

SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES DONT LE DIVISEUR THETA EST SINGULIER EN CODIMENSION 3

OLIVIER DEBARRE

Introduction. Dans leur article [A–M], Andreotti et Mayer introduisent les sous-ensembles suivants de l'espace des modules \mathcal{A}_g des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g : pour $0 \leq k \leq g - 2$, \mathcal{N}_k^g est le lieu des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) avec $\dim \text{Sing } \Theta \geq k$.

Si on note $\mathcal{J}_g \subset \mathcal{A}_g$ le lieu des jacobiniennes des courbes lisses de genre g , leur résultat principal peut s'énoncer ainsi:

THÉORÈME (Andreotti–Mayer). *Pour $g \geq 4$, l'adhérence $\bar{\mathcal{J}}_g$ de \mathcal{J}_g dans \mathcal{A}_g est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g .*

Les ensembles \mathcal{N}_k^g seront étudiés aussi par la suite par Beauville dans [Be 1]. Si on note $\theta_{\text{null}, g}$ le lieu des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) de dimension g avec Θ symétrique telles que $\text{Sing } \Theta$ contienne un point d'ordre 2, il montre par exemple:

THÉORÈME (Beauville). *Le diviseur \mathcal{N}_0^4 de \mathcal{A}_4 a deux composantes irréductibles, à savoir $\bar{\mathcal{J}}_4$ et $\theta_{\text{null}, 4}$.*

Il étudie aussi \mathcal{N}_1^5 . Sa méthode consiste à généraliser la construction classique des variétés de Prym en permettant des courbes singulières. En particulier, toutes les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension au plus 5 sont alors des variétés de Prym généralisées, pour lesquelles on a une description géométrique.

Mumford utilisera plus tard \mathcal{N}_0^g , dont Beauville a remarqué dans [Be 1] que c'est un diviseur de \mathcal{A}_g , pour montrer dans [Mu 1] que \mathcal{A}_g est de type général pour $g \geq 7$.

Smith et Varley ont montré dans [S–V] le résultat suivant:

THÉORÈME (Smith–Varley). *Le diviseur \mathcal{N}_0^5 de \mathcal{A}_5 a deux composantes irréductibles, dont l'une est $\theta_{\text{null}, 5}$.*

Enfin, Beauville et moi-même avons montré dans [B–D] le résultat suivant (rappelons que chacune des propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessous est satisfaite par les

Received April 12, 1986. Revision received November 13, 1987.

jacobiennes de courbes):

THÉORÈME (Beauville–Debarre). *Si une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) satisfait à l'une des propriétés suivantes:*

(i) *Il existe trois éléments non nuls a, x et y de A , distincts deux à deux, vérifiant: $\Theta \cdot \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.*

(ii) *L'hypothèse de Novikov est vérifiée.*

(iii) *La variété de Kummer associée admet une trisécante.*

Alors (A, Θ) est dans \mathcal{N}_{g-4}^g , avec $g = \dim A$.

Ce résultat justifie une étude plus approfondie des ensembles \mathcal{N}_{g-4}^g , qu'on entreprend ici pour $g \geq 5$.

Le point de départ est le théorème 4.10 de [Be 1], qui dresse la liste de toutes les variétés de Prym généralisées qui sont dans \mathcal{N}_{g-4}^g . La construction tétragonale de Donagi permet de réduire cette liste ([Do], 7.2). Ensuite, en utilisant la méthode d'Andreotti et Mayer ([A–M], 5.4.3, 5.4.5) ou les dégénérescences de rang 1 des variétés abéliennes ([Mu 1], 5.6.1), on montre que les familles ainsi construites sont des composantes irréductibles de \mathcal{N}_{g-4}^g . Ceci constitue la première partie de cet article. On montre aussi (cf. [We 1]):

THÉORÈME (5.2.5). *Pour $g \geq 6$, les variétés de Prym sont dans \mathcal{N}_{g-6}^g .*

Ce résultat sera précisé dans un article ultérieur, dans lequel nous montrerons que pour $g \geq 7$, l'ensemble des variétés de Prym est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-6}^g .

Il apparaît que certaines variétés de Prym qui sont dans \mathcal{N}_{g-4}^g sont des cas particuliers d'une construction très simple, qui fait l'objet de la seconde partie.

Cette construction (cf. §9) permet d'associer à toute paire de variétés abéliennes polarisées de même type δ (cf. §1), et de dimensions respectives g' et g'' , une variété abélienne principalement polarisée isogène à leur produit, donc en particulier de dimension $g' + g''$. On note $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ la sous-variété de $\mathcal{A}_{g'+g''}$ ainsi construite.

Pour $g'' \geq g' \geq \deg \delta$, $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ est une sous-variété de $\mathcal{N}_{g-2 \deg \delta}^g$ et en est même une composante irréductible dans certains cas (cf. 12.5). On obtient ainsi de nouvelles composantes de \mathcal{N}_{g-4}^g , \mathcal{N}_{g-6}^g et \mathcal{N}_{g-8}^g .

On obtient aussi le résultat annexe suivant:

THÉORÈME (10.12). *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g \geq 2$. Alors, pour tout élément de torsion non nul a de A , $\Theta \cdot \Theta_a$ est lisse de codimension 2, irréductible pour $g \geq 3$. En particulier, si Θ est symétrique, les seuls points de torsion sur Θ sont d'ordre 2.*

Nos résultats sur \mathcal{N}_{g-4}^g peuvent se résumer ainsi:

THÉORÈME (4.1, 12.5, et 13.2). *Pour $g \geq 5$, les sous-ensembles suivants de \mathcal{A}_g sont des composantes irréductibles distinctes de \mathcal{N}_{g-4}^g :*

• *L'adhérence du lieu des jacobiennes des courbes lisses de genre g . Sa dimension est $3g - 3$.*

- L'adhérence $\mathcal{E}_{g,0}$ du lieu des variétés de Prym correspondant aux revêtements doubles admissibles des courbes obtenues à partir d'une courbe hyperelliptique lisse de genre $g - 1$ en identifiant deux paires de points. Sa dimension est $2g$.

- L'adhérence $\mathcal{E}_{g,1}$ du lieu des variétés de Prym correspondant aux revêtements doubles admissibles des courbes réunion d'une courbe rationnelle et d'une courbe hyperelliptique lisse de genre $g - 2$ se coupant en 4 points. Sa dimension est $2g - 1$.

- Les familles $\mathcal{A}_{t, g-t}^2$ pour $2 \leq t \leq g/2$, de codimension $t(g - t)$ dans \mathcal{A}_g .

Toutes ces composantes, à part $\bar{\mathcal{J}}_g$, sont dans $\theta_{\text{null}, g}$ (5.2.3, 12.6).

De plus, pour $g = 5$, on obtient les 5 composantes irréductibles de \mathcal{N}_1^5 , à savoir $\bar{\mathcal{J}}_5$; $\mathcal{E}_{5,0}$; $\mathcal{E}_{5,1}$; $\mathcal{A}_{2,3}^2$ et $\mathcal{A}_{1,4}$ (produits de deux variétés abéliennes de dimensions 1 et 4), de dimensions respectives 12, 10, 9, 9, et 11.

En conclusion, on peut dire que beaucoup de problèmes restent ouverts dans l'étude des ensembles \mathcal{N}_k^g , en particulier celui de trouver toutes les composantes de \mathcal{N}_{g-4}^g pour $g \geq 6$.

Je tiens à remercier A. Beauville de l'aide et des encouragements qu'il m'a apportés, ainsi que de l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail. Je remercie aussi R. Donagi des explications qu'il m'a données sur un point particulier de cet article.

Terminologie et notations. On travaillera uniquement sur le corps \mathbb{C} des complexes. Une variété est un schéma réduit de type fini sur \mathbb{C} . Un point d'une variété sera toujours un point rationnel sur \mathbb{C} . Si F est un faisceau cohérent sur une variété projective X , on notera $h^i(X, F) = \dim H^i(X, F)$ pour $i \geq 0$. Si F est de plus inversible, on note $|F|$ le système linéaire des diviseurs effectifs D de X tels que $\mathcal{O}_X(D) \simeq F$ et $\phi_{|F|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, F)^\vee$ l'application rationnelle associée si $h^0(X, F) \geq 2$.

1. Variétés abéliennes. Pour toute variété abélienne A , on désigne par $A[2]$ le noyau de la multiplication par deux. On notera $\hat{A} = \text{Pic}^0 A$ le groupe des classes d'isomorphisme des faisceaux inversibles sur A algébriquement équivalents à 0. C'est une variété abélienne appelée variété abélienne duale de A ([Mu 6], page 74). A tout morphisme $f: A \rightarrow B$, on associe de façon fonctorielle un morphisme dual $\hat{f}: \hat{B} \rightarrow \hat{A}$.

Pour $a \in A$, on note τ_a l'automorphisme $x \mapsto x + a$ de A . Pour tout faisceau inversible L (resp. diviseur D) sur A , on écrira $L_a = \tau_{-a}^* L$ (resp. $D_a = \tau_{-a}^*(D) = D + a$).

Tout faisceau inversible L définit un morphisme de groupes ([Mu 6], page 59):

$$\phi_L: A \rightarrow \hat{A}$$

$$a \mapsto L_a \otimes L^{-1}$$

dont le noyau est noté $H(L) = \{a \in A \mid L \simeq L_a\}$.

L'ensemble $\mathcal{G}(L) = \{(a, \alpha) \mid a \in A, \alpha: L \xrightarrow{\sim} L_a\}$ admet une structure de groupe naturelle ([Mu 5], page 289) pour laquelle on a une suite exacte:

$$(1.1) \quad 1 \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathcal{G}(L) \xrightarrow{p} H(L) \rightarrow 0.$$

On définit une application bilinéaire alternée par:

$$e^L: H(L) \times H(L) \rightarrow \mathbf{C}^*$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot \tilde{x}_1^{-1} \cdot \tilde{x}_2^{-1} \quad \text{où } p(\tilde{x}_j) = x_j.$$

Par exemple, si $L \in \text{Pic}^0 A$ alors $H(L) = A$ ([Mu 6], page 74), $\mathcal{G}(L)$ est un groupe commutatif et $e^L \equiv 1$.

