (cf. remarque ci-dessous). Cela achève la démonstration de la proposition 3. ■

Remarque. — Soit C une courbe lisse dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, de bidegré (p, q) ; notons F et G les pinceaux sur C définis par les deux projections de C sur \mathbf{P}^1 . Soit η un élément d'ordre 2 de J_C , satisfaisant à $h^0(2F + G + \eta) = h^0(F + 2G + \eta) = 0$. Une démonstration tout à fait analogue à celle de la proposition 2 montre qu'on a alors $V(\Gamma_{00}) = \{0\}$ pour la variété de Prym associée à (C, η) . On peut trouver un couple (C, η) satisfaisant aux hypothèses ci-dessus pourvu que p et q soient ≥ 5 , ou qu'on ait $p = 4$ et $q \geq 8$. On en déduit que si $g \geq 19$ et si g n'est pas de la forme $p - 1$ ou $2p - 1$, avec p premier, il existe une variété abélienne principalement polarisée de dimension g satisfaisant à $V(\Gamma_{00}) = \{0\}$.

Note reçue et acceptée le 4 juillet 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Geometry of algebraic curves I*, Grund. der math. Wiss., 267, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1985.
- [2] A. BEAUVILLE, Sous-variétés spéciales des variétés de Prym, *Compositio math.*, 45, 1982, p. 357-383.
- [3] A. BEAUVILLE, Les singularités du diviseur Θ de la jacobienne intermédiaire de l'hypersurface cubique dans \mathbf{P}^4 , *Algebraic threefolds*, Proc. Varenna, 1981, p. 190-208, *Lecture Notes in Math.*, n° 947, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [4] O. DEBARRE, Sur les variétés de Prym des courbes tétragones, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* (à paraître).
- [5] R. DONAGI, The Schottky problem, *Notes du C.I.M.E.*, 1985, Montecatini (à paraître).
- [6] B. VAN GEEMEN et G. VAN DER GEER, Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties, *Amer. J. of Math.*, 108, 1986, p. 615-642.
- [7] D. MUMFORD, Prym varieties I, *Contributions to Analysis*, Academic Press, New York, 1974, p. 325-350.
- [8] G. WELTERS, The surface $C - C$ on Jacobi varieties and 2nd order theta functions, *Acta math.*, 157, 1986, p. 1-22.

A. B. et O. D. : *Mathématiques*, Bât. n° 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex;

R. D. : *Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, U.S.A.*;

G. van der G. : *Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam, Roetersstraat 15, 1018 WB Amsterdam, Pays-Bas.*