A l'opposé, si L est ample, $H(L)$ est fini, le centre de $\mathcal{G}(L)$ est \mathbf{C}^* et e^L est non-dégénérée ([Mu 7], Theorem 1, page 293). Il existe une suite d'entiers $\delta = (d_1, \dots, d_k)$, $k \leq g$, $1 < d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_k$, appelée type de L , telle que la suite (1.1) soit isomorphe à ([Mu 5], Corollary, page 294):

$$1 \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathcal{G}(\delta) \rightarrow H(\delta) \rightarrow 0$$

où

$$K(\delta) = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Z}/d_i\mathbf{Z}, \quad \widehat{K(\delta)} = \text{Hom}(K(\delta), \mathbf{C}^*)$$

$$H(\delta) = K(\delta) \oplus \widehat{K(\delta)}, \quad \mathcal{G}(\delta) = \mathbf{C}^* \times K(\delta) \times \widehat{K(\delta)}$$

avec $(\alpha, x, l) \cdot (\alpha', x', l') = (\alpha\alpha'l'(x), x + x', ll')$.

L'entier $d = d_1 \dots d_k$ est le degré de L et vérifie, avec $g = \dim A$:

$$(1.2) \quad \forall n, i > 0 \quad h^0(A, L^{\otimes n}) = dn^g, \quad h^i(A, L^{\otimes n}) = 0.$$

$$(1.3) \quad \text{Si } L = \mathcal{O}_A(D), \quad D^g = d \cdot g!.$$

$$(1.4) \quad d^2 = \text{Card } H(L) = \text{Degré } \phi_L.$$

On notera \sim l'équivalence algébrique entre faisceaux inversibles sur A . Toutes les constructions précédentes, à savoir ϕ_L , $H(L)$, $\mathcal{G}(L)$, e^L , ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de L .

Si L est ample, les faisceaux inversibles équivalents à L sont les translatés L_a , pour a élément de A . Une polarisation de type δ sur A est une classe d'équivalence de faisceaux inversibles amples de type δ . Par abus de langage, on notera encore L la polarisation définie par la classe de L . Une polarisation principale est

une polarisation L de degré 1. On notera alors généralement Θ le seul élément de $|L|$ (cf. 1.2), défini donc à translation près.

Si (A_1, L_1) et (A_2, L_2) sont deux variétés abéliennes polarisées, on notera $L_1 \boxtimes L_2$ la polarisation $\text{pr}_1^*L_1 \otimes \text{pr}_2^*L_2$ sur $A_1 \times A_2$, où $\text{pr}_j: A_1 \times A_2 \rightarrow A_j$, $j = 1, 2$, sont les deux projections.

On pose $\mathcal{H}_g = \{\tau \in \mathcal{M}_{g \times g}(\mathbb{C}) \mid \tau \text{ symétrique et } \text{Im } \tau \text{ définie positive}\}$. Pour tout "type" $\delta = (d_1, \dots, d_k)$, Δ_δ est la matrice diagonale $g \times g$ de diagonale $(1, \dots, 1, d_1, \dots, d_k)$ et J_δ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{pmatrix}$. Le groupe $\Gamma_g(\delta) = \{M \in \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) \mid {}^tMJ_\delta M = J_\delta\}$ agit sur \mathcal{H}_g . Le quotient $\mathcal{A}_{g,\delta}$ est un espace analytique normal irréductible quasi-projectif de dimension $\binom{g+1}{2}$, qui est un espace de modules grossier pour les variétés abéliennes polarisées de dimension g et type δ ([Ig 2]).

Les fonctions $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z, \tau)$ sont définies pour $a, b \in \mathbb{R}^g$, $z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in \mathcal{H}_g$ par:

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i [{}^t(n+a)\tau(n+a) + 2{}^t(n+a)(z+b)].$$

Si (A, L) est la variété abélienne polarisée de type δ correspondant à $\tau \in \mathcal{H}_g$, une base de $H^0(A, L)$ est donnée par:

$$(1.5) \quad \left\{ \theta \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}(\cdot, \tau) \mid r \in \Delta_\delta^{-1} \mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g \right\}.$$

2. Courbes. Une courbe est une variété projective C de dimension 1. Son genre est défini par $g(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$. On ne considérera que des courbes connexes avec au plus des points doubles ordinaires comme singularités. La jacobienne JC de C est un groupe algébrique lisse commutatif dont les points sont naturellement identifiés aux classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur C dont la restriction à chaque composante de C est de degré 0. Ce groupe JC est extension de la jacobienne JN de la normalisée N de C , qui est une variété abélienne principalement polarisée, par un tore. La dimension de JC est $g(C)$. On note aussi $\text{Pic}(C)$ le groupe de Picard de C .

Si C est irréductible, on désigne par $\text{Pic}^d(C)$, pour $d \in \mathbb{Z}$, le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles de degré d sur C , de sorte que $\text{Pic}^0(C)$ est JC .

Pour $g \geq 1$, on note $\mathcal{J}_g \subset \mathcal{A}_g$ le lieu des jacobiniennes de courbes lisses connexes de genre g .

Un revêtement double $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ de courbes projectives lisses connexes est un morphisme fini de degré 2. Sa donnée est équivalente à celle de la classe d'un diviseur δ sur C non équivalent à 0 et d'un diviseur lisse $\Delta \in |2\delta|$.

On a:

$$\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(-\delta)$$

$$\forall L \in \text{Pic}(C) \quad H^i(\tilde{C}, \pi^*L) = H^i(C, L) \oplus H^i(C, L \otimes \mathcal{O}_C(-\delta)).$$

Première partie: Les variétés de Prym de \mathcal{N}_{g-4}^g

3. Rappel des résultats de Beauville. Commençons par rappeler brièvement la construction des variétés de Prym, en suivant les grandes lignes de [Mu 2].

Si $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ est un revêtement étale de degré deux de courbes projectives lisses connexes, on a une application norme entre les jacobiniennes de ces courbes notée $Nm_\pi: J\tilde{C} \rightarrow JC$ ([EGA], II.6.5). Son noyau a deux composantes connexes et la variété de Prym P associée au revêtement π en est par définition la composante neutre. La polarisation principale de $J\tilde{C}$ induit le double d'une polarisation principale sur P .

De façon plus globale, si on désigne par \mathcal{R}_{g+1}^0 l'espace des modules des courbes C projectives lisses connexes de genre $g+1$ munies d'un tel revêtement π , alors \mathcal{R}_{g+1}^0 est irréductible de dimension $3g$ et on a une application Prym:

$$\text{Pr}^0: \mathcal{R}_{g+1}^0 \rightarrow \mathcal{A}_g.$$

Beauville a étendu dans [Be 1] la construction des variétés de Prym à certains revêtements de courbes singulières, afin de prolonger l'application Prym en une application propre.

Il définit un revêtement admissible (de degré 2) comme étant un morphisme $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ de degré 2, où \tilde{C} et C sont des courbes projectives connexes avec au plus des points doubles ordinaires comme singularités. On suppose de plus que l'involution σ de \tilde{C} associée satisfait à:

(1) Les seuls points fixes de σ sont des points doubles de \tilde{C} et les deux branches ne sont pas échangées.

(2) Le nombre de points doubles échangés par σ est égal au nombre de composantes de \tilde{C} échangées par σ .

On désigne par $J\tilde{C}$ et JC les jacobiniennes généralisées de \tilde{C} et C (cf. 2). Ce sont des groupes algébriques lisses, extensions d'une variété abélienne par un tore. Il y a encore une application norme ([EGA], II.6.5) et $P = (\text{Ker Nm})^0$ est une variété abélienne principalement polarisée, appelée variété de Prym associée au revêtement π . Sa dimension est $g(C) - 1$.

De nouveau, si on désigne par \mathcal{R}_{g+1} l'espace des modules des revêtements admissibles des courbes stables de genre $g+1$, on a une application:

$$\text{Pr}: \mathcal{R}_{g+1} \rightarrow \mathcal{A}_g$$

qui étend Pr^0 et qui est *propre* ([Be 1], [D-S]).

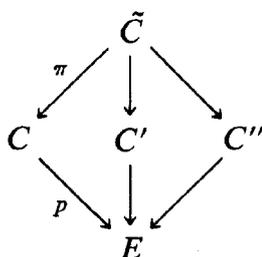
L'application Pr est surjective pour $g \leq 5$ ([Be 1]) et génériquement injective pour $g \geq 6$ ([F-S 2]).

Dans le théorème 4.10 de [Be 1], Beauville fait, pour $g \geq 5$, la liste des revêtements admissibles qui sont dans $\text{Pr}^{-1}(\mathcal{N}_{g-4}^g)$ et qui satisfont à deux conditions supplémentaires: la condition (*) de la page 157 de loc. cit. et la stabilité de la courbe C (cf. [D-M], page 76). Il ressort de 4.11.3 et 5.4 de [Be 1]

que les variétés de Prym associées aux revêtements de cette liste recouvrent $(\mathcal{N}_{g-4}^g - \bar{\mathcal{J}}_g - \mathcal{A}_g^{\text{Pr}}) \cap \text{Pr}(\mathcal{R}_{g+1})$, où $\mathcal{A}_g^{\text{Pr}}$ désigne l'ensemble des éléments de \mathcal{A}_g produits de deux variétés abéliennes non triviales.

Cette liste en question se décompose en les familles suivantes d'éléments de \mathcal{R}_{g+1} (comme dans [Be 1], une courbe hyperelliptique est une courbe connexe, revêtement de degré 2 de \mathbb{P}^1):

1. La courbe C est superelliptique, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de degré 2, $p: C \rightarrow E$ de C sur une courbe stable de genre 1. Le groupe de Galois de $p\pi: \tilde{C} \rightarrow E$ est le groupe diédral D_4 . La famille \mathcal{S}'_{g+1} obtenue est de dimension $2g$.
2. La courbe C est superelliptique, mais le groupe de Galois de $p\pi: \tilde{C} \rightarrow E$ est $(\mathbb{Z}/2)^2$. On a un diagramme commutatif:



La famille $\mathcal{S}'_{g+1,t}$ est la famille des revêtements pour lesquels $g - t + 1 = g(C'') \geq g(C') = t + 1$ (cf. 3.1). Elle est de dimension $2g$ et l'entier t prend les valeurs $0, 1, \dots, [g/2]$.

3. La courbe C est obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique de genre $g - 1$ en identifiant deux paires de points. La famille $\mathcal{H}'_{g+1,0}$ obtenue est de dimension $2g + 1$.
4. La courbe C est réunion d'une courbe rationnelle et d'une courbe hyperelliptique de genre $g - 2$ se coupant en 4 points. La famille $\mathcal{H}'_{g+1,1}$ obtenue est de dimension $2g$.
5. La courbe C est réunion d'une courbe de genre $t - 1 \geq 1$ et d'une courbe de genre $g - t - 1 \geq t - 1$ se coupant en 4 points. Les familles obtenues, pour $2 \leq t \leq g/2$, sont notées $\mathcal{H}'_{g+1,t}$. Elles sont de dimension $3g - 4$.
6. Dans le cas où $g = 5$, C est réunion d'une courbe rationnelle coupant une courbe de genre 3 en les 4 points d'un diviseur canonique. La famille \mathcal{T}'_6 obtenue est de dimension 9.
7. Dans tous les autres cas cités par Beauville, la variété de Prym obtenue est une jacobienne. (Le seul cas restant, à savoir le cas e) des revêtements "pairs" des quintiques planes est traité dans [Be 2], [Ma], [Tj 1], [Tj 2].)

Remarque 3.1. Ces familles ne sont pas fermées dans \mathcal{R}_{g+1} . Si \mathcal{F}' est l'une d'elles (\mathcal{S}'_{g+1} ; $\mathcal{S}'_{g+1,t}$; $\mathcal{H}'_{g+1,t}$ ou \mathcal{T}'_6), on notera $\bar{\mathcal{F}}$ son adhérence dans \mathcal{R}_{g+1} . Il est facile de voir que le sous-ensemble de $\bar{\mathcal{F}}$ formé des revêtements $\tilde{C} \rightarrow C$

pour lesquels

- (a) pour les cas 1 et 2, C et E sont lisses connexes;
- (b) pour le cas 3, la normalisée de C est connexe de genre $g - 1$;
- (c) pour les cas 4, 5, 6, C a deux composantes irréductibles qui sont lisses est dense dans \mathcal{F}' . On le notera \mathcal{F} .

D'autre part, toutes ces familles sont *irréductibles*. Faisons d'abord la remarque suivante. Soit $\mathcal{C} \rightarrow S$ une famille irréductible de courbes lisses. Pour tout entier $d \geq 1$, on note $\mathcal{C}_S^d = \mathcal{C} \times_S \cdots \times_S \mathcal{C}$ (d fois) et $\mathcal{J}^d = \overline{\text{Pic}}^d(\mathcal{C}/S)$ le schéma de Picard relatif en degré d . On a un morphisme canonique $\mathcal{C}_S^d \rightarrow \mathcal{J}^d$. Soit $m: \mathcal{J}^d \rightarrow \mathcal{J}^{2d}$ le morphisme induit par l'élevation au carré. Alors le S -schéma $\mathcal{J}^d \times_{\mathcal{J}^{2d}} \mathcal{C}_S^{2d}$ est irréductible puisque la fibre de tout point de S est irréductible de dimension $2d$ (cf., par exemple, Ex. G.8, page 202 de [ACGH]). On en déduit aussitôt l'irréductibilité de $\mathcal{S}_{g+1,0}$ (irréductibilité de la famille des courbes elliptiques avec structure de niveau 2 et remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d = g$), celle de $\mathcal{S}_{g+1,t}$, $0 < t \leq g/2$ (remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d = t, g - t$), celle de $\mathcal{H}_{g+1,t}$, $t = 0, 1$ (courbes hyperelliptiques de genre $g - 1, g - 2$ et $d = 2$) et celle de $\mathcal{H}_{g+1,t}$, $2 \leq t \leq g/2$ (courbes de genre t et $g - t$ avec $d = 2$). L'irréductibilité de \mathcal{T}_6 se montre de façon analogue, celle de \mathcal{S}_{g+1} découle de l'existence d'une application dominante $\mathcal{H}_{g+1,0} \rightarrow \mathcal{S}_{g+1}$ fournie par la construction tétragonale (7.2.4).

4. Énoncé des résultats. Le théorème ci-dessous rassemble les résultats de la première partie et mentionne aussi les paragraphes où l'on peut trouver les démonstrations.

THÉORÈME 4.1. *Pour $g \geq 5$, on a:*

- (i) $\mathcal{E}_{g,0} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,0})} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{H}_{g+1,0})} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1})}$ (cf. 7.2.3, 7.2.4) est de dimension $2g$ dans \mathcal{A}_g (cf. 5.4.2). C'est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g (cf. 5.4.5) qui contient les jacobiniennes hyperelliptiques (cf. 7.1.2).
- (ii) $\mathcal{E}_{g,1} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,1})} = \overline{\text{Pr}(\mathcal{H}_{g+1,1})}$ (cf. 7.2.3) est de dimension $2g - 1$ dans \mathcal{A}_g (cf. 5.4.2). C'est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g (cf. 5.6.1, 8.2) qui contient les jacobiniennes superelliptiques (cf. 5.5.3, 7.1.2). On a aussi $\text{Pr}(\mathcal{T}_6) \subset \mathcal{E}_{5,1}$ (cf. 6.2).
- (iii) Pour $2 \leq t \leq g/2$, on a $\overline{\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t})} \subset \overline{\text{Pr}(\mathcal{H}_{g+1,t})} \subset \mathcal{A}_{t,g-t}^2$ (cf. 7.2.3, 6.1 et 9.3 pour la définition de $\mathcal{A}_{t,g-t}^2$).
- (iv) On a ainsi, avec $\tilde{\mathcal{J}}_g$, $2 + [g/2]$ composantes irréductibles (cf. 12.5) distinctes (cf. 8.1 et 8.2) de \mathcal{N}_{g-4}^g .

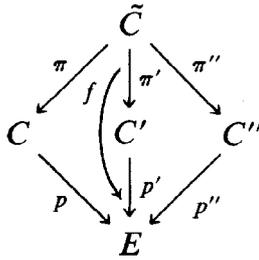
On en déduit immédiatement (cf. 8.2) que \mathcal{N}_1^5 a 5 composantes irréductibles, à savoir $\tilde{\mathcal{J}}_5$; $\mathcal{A}_{1,4}$; $\mathcal{E}_{5,0}$; $\mathcal{E}_{5,1}$ et $\mathcal{A}_{2,3}^2$, de dimensions respectives 12, 11, 10, 9, et 9 ($\mathcal{A}_{1,4}$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes produit d'une courbe elliptique par une variété abélienne de dimension 4).

Toutes les égalités apparaissant dans le théorème entre les images par l'application Pr de certaines familles de la liste de Beauville, c'est-à-dire tous les résultats

de notre section 7, sont dues à Donagi ([Do]). Cependant, il fait erreur sur la dimension de $\mathcal{E}_{5,0}$ et oublie $\mathcal{A}_{1,4}$ et l'inclusion $\text{Pr}(\mathcal{T}_6) \subset \mathcal{E}_{5,1}$.

5. Etude des familles $\mathcal{S}_{g+1,t}$.

5.1. *Notations.* On est dans la situation suivante (cf. 3.1): la courbe C est lisse de genre $g + 1 \geq 6$. Il existe une courbe elliptique lisse E et un morphisme de degré 2, $p: C \rightarrow E$ auquel on associe sa ramification $\Delta = P_1 + \dots + P_{2g}$ sur E , $\delta \in \text{Pic}^g E$ tel que $\Delta \equiv 2\delta$, et une involution τ de C . Il existe un diagramme commutatif:



On note:

$$g(C'') = g - t + 1 \geq g(C') = t + 1.$$

Au morphisme p' sont associés sa ramification $\Delta' = P_1 + \dots + P_{2t}$, $\delta' \in \text{Pic}^t E$ tel que $\Delta' \equiv 2\delta'$, et une involution τ'' de C' .

A p'' sont associés $\Delta'' = \Delta - \Delta'$, $\delta'' = \delta - \delta'$ et une involution τ'' de C'' .

Soient Q_1, \dots, Q_{2g} les points de ramification de p sur C . Le morphisme étale π est associé à l'élément suivant d'ordre 2 dans $\text{Pic}^0 C$:

$$\eta \equiv Q_1 + \dots + Q_{2t} - p^* \delta' \equiv Q_{2t+1} + \dots + Q_{2g} - p^* \delta''.$$

On note σ l'involution sans point fixe de \tilde{C} induite par π . Le morphisme π' (resp. π'') est ramifié sur $p'^*(\Delta')$ (resp. $p''*(\Delta')$) et induit une involution σ' (resp. $\sigma'' = \sigma\sigma'$) sur \tilde{C} .

5.2. *Etude du lieu singulier du diviseur thêta.* La variété de Prym (P, Ξ) associée à π peut être définie par ([Mu 2], Proposition page 242):

$$P = \{ L \in \text{Pic}^{2g} \tilde{C} \mid \text{Nm } L = \omega_C, h^0(L) \text{ pair} \}$$

$$\Xi = \{ L \in P \mid h^0(L) \geq 2 \}.$$

L'involution $x \mapsto -x$ de P est alors $L \mapsto \omega_{\tilde{C}} \otimes L^{-1}$ et le diviseur Ξ est symétrique.

PROPOSITION 5.2.1. *On a:*

$$\Xi = \left\{ \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \mid L' \in \text{Pic}'C', L'' \in \text{Pic}^{g-t}C'', h^0(L') \geq 1, h^0(L'') \geq 1, \right. \\ \left. \text{Nm}_{p'}L' \otimes \text{Nm}_{p''}L'' = \mathcal{O}(\delta) \right\}.$$

Démonstration. Soit $L \in \Xi$. On considère $\pi_*: |L| \rightarrow |\omega_C|$. Comme $\dim |L| \geq 1$, son image rencontre l'hyperplan $p^*|\delta|$ de $|\omega_C|$, et:

$$\exists D \in |L| \quad \pi_*D = p^*M \quad \text{avec } M \in |\delta|.$$

On peut alors écrire $D = \pi'^*D' + \pi''^*D''$ avec D' et D'' effectifs. L'espace Ξ est donc recouvert par les fermés:

$$Z_a = \left\{ \pi'^*\mathcal{O}(D') \otimes \pi''^*\mathcal{O}(D'') \mid D' \text{ (resp. } D'') \text{ diviseur effectif de degré } t + a \right. \\ \left. \text{(resp. } g - t - a) \text{ vérifiant } p'_*D' + p''_*D'' \equiv \delta \right\},$$

pour $-t \leq a \leq g - t$.

Or, pour $L \in Z_{g-t}$, on a:

$$\begin{aligned} h^0(L) &= h^0(\pi'^*\mathcal{O}(D')) = h^0(D') + h^0(D' - p'^*\delta'') \\ &= h^0(D') + h^0(K_{C'} - D' + p'^*\delta'') + t - g \\ &= h^0(D') + h^0(p'^*\delta - D') + t - g \\ &= h^0(D') + h^0(\tau'^*D') + t - g = 2h^0(D') + t - g. \end{aligned}$$

On déduit de [Mu 3], page 187, que:

$$Z_a \subset P \Leftrightarrow a \text{ est pair.}$$

On remarque alors que pour $|a| \geq 2$, on a par Riemann–Roch $h^0(D') \geq 2$ ou $h^0(D'') \geq 2$. Or on a:

$$\dim Z_a \leq \dim |\delta| - \min_{L \in Z_a} (\dim |D'| + \dim |D''|),$$

donc $\dim Z_a < g - 1 = \dim \Xi$ pour $|a| \geq 2$. Le diviseur Ξ est donc égal à Z_0 . ■

Le lieu singulier du diviseur Ξ est réunion des deux ensembles suivants ([Mu 2], §6):

$$\{ L \in \Xi \mid h^0(L) \geq 4 \}$$

et

$$\{L \in \Xi \mid L = \pi^*M \otimes N \text{ avec } M \in \text{Pic } C, N \in \text{Pic } \tilde{C}, h^0(M) \geq 2, h^0(N) \geq 1\}.$$

Les points du premier ensemble seront dits singularités stables (elles existent sur toute variété de Prym de dimension au moins 6 par 5.2.5), ceux du second, singularités exceptionnelles (elles n'existent pas sur une variété de Prym générale).

Une singularité peut bien sûr être à la fois stable et exceptionnelle.

PROPOSITION 5.2.2. *On suppose qu'on est en un point générique (cf. 5.2.9) de $\mathcal{S}_{g+1,t}$ et que $g \geq 5$. Alors:*

(i) *Le lieu singulier de Ξ est réunion de V, W_{-2}, W_0, W_2 , où:*

$$V = \left\{ \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \mid \text{Nm}_{p'}L' = \mathcal{O}(\delta'), \text{Nm}_{p''}L'' = \mathcal{O}(\delta''), \right. \\ \left. h^0(L') \geq 2, h^0(L'') \geq 2 \right\}$$

$$W_a = \left\{ \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \otimes f^*M \mid L' \in \text{Pic}^{t-2+a}C', \right.$$

$$L'' \in \text{Pic}^{g-t-2-a}C'', M \in \text{Pic}^2E, h^0(L') \geq 1,$$

$$\left. h^0(L'') \geq 1, \text{Nm}_{p'}L' \otimes \text{Nm}_{p''}L'' \otimes M^{\otimes 2} = \mathcal{O}(\delta) \right\}.$$

(ii) *L'ensemble V est vide pour $t \leq 2$, non vide de dimension pure $g - 6$ et non inclus dans W_a pour $t \geq 3$. Ses composantes irréductibles sont au nombre de 4 pour $t = 3, g = 6$; de 2 pour $t = 3, g > 6$; de 1 pour $t > 3$.*

(iii) *L'ensemble W_2 est vide pour $(t, g) = (2, 5)$ ou $(3, 6)$, irréductible de dimension $g - 4$ sinon.*

(iv) *L'ensemble W_0 est vide pour $t \leq 1$, irréductible de dimension $g - 4$ pour $t \geq 2$.*

(v) *L'ensemble W_{-2} est vide pour $t \leq 3$, irréductible de dimension $g - 4$ pour $t \geq 4$.*

Remarque 5.2.3. Les singularités de Ξ correspondant à un point générique de chacun de ces ensembles sont stables pour V , exceptionnelles pour W_0 , stables et exceptionnelles pour W_{-2} et W_2 .

D'autre part, tout ensemble W_a non vide contient un élément d'ordre 2 de P (prendre L' (resp. L'') somme de points de ramification de p' (resp. p'')). Comme Ξ est symétrique (cf. début de 5.2), on en déduit que $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t})$ est contenu dans $\theta_{\text{null},g}$ (cf. introduction).

On déduit de la proposition les deux résultats suivants:

COROLLAIRE 5.2.4. *Sous les hypothèses de 5.2.2, $\text{Sing } \Xi$ est irréductible dans les seuls cas suivants:*

- (i) $t = 0$ ou 1 . On a $\text{Sing } \Xi = W_2$.
- (ii) $t = 2$ et $g = 5$. On a $\text{Sing } \Xi = W_0$.

COROLLAIRE 5.2.5. *Pour $g \geq 6$ et toute variété de Prym (P, Ξ) de dimension g , on a $\dim \text{Sing } \Xi \geq g - 6$.*

Démonstration. Il ressort de la proposition que pour $g \geq 6$ et (P, Ξ) générique dans $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,3})$, $\text{Sing } \Xi$ a une composante irréductible de dimension $g - 6$ correspondant à des singularités stables, à savoir V .

Or il est connu ([Ha], [We 1]) que pour toute famille de revêtements doubles $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow T$, à laquelle correspond une famille de variétés de Prym $\mathcal{P} \rightarrow T$, l'ensemble:

$$\bigcup_{t \in T} \{\text{singularités stables de } \Xi_t\}$$

est soit vide, soit de codimension au plus 6 dans \mathcal{P} . Or, si on prend une telle famille contenant notre exemple, cet ensemble est de codimension 6 en un point d'une fibre, donc se projette surjectivement sur T . ■

Remarque 5.2.6. Il ressort de [We 1] et de 5.2.5 que pour une variété de Prym générique (P, Ξ) de dimension $g \geq 6$, $\text{Sing } \Xi$ est de dimension pure $g - 6$ et que ses composantes connexes sont ses composantes irréductibles. Or une jacobienne générique est simple, donc aussi une variété de Prym générique. On déduit de [Ba] que, pour $g \geq 12$, $\text{Sing } \Xi$ est génériquement irréductible de dimension $g - 6$.

Démonstration de la proposition 5.2.2. On commence par la définition suivante. Soit $p: C \rightarrow B$ un revêtement double de courbes lisses, D un diviseur effectif sur C . On dira que D est p -simple s'il n'existe pas de diviseur effectif E sur B tel que $D - p^*E$ soit effectif. On a alors ([Mu 2], page 338):

PROPOSITION 5.2.7. *Soit $p: C \rightarrow B$ un revêtement double de courbes lisses associé à Δ, δ (cf. 2); L un faisceau inversible sur B , D un diviseur effectif p -simple sur C . On pose $M = p^*L \otimes \mathcal{O}(D)$. On a alors une suite exacte de \mathcal{O}_B -modules:*

$$0 \rightarrow L \rightarrow p_*M \rightarrow L \otimes \mathcal{O}_B(p_*D - \delta) \rightarrow 0.$$

COROLLAIRE 5.2.8. *Dans notre situation, on considère $L = \pi'^*\mathcal{O}(D') \otimes \pi''^*\mathcal{O}(D'')$ où D' et D'' sont effectifs, D' est p' -simple et $\text{Nm}_\pi L = \omega_C$. Alors:*

$$h^0(\tilde{C}, L) \leq 2h^0(C'', D'') + g - t - \deg D''.$$

Démonstration. Le diviseur π'^*D' est π'' -simple; donc la proposition 5.2.7 donne:

$$h^0(L) \leq h^0(D'') + h^0(D'' + \pi''_*\pi'^*D' - p''^*\delta').$$

Or on a $p'_*D' + p''_*D'' \equiv \delta$; donc:

$$\begin{aligned} D'' + \pi''_*\pi'^*D' - p''^*\delta' &\equiv D'' + \tau''_*D'' + p''^*p'_*D' - \tau''_*D'' - p''^*\delta' \\ &\equiv p''^*(\delta - \delta') - \tau''_*D'' \equiv \tau''^*(K_{C''} - D''). \end{aligned}$$

On en déduit par Riemann–Roch l'inégalité cherchée. ■

Soit L un élément de Ξ correspondant à une singularité de Ξ . Par 5.2.1, on peut écrire:

$$L = \pi'^*[\mathcal{O}(D') \otimes p'^*\mathcal{O}(F')] \otimes \pi''^*[\mathcal{O}(D'') \otimes p''^*\mathcal{O}(F'')]$$

avec D', D'', F', F'' effectifs, D' p' -simple, D'' p'' -simple et $\deg D' + 2 \deg F' = t = g(C') - 1$, $\deg D'' + 2 \deg F'' = g - t = g(C'') - 1$.

Supposons d'abord cette singularité exceptionnelle non stable. Tout élément de $|L|$ s'écrit alors $\pi^*D + G$, avec $h^0(D) \geq 2$ et G π -simple. On décompose alors D en somme d'un diviseur p -simple et de l'image inverse d'un diviseur effectif sur E . Par 5.2.7, on est dans l'un des cas suivants:

(i) Il existe F de degré 2 sur E tel que $p^*F \leq D$. On a alors $F \leq F' + F''$ et on est dans W_{-2} , W_0 , ou W_2 .

(ii) D est p -simple, $G = 0$ et $p_*D \equiv \delta$. On a alors $\pi^*D = \pi'^*D' + \pi''^*D''$, ce qui n'est possible que si $D' \leq \text{Ram } p'$ et $D'' \leq \text{Ram } p''$. On en déduit:

$$|\delta| \ni p_*D = p'_*D' + p''_*D'' \leq \Delta' + \Delta'' = \Delta.$$

Pour exclure ce cas, on fera l'hypothèse suivante, satisfaite génériquement sur $\mathcal{S}_{g+1, t}$:

(5.2.9) Δ n'est pas somme de deux éléments de $|\delta|$.

Sans cette hypothèse, il peut apparaître un nombre fini de singularités exceptionnelles isolées, qui sont des points d'ordre deux de P .

On suppose maintenant $h^0(L) \geq 4$. Si $\deg F' \geq 1$, le corollaire 5.2.8 donne:

$$4 \leq h^0(L) \leq 2h^0(D'' + p''^*F'' + p''^*F') - 2 \deg F',$$

soit $h^0(D'' + p''^*F'' + p''^*F') \geq 3$.

On applique 5.2.7:

$$\begin{aligned} 3 &\leq h^0(F' + F'') + h^0(p'_*D'' + F' + F'' - \delta'') \\ &\leq \deg(F' + F'') + \max(\deg(F' - F''), 0) \\ &\leq 2 \max(\deg F', \deg F''), \end{aligned}$$

de sorte que soit F' , soit F'' est de degré au moins deux, et qu'on est soit dans W_2 , soit dans W_{-2} .

Le cas $\deg F'' \geq 1$ se traite de façon identique.

Si $\deg F' = \deg F'' = 0$, le corollaire 5.2.8 donne $h^0(D') \geq 2$ et $h^0(D'') \geq 2$. Par ([We 2], 3.4), on est dans V .

Ceci termine la démonstration de la première partie de la proposition.

L'ensemble V est évidemment vide pour $t = \deg L' \leq 1$. Pour $t = 2$, il est vide si C' n'est pas hyperelliptique, ce qui est le cas génériquement. Les assertions sur le nombre de composantes irréductibles découlent de [We 2], Proposition 3.6, pour $t \geq 5$, de [Te] pour $t = 4$ et, pour $t = 3$, du fait que les deux g_3^1 de C' (supposée non-hyperelliptique), image l'un de l'autre par τ'^* , satisfont à $\text{Nm}_{p'} g_3^1 = \mathcal{O}(\delta')$ (utiliser 5.2.7). Enfin, l'ensemble V n'est contenu dans aucun W_a ; en effet, un élément générique s'écrit:

$$L = \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'', \text{Nm } L' = \mathcal{O}(\delta'), \text{Nm } L'' = \mathcal{O}(\delta''),$$

$$\text{avec } h^0(L') = h^0(L'') = 2.$$

De plus, tous les diviseurs de $|L'|$ (resp. $|L''|$) sont p' -simples (resp. p'' -simples). Un tel fibré ne peut être dans un W_a , $a \in \mathbb{Z}$.

Enfin, les assertions d'irréductibilité et de dimension sur les W_a sont conséquences de:

LEMME 5.2.10. Soient $p: C \rightarrow E$ une courbe superelliptique et $G \in \text{Pic}^d E$ fixé. Alors, pour $5 \leq d \leq g(C) + 1$, l'ensemble:

$$\left\{ p^*M \otimes \mathcal{O}_C(D) \mid M \in \text{Pic}^2 E, D \in C^{(d-4)}, \mathcal{O}(p_*D) \otimes M^2 \simeq G \right\}$$

est irréductible de dimension $d - 4$.

Démonstration. On pose:

$$Z(G) = \left\{ (x_1, \dots, x_{d-4}, M) \in C^{d-4} \times \text{Pic}^2 E \mid \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{d-4} px_i\right) \otimes M^{\otimes 2} = G \right\}.$$

On remarque tout d'abord que $Z(G)$ est irréductible de dimension $d - 4$ pour $d \geq 5$: c'est évident pour $d = 5$ et la première projection $\text{pr}_1: Z(G) \rightarrow C$ a pour

fibres $Z(G \otimes \mathcal{O}(-px_1))$. Pour un élément générique (x_1, \dots, x_{d-4}, M) de $Z(G)$, le diviseur $D = \sum x_i$ est p -simple (cf. 5.2.7) et on a une suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(E, M) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}(D) \otimes p^*M) \rightarrow H^0(E, \mathcal{O}(p_*D - \delta) \otimes M) \rightarrow 0.$$

Ce dernier espace est nul lorsque:

$$0 \geq \text{deg}[\mathcal{O}(p_*D - \delta) \otimes M] = d - 1 - g(C)$$

sauf si:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(p_*D - \delta) \otimes M &= \mathcal{O}_E \\ \Leftrightarrow M &= G \otimes \mathcal{O}(-\delta). \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $d \leq g(C) + 1$, on en déduit que pour un élément générique (x_1, \dots, x_{d-4}, M) de $Z(G)$, $D = \sum x_i$ est fixe dans $|\mathcal{O}(D) \otimes p^*M|$, donc que l'application:

$$\begin{aligned} Z(G) &\rightarrow \text{Pic}^d C \\ (x_1, \dots, x_{d-4}, M) &\mapsto \mathcal{O}_C \left(\sum_{i=1}^{d-4} x_i \right) \otimes p^*M \end{aligned}$$

est génériquement finie. Son image est donc irréductible de dimension $d - 4$. ■

5.3. *Les quadriques associées aux points doubles du diviseur thêta.* On est toujours dans la situation 5.1, mais on s'intéresse ici aux seuls cas $t = 0$ et $t = 1$.

Commençons par quelques rappels sur les singularités stables de multiplicité 2 de Ξ ([Mu 2], [Tj 3]). Une telle singularité correspond à un faisceau inversible L sur \tilde{C} tel que $h^0(L) = 4$ et $\text{Nm } L = \omega_C$.

On a une application:

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda^2 H^0(L) &\rightarrow H^0(C, K_C + \eta) \\ s \wedge t &\mapsto s\sigma t - t\sigma s. \end{aligned}$$

Si $\{s_1, \dots, s_4\}$ est une base de $H^0(L)$, on pose:

$$\begin{aligned} Q_L &= \phi(s_1 \wedge s_2) \cdot \phi(s_3 \wedge s_4) - \phi(s_1 \wedge s_3) \cdot \phi(s_2 \wedge s_4) \\ &\quad + \phi(s_1 \wedge s_4) \cdot \phi(s_2 \wedge s_3) \in S^2 H^0(C, K_C + \eta). \end{aligned}$$

Lorsque Q_L est non nul, c'est une équation du cône tangent à Ξ en L dans P (on rappelle que $T_0 P \simeq H^0(C, K_C + \eta)^\vee$). De plus, la quadrique d'équation Q_L

dans $\mathbb{P}H^0(C, K_C + \eta)^\vee$ contient l'image X de C par le morphisme associé au système linéaire $|K_C + \eta|$ (appelée *courbe semi-canonique*).

On déduit facilement de 5.4.1 par exemple que

- (a) pour $t = 0$, X est la courbe elliptique $\phi_{|\delta''_1|}(E)$;
- (b) pour $t = 1$, X est tracée sur le cône Σ de sommet un point S et de base $\phi_{|\delta''_1|}(E)$. Elle a un point double en S et toute quadrique contenant X contient Σ .

PROPOSITION 5.3.1. *Soit (P, Ξ) un élément générique de $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1, t})$, avec $g \geq 5$. Alors:*

(1) *Si $t = 0$, l'intersection des quadriques correspondant aux singularités quadratiques de Ξ est la courbe semi-canonique X . L'espace vectoriel qu'elles engendrent dans $S^2T_0^\vee P$ est de codimension $2g$.*

(2) *Si $t = 1$, l'intersection des quadriques est le cône Σ . L'espace vectoriel engendré est de codimension $3g - 2$.*

Démonstration. Par 5.2.4(i), il nous suffit de calculer les quadriques Q_L pour les éléments L de W_2 , qui s'écrivent:

$$L = \pi'^*L' \otimes \pi''^*L''$$

avec

$$L' = \mathcal{O}(D') \otimes p'^*M, \quad D' \geq 0, \text{ deg } L' = t + 4, \text{ deg } M = 2$$

$$L'' = \mathcal{O}(D''), \quad D'' \geq 0.$$

Si D' est p' -simple, 5.2.7 donne la suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(E, M) \xrightarrow{\alpha} H^0(C', L') \xrightarrow{\beta} H^0(E, M \otimes \mathcal{O}(p'_*D' - \delta')) \rightarrow 0.$$

Les morphismes α et β peuvent être définis comme suit:

$$\forall v \in H^0(E, M) \quad \alpha(v) = p'^*(v)u' \quad \text{où } \text{div}(u') = D',$$

$$\forall u \in H^0(C', L') \quad u\tau'(u') - \tau'(u)u' = t'p'^*(\beta(u))$$

où $\text{div}(t')$ est la ramification de p' sur C' .

On prend une base $\{v_1, v_2\}$ de $H^0(E, M)$ et une base $\{v_3, v_4\}$ de $H^0(E, M \otimes \mathcal{O}(p'_*D' - \delta'))$. Il existe alors une base $\{u'_1, \dots, u'_4\}$ de $H^0(C', L')$ telle que:

$$u'_1 = \alpha(v_1), \quad u'_2 = \alpha(v_2), \quad \beta(u'_3) = v_3, \quad \beta(u'_4) = v_4.$$

Une base de $H^0(L)$ est alors $\{s_j = \pi'^*(u'_j)\pi''^*(u'')\}_{1 \leq j \leq 4}$, où $\text{div}(u'') = D''$.

On a:

$$\begin{aligned} \pi^*(\phi(s_j \wedge s_k)) &= \pi'^*(u'_j) \pi''^*(u'') \pi'^*(\tau'^* u'_k) \pi''^*(\tau''^* u'') \\ &\quad - \pi'^*(\tau'^* u'_j) \pi''^*(\tau''^* u'') \pi'^*(u'_k) \pi''^*(u'') \\ &= f^*(v'') \pi'^*(\phi(u'_j \wedge u'_k)) \quad \text{où } \operatorname{div}(v'') = p''_* D''. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \phi(s_1 \wedge s_2) &= 0. \\ \pi^*(\phi(s_1 \wedge s_3)) &= f^*(v'') \cdot \pi'^*[u' \cdot p'^*(v_1) \tau'^* u'_3 - \tau'^* u' \cdot p'^*(v_1) \cdot u'_3] \\ &= f^*(v'' v_1 v_3) \cdot \pi'^*(t'). \end{aligned}$$

Dans l'identification 5.4.1, cela s'écrit:

$$\phi(s_1 \wedge s_3) = p^*(v'' v_1 v_3) \cdot s'.$$

On a donc:

$$Q_L = -(v_1 v_3 v'') s' \cdot (v_2 v_4 v'') s' + (v_1 v_4 v'') s' \cdot (v_2 v_3 v'') s'.$$

Il suffit alors de montrer que les quadriques ainsi obtenues engendrent l'espace des quadriques de \mathbb{P}^{g-t-1} contenant $\phi_{|s'_1}(E)$. C'est l'objet du lemme suivant, qui termine donc la démonstration de la proposition.

LEMME 5.3.2. *Soit E une courbe elliptique plongée par un faisceau inversible L de degré $d \geq 4$ dans $\mathbb{P}H^0(L)^\vee \simeq \mathbb{P}^{d-1}$. On considère les quadriques*

$$(v_1 v_3 v) \cdot (v_2 v_4 v) - (v_1 v_4 v) \cdot (v_2 v_3 v) \in S^2 H^0(L),$$

définies pour

$$\begin{aligned} M, N &\in \operatorname{Pic}^2(E) \\ \{v_1, v_2\} &\text{ base de } H^0(E, M) \\ \{v_3, v_4\} &\text{ base de } H^0(E, N) \\ v &\in H^0(E, L \otimes M^{-1} \otimes N^{-1}). \end{aligned}$$

Alors l'idéal de E dans \mathbb{P}^{d-1} est engendré par ces quadriques.

Démonstration. L'assertion est triviale pour $d = 4$ puisque E est alors intersection complète de deux quadriques.

On procède par récurrence sur d , en supposant $d \geq 5$.

Si on désigne par W_L l'espace des quadriques contenant $\phi_{|L|}(E)$, on a, pour tout couple (P_1, P_2) d'éléments de E , une flèche:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Eléments de } W_L \\ \text{singuliers en } P_1 \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} \text{Eléments de } W_L \\ \text{singuliers en } P_2 \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{Eléments de } W_L \\ \text{contenant la droite } P_1P_2 \end{array} \right\}, \\ \left| \downarrow \right. & & \left| \downarrow \right. \\ W_{L(-P_1)} & & W_{L(-P_2)} \end{array}$$

dont la surjectivité résulte facilement du fait que son noyau est isomorphe à $W_{L(-P_1-P_2)}$ et d'un calcul de dimension. Par hypothèse de récurrence, les quadriques que nous considérons engendrent donc l'espace de droite, ceci pour tout couple (P_1, P_2) . Pour conclure, il suffit alors de remarquer que pour tout couple (Q_1, Q_2) d'éléments de W_L et toute corde P_1P_2 , une combinaison linéaire de Q_1 et de Q_2 contient cette corde. Nos quadriques engendrent donc W_L tout entier, donc aussi l'idéal de E . ■

5.4. *Rang de l'application Prym sur $\mathcal{S}_{g+1,t}$. Le théorème d'Andreotti et Mayer.* On rappelle ([Be 2], Proposition 7.5) que la codifférentielle de l'application $\text{Pr}: \mathcal{R}_{g+1} \rightarrow \mathcal{A}_g$ en un point $(C, \eta) \in \mathcal{R}_{g+1}^0$ est:

$$T_{(C, \eta)}^\vee \text{Pr}: S^2H^0(C, K_C + \eta) \rightarrow H^0(C, 2K_C).$$

On s'intéresse à la différentielle de la restriction Pr_t de Pr à $\mathcal{S}_{g+1,t} \subset \mathcal{R}_{g+1}^0$. Soient s' et s'' deux sections telles que:

$$\text{div}(s') = Q_1 + \dots + Q_{2t} \quad (\text{notations 5.1})$$

$$\text{div}(s'') = Q_{2t+1} + \dots + Q_{2g}$$

$$s = s's'', \quad \text{div}(s) = Q_1 + \dots + Q_{2g}.$$

On a alors les décompositions suivantes:

$$T_{(C, \eta)}^\vee \mathcal{R}_{g+1} \simeq H^0(C, 2K_C) \simeq p^*H^0(E, 2\delta) \oplus p^*H^0(E, \delta)s. \\ (\tau = \text{id}) \qquad (\tau = -\text{id})$$

La partie τ -invariante correspond au lieu dans l'espace des déformations de C où

l'involution se prolonge, c'est-à-dire à $T_{(C, \eta)}^{\vee} \mathcal{S}_{g+1, t}$. On a aussi:

LEMME 5.4.1. $H^0(C, K_C + \eta) \simeq p^*H^0(E, \delta'')s' \oplus p^*H^0(E, \delta')s''$.

Démonstration. On a (cf. 5.1):

$$\eta \equiv Q_1 + \cdots + Q_{2t} - p^*\delta' \equiv Q_{2t+1} + \cdots + Q_{2g} - p^*\delta''$$

$$K_C + \eta \equiv \text{div}(s') + p^*\delta'' \equiv \text{div}(s'') + p^*\delta'.$$

On a donc un morphisme:

$$H^0(E, \delta'') \oplus H^0(E, \delta') \rightarrow H^0(C, K_C + \eta)$$

$$(u'', u') \mapsto p^*u'' \cdot s' + p^*u' \cdot s''$$

dont le noyau est isomorphe à:

$$H^0(p^*\delta'' - \text{div}(s'')) = H^0(p^*\delta' - \text{div}(s')) = H^0(C, \eta) = 0. \blacksquare$$

On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} S^2H^0(C, K_C + \eta) &\simeq [p^*S^2H^0(E, \delta'')s'^2 \oplus p^*S^2H^0(E, \delta')s''^2] \\ &\oplus [p^*H^0(E, \delta'') \otimes p^*H^0(E, \delta')]s's''. \end{aligned}$$

Si $s_{\Delta'}$ (resp. $s_{\Delta''}$) est une section de diviseur Δ' (resp. Δ'') telle que $p^*s_{\Delta'} = s'^2$ (resp. $p^*s_{\Delta''} = s''^2$), on peut écrire $T^{\vee}\text{Pr}$ comme la somme de:

$$T^{\vee}\text{Pr}_t: S^2H^0(E, \delta') \oplus S^2H^0(E, \delta'') \rightarrow H^0(E, 2\delta)$$

$$(u' \cdot v', u'' \cdot v'') \mapsto u'v's_{\Delta''} + u''v''s_{\Delta'}$$

et de:

$$H^0(E, \delta') \otimes H^0(E, \delta'') \rightarrow H^0(E, \delta)$$

$$u' \otimes u'' \mapsto u'u''.$$

PROPOSITION 5.4.2. Pour $g \geq 4$, $(g, t) \neq (4, 2)$ et (C, η) générique dans $\mathcal{S}_{g+1, t}$, on a

$$\dim \text{Ker } T_{(C, \eta)}\text{Pr}_t = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0 \\ 1 & \text{pour } 0 < t \leq g/2. \end{cases}$$

En particulier, sous les mêmes hypothèses sur g et t , on a:

$$\dim \text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1, t}) = \begin{cases} 2g & \text{pour } t = 0 \\ 2g - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On rappelle que $t = \deg \delta'$. Si $t = 0$, $\dim \text{Ker } T \text{Pr}_0$ est le corang de $S^2 H^0(E, \delta'') \rightarrow H^0(E, 2\delta'') = H^0(E, 2\delta)$, qui est surjective pour $g = \deg \delta'' \geq 3$ ([Mu 4], page 55). On suppose $t > 0$. On peut écrire $T^\vee \text{Pr}_t$ comme la composée de:

$$\phi' \oplus \phi'': S^2 H^0(E, \delta') \oplus S^2 H^0(E, \delta'') \rightarrow H^0(E, 2\delta') \oplus H^0(E, 2\delta'')$$

et de:

$$\begin{aligned} \phi: H^0(E, 2\delta') \oplus H^0(E, 2\delta'') &\rightarrow H^0(E, 2\delta) \\ (u', u'') &\mapsto u' s_{\Delta''} + u'' s_{\Delta'}. \end{aligned}$$

Comme Δ' et Δ'' sont à supports disjoints, le noyau de ϕ est engendré par $(s_{\Delta'} - s_{\Delta''})$.

Si $t = 1$, on a:

$$\text{Im}(\phi' \oplus \phi'') \cap \text{Ker } \phi = [\mathbb{C} s_{\delta'}^2 \oplus H^0(2\delta'')] \cap \mathbb{C}(s_{\Delta'} - s_{\Delta''}) = 0,$$

puisque Δ' est somme de deux points distincts (ϕ'' est surjective puisque $\deg \delta'' = g - 1 \geq 3$). On a donc:

$$\text{Rang } T^\vee \text{Pr}_1 = \text{Rang}(\phi' \oplus \phi'') = 1 + 2(g - 1) = 2g - 1.$$

Si $t = 2$, le même raisonnement s'applique sauf si Δ' est somme de deux éléments de $|\delta'|$, ce qui n'est pas le cas génériquement, ou si $\deg \delta'' = g - 2 < 3$, cas qu'on a exclu.

Si $t \geq 3$, ϕ' et ϕ'' sont surjectives et:

$$\text{Rang } T^\vee \text{Pr}_t = \text{Rang } \phi = 2g - 1. \blacksquare$$

On peut maintenant montrer que $\mathcal{E}_{g,0} = \text{Pr}(\overline{\mathcal{F}}_{g+1,0})$ est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g . On rappelle le théorème d'Andreotti–Mayer dont on peut trouver la démonstration, sinon l'énoncé, dans [A–M].

THÉORÈME 5.4.3 (Andreotti–Mayer). *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g . On suppose que*

- (a) *Sing Θ est de dimension pure k , et*
- (b) *l'ensemble $\text{Sing}_2 \Theta$ des points de multiplicité deux sur Θ est dense dans $\text{Sing } \Theta$ et l'image de chaque composante de $\text{Sing}_2 \Theta$ par l'application:*

$$(5.4.4) \quad \text{Sing}_2 \Theta \rightarrow \mathbb{P} S^2 T_0^\vee A$$

$$x \mapsto \tau_x^* \quad (\text{cône tangent à } \Theta \text{ en } x)$$

engendre un espace linéaire de dimension $\geq N$. Alors la codimension de \mathcal{N}_k^g en (A, Θ) est $\geq N$.

COROLLAIRE 5.4.5. *L'ensemble $\mathcal{E}_{g,0}$ est, pour $g \geq 5$, une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g de dimension $2g$.*

Démonstration. En effet, pour un élément générique (P, Ξ) de $\mathcal{E}_{g,0}$, $\text{Sing } \Xi$ est irréductible pour $g \geq 5$ par 5.2.4. L'image de 5.4.4 engendre un espace linéaire de dimension $\binom{g+1}{2} - 2g$ (5.3.1) et $\dim \mathcal{E}_{g,0} = 2g$ (5.4.2). Le théorème 5.4.3 permet de conclure. ■

Remarque 5.4.6. Bien que, pour un élément générique (P, Ξ) de $\mathcal{E}_{g,1}$, $\text{Sing } \Xi$ soit irréductible (5.2.4), l'image de 5.4.4 engendre un espace linéaire de dimension $\binom{g+1}{2} - (3g - 2)$ (5.3.1) et $\dim \mathcal{E}_{g,1} = 2g - 1$ (5.4.2). On ne peut appliquer 5.4.3. Pourtant, $\mathcal{E}_{g,1}$ est bien une composante de \mathcal{N}_{g-4}^g (5.6.1 et 8.2).

5.5. Quelques remarques. La famille $\mathcal{E}_{g,1}$ contient les jacobiniennes superelliptiques. On garde toujours les mêmes notations, auxquelles on ajoute:

$$P' = \text{Ker}(JC' \xrightarrow{\text{Nm}} JE)$$

$$P'' = \text{Ker}(JC'' \xrightarrow{\text{Nm}} JE).$$

La polarisation de JC' (resp. JC'') induit sur P' (resp. P'') une polarisation $L_{P'}$ (resp. $L_{P''}$) telle que ([Mu 2], Corollary 1, page 332; et 1) $H(L_{P'}) \simeq p'^*JE[2]$ (resp. $H(L_{P''}) \simeq p''^*JE[2]$). Cette polarisation est de type (2) et $(P', L_{P'}) \in \mathcal{A}_{t,(2)}$ (resp. $(P'', L_{P''}) \in \mathcal{A}_{g-t,(2)}$).

PROPOSITION 5.5.1. *Pour $t = 0$, on a une isogénie:*

$$g: P'' \xrightarrow{\pi''^*} P = \text{Prym}(\tilde{C}/C)$$

de noyau $\{0, p''^*\mathcal{O}(\delta')\}$ telle que $g^*L_P \sim L_{P'} \boxtimes L_{P''}$. Pour $0 < t \leq g/2$, on a une isogénie:

$$g: P' \times P'' \rightarrow P$$

$$(x', x'') \mapsto \pi'^*x' - \pi''^*x''$$

de noyau $(p'^*, p''^*)(JE[2])$ telle que $g^*L_P \sim L_{P'} \boxtimes L_{P''}$ (cf. Notations 1). En particulier, $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t}) \subset \mathcal{A}_{t,g-t}^2$ (cf. définition 9.3).

Démonstration. Il est facile de vérifier que g est bien à valeurs dans P et que $\text{Ker } g \subset P'[2] \times P''[2]$, donc que g est une isogénie. Pour les polarisations, il faut montrer que:

$$\hat{\pi}'^*\phi_{L_P}\pi'^* = \phi_{L_{P'}} \quad \text{et} \quad \hat{\pi}''^*\phi_{L_P}\pi''^* = 0.$$

On montre par exemple la première égalité. On pose:

$$\begin{aligned} i: P \hookrightarrow J\tilde{C} & & i': P' \hookrightarrow JC' \\ \phi: J\tilde{C} \xrightarrow{\sim} \widehat{J\tilde{C}} & & \phi': JC' \xrightarrow{\sim} \widehat{JC'} \end{aligned}$$

$\forall p' \in P'$

$$\begin{aligned} \hat{\pi}'^* \phi_{L_p} \pi'^*(2p') &= \hat{\pi}'^* \phi_{L_p^{\otimes 2}} \pi'^*(p') \\ &= \hat{\pi}'^* \hat{i} \phi \pi'^*(p') = \hat{i}' \hat{\pi}'^* \phi \pi'^* i'(p') \\ &= \hat{i}' \phi' i'(2p') = \phi_{L_{p'}}(2p'). \blacksquare \end{aligned}$$

On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas du genre de E . Si E est de genre $b \geq 2$, on obtient des variétés de Prym qui sont dans $\mathcal{A}_{t, g-t}^{\delta}$, où δ est la polarisation $(2, \dots, 2)$ de degré 2^b et $b-1 \leq t \leq g-(b-1)$.

Regardons de plus près les cas $t=0$ et $t=1$. Soit \mathcal{F}_g l'ensemble des variétés de Prym (au sens de [Mu 2]) associées aux courbes superelliptiques de genre $g+1$. C'est un sous-ensemble irréductible de $\mathcal{A}_{g, (2)}$.

PROPOSITION 5.5.2. (1) *Pour tout $(P, L) \in \mathcal{F}_g$ et $a \in H(L)$, $a \neq 0$, la variété abélienne principalement polarisée $P/\{0, a\}$ est dans $\mathcal{E}_{g,0}$.*

(2) *Pour $g \geq 4$ et tout $(P, L) \in \mathcal{F}_{g-1}$, toute courbe elliptique F et tout isomorphisme $\psi: H(L) \xrightarrow{\sim} F[2]$, la variété abélienne principalement polarisée $P \times F/\{(a, \psi a) \mid a \in H(L)\}$, élément de $\mathcal{A}_{1, g-1}^2$ (cf. définition 9.3) est dans $\mathcal{E}_{g,1}$.*

Démonstration. Le premier point découle immédiatement de 5.5.1. Pour le second, on remarque d'abord que la famille $\mathcal{F}_{g,1}$ ainsi construite est irréductible puisque la famille:

$$\left\{ p: C \rightarrow E \text{ structure superelliptique, } C \text{ de genre } g, \right. \\ \left. \text{avec un isomorphisme } E[2] \xrightarrow{\sim} H(2) \right\}$$

est irréductible. De plus, $\dim \mathcal{F}_{g,1} \leq 2g-2+1$. Par 5.5.1 et 9.1, $\text{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,1}) \subset \mathcal{F}_{g,1}$ et par 5.4.2, $\dim \mathcal{E}_{g,1} = 2g-1$ pour $g \geq 4$. On en déduit $\mathcal{E}_{g,1} = \overline{\mathcal{F}_{g,1}}$. ■

COROLLAIRE 5.5.3. *Pour $g \geq 4$, $\mathcal{E}_{g,1}$ contient les jacobiniennes superelliptiques.*

Démonstration. En effet ([Mu 2], Corollary 1(b)), pour $p: C \rightarrow E$ structure superelliptique, on a une isogénie $P \times JE \rightarrow JC$ de noyau $(p^*, id)(JE[2])$. ■

5.6. *L'espace $\mathcal{E}_{g,1}$ est une composante de \mathcal{N}_{g-4}^g .* On ne considère dans cette section que le cas $g \geq 6$. Le résultat est encore vrai pour $g=5$ et sera montré en 8.2.

THÉORÈME 5.6.1. *Pour $g \geq 6$, $\mathcal{E}_{g,1}$ est une composante irréductible de dimension $2g - 1$ de \mathcal{N}_{g-4}^g .*

Démonstration. On rappelle que la méthode d'Andreotti et Mayer ne s'applique pas à $\mathcal{E}_{g,1}$ (5.4.6). On va utiliser les dégénérescences de rang 1 des variétés abéliennes, telles qu'elles sont définies dans [Mu 1], page 350. Expliquons rapidement de quoi il s'agit. Les dégénérescences de rang 1 de variétés abéliennes de dimension g sont en correspondance biunivoque avec les extensions de groupes commutatifs des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g - 1$ par un tore de dimension 1. Par [Mu 6], page 227, ces extensions sont toutes du type:

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{j} \mathcal{G}(L_a \otimes L^{-1}) \rightarrow A \rightarrow 0$$

où $(A, L) \in \mathcal{A}_{g-1}$, $a \in A$ (cf. 1.1. et [Mu 5], page 290). Si on change a en $-a$, j est changé en $-j$ et les groupes obtenus sont isomorphes.

Il existe ([Ig 1], [Mu 1], page 351, [Mu 7], [Na]) un espace de modules grossier $\overline{\mathcal{A}}_g^{(1)}$ pour les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g et leurs dégénérescences de rang 1, qui est réunion disjointe de \mathcal{A}_g et d'un diviseur $\partial\mathcal{A}_g$. Ce dernier est fibré sur \mathcal{A}_{g-1} par $\rho_g: \partial\mathcal{A}_g \rightarrow \mathcal{A}_{g-1}$. La fibre de $(A, L) \in \mathcal{A}_{g-1}$ est isomorphe à $A/\text{Aut}(A, L)$ par la correspondance ci-dessus. Si Z est un fermé de \mathcal{A}_g , on notera ∂Z l'intersection de l'adhérence de Z dans $\overline{\mathcal{A}}_g^{(1)}$ avec $\partial\mathcal{A}_g$.

On aura besoin d'un calcul d'extension, fait dans [F-S 1], Theorem 5.2, relatif à la situation suivante. Soit $\pi_0: \tilde{N} \rightarrow N$ un revêtement étale connexe de degré 2, où N est lisse de genre g . On note σ l'involution induite sur \tilde{N} et $(P_0, L_0) \in \mathcal{A}_{g-1}$ la variété de Prym associée. Soit C (resp. \tilde{C}) la courbe singulière obtenue à partir de N (resp. \tilde{N}) en identifiant deux points p et q (resp. \tilde{p} et \tilde{q} , et $\sigma\tilde{p}$ et $\sigma\tilde{q}$ où $\pi_0(\tilde{p}) = p$, $\pi_0(\tilde{q}) = q$). On a un revêtement étale induit $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ qui n'est pas admissible. La variété de Prym $P = \text{Ker}(J\tilde{C} \xrightarrow{\text{Nm}} JC)^0$ est extension de P_0 par un tore de dimension 1. Plus précisément:

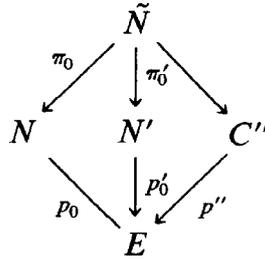
LEMME 5.6.2 (Friedman-Smith). *L'extension canonique $1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow P \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ correspond à l'élément $\mathcal{O}_{\tilde{N}}(\pm(\tilde{q} - \tilde{p} - \sigma\tilde{q} + \sigma\tilde{p}))$ de P_0 .*

On considère maintenant un revêtement $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ dans $\mathcal{S}_{g,0}$, qui est donc associé à $\eta = p^*\delta'$, où $\mathcal{O}(\delta')$ est d'ordre 2 dans $\text{Pic}^0 E$. Si $f = p\pi: \tilde{C} \rightarrow E$, on notera $f^*(JE[2]) = \{0, \varepsilon\}$ (puisque $f^*\delta' \equiv 0$).

LEMME 5.6.3. *Soit $(P, L) \in \text{Pr}(\mathcal{S}_{g,0}) \subset \mathcal{E}_{g-1,0}$ et ε le seul élément non nul de $f^*(JE[2])$. Alors l'extension de P par ε est dans $\partial\mathcal{E}_{g,1}$.*

Démonstration. On considère un élément de $\mathcal{S}_{g+1,1}$, avec les notations 5.1. Si on fait "tendre" P_1 vers P_2 sur E , la courbe C' dégénère en $N'/Q' \sim \tau_0'Q'$ où N' est lisse, revêtement étale de E de degré 2 par $p'_0: N' \rightarrow E$ et $p'_0(Q') = P_1 = P_2$.

On a un diagramme:



et le revêtement π_0 est dans $\mathcal{S}_{g,0}$. On a:

$$C = N/Q \sim \tau_0 Q \quad \text{où } p_0(Q) = P_1 = P_2$$

$$\tilde{C} = \tilde{N}/\tilde{Q} \sim \sigma''_0 \tilde{Q} \quad \text{et } \sigma_0 \tilde{Q} \sim \sigma'_0 \tilde{Q} \text{ où } \pi_0(\tilde{Q}) = Q.$$

Si on note P (resp. P_0) la variété de Prym associée à $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ (resp. $\pi_0: \tilde{N} \rightarrow N$), on est dans la situation de 5.6.2. On a donc une extension:

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow P \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

correspondant à $a = \mathcal{O}_{\tilde{N}}(\pm(\tilde{Q} - \sigma''_0 \tilde{Q} - \sigma_0 \tilde{Q} + \sigma'_0 \tilde{Q}))$.

Or $a = \pi'_0 * \mathcal{O}_{N'}(\pm(Q' - \tau'_0 Q'))$, où $Q' = \pi'_0(Q)$, et $\mathcal{O}_{N'}(x' - \tau'_0 x')$ est, pour tout $x' \in N'$, le seul élément non nul de $\text{Ker}(JN' \xrightarrow{\text{Nm}} JE)$, c'est-à-dire $p'_0 * \alpha$, où $\alpha \in JE[2] \setminus \{0, \mathcal{O}(\delta')\}$.

Comme $P_0 \in \text{Pr}(\mathcal{S}_{g,0})$ et $P \in \partial \mathcal{E}_{g,1}$, la démonstration est terminée. ■

On a ainsi mis en évidence une composante irréductible $\partial \mathcal{E}_{g,1}^1$ de $\partial \mathcal{E}_{g,1}$, de dimension $2g - 2$, telle que ρ_g induise un morphisme $\phi_g: \partial \mathcal{E}_{g,1}^1 \rightarrow \mathcal{E}_{g-1,0}$ avec $\phi_g^{-1}((P_0, L_0)) = \{\varepsilon\}$, pour $(P_0, L_0) \in \text{Pr}(\mathcal{S}_{g,0}) \subset \mathcal{E}_{g-1,0}$.

D'autre part, Mumford a étudié dans [Mu 1] les espaces $\partial \mathcal{N}_k^g$. Il construit dans [Mu 1], page 364, pour toute famille universelle locale $G \rightarrow U \subset \mathcal{A}_g^{(1)}$ munie d'un diviseur thêta relatif $D \subset G$ au-dessus de $U \cap \mathcal{A}_g$, une compactification $\bar{G} \rightarrow U$ et un sous-schéma fermé $\text{Sing}_{\text{vert}} \bar{D}$ de \bar{G} vérifiant:

(1) Si $s \in U \cap \mathcal{A}_g$, la fibre (G_s, D_s) est une variété abélienne principalement polarisée et $(\text{Sing}_{\text{vert}} \bar{D})_s = \text{Sing } D_s$.

(2) Si $s \in U \cap \partial \mathcal{A}_g$, G_s est la dégénérescence de rang 1 associée à $(A_s, \Theta_s) \in \mathcal{A}_{g-1}$ et $a \in A_s$. On a:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & G_s = \mathcal{G}(\mathcal{O}(\Theta_{s,a} - \Theta_s)) & \longrightarrow & A_s \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 & & F & \longrightarrow & \bar{G}_s & \dashrightarrow & A_s
 \end{array}$$

où F est la courbe singulière obtenue en identifiant 0 et ∞ sur \mathbb{P}^1 . On a alors:

(2') Sur $\overline{G}_s - G_s \xrightarrow{\sim} A_s$, $(\overline{G}_s - G_s) \cdot (\text{Sing}_{\text{vert}} \overline{D})_s \xrightarrow{\sim} \text{Sing } \Theta_s$.

(2'') Sur G_s , si V est un ouvert de A_s au-dessus duquel on a une trivialisation $G_s \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^* \times V$, on a:

$$G_s \cdot (\text{Sing}_{\text{vert}} \overline{D})_s = \left\{ (\lambda, z) \in \mathbb{C}^* \times V \mid \vartheta(z) \theta(z - a) = 0 \right. \\ \left. \text{et } \forall j \in \{1, \dots, g - 1\} \frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z - a) = 0 \right\},$$

où (z_1, \dots, z_{g-1}) sont des coordonnées locales sur V et $\theta(z)$ (resp. $\theta(z - a)$) une équation locale de Θ_s (resp. $\Theta_{s,a}$). Sa projection sur A_s est donc finie au-dessus de $\text{Sing}(\Theta \cdot \Theta_a) - \text{Sing } \Theta - \text{Sing } \Theta_a$, à fibres de dimension 1 au-dessus de $\text{Sing } \Theta \cdot \text{Sing } \Theta_a$.

De (1), on déduit:

$$U \cap \overline{\mathcal{N}}_k^g \subset \{s \in U \mid \dim(\text{Sing}_{\text{vert}} \overline{D})_s \geq k\},$$

de sorte que $\partial \mathcal{N}_k^g$ est contenu dans la réunion de:

- $\rho_g^{-1}(\mathcal{N}_k^{g-1})$ (cas 2'),
- $\partial \mathcal{N}_{k,1}^g =$

$\{((A, \Theta), a) \in \partial \mathcal{A}_g, \text{ avec } (A, \Theta) \in \mathcal{A}_{g-1} \text{ et } a \in A \mid \dim \text{Sing}(\Theta \cdot \Theta_a) \geq k\},$

- $\partial \mathcal{N}_{k,2}^g = \{((A, \Theta), a) \in \partial \mathcal{A}_g \mid \dim(\text{Sing } \Theta \cdot \text{Sing } \Theta_a) \geq k - 1\}.$

Soient \mathcal{C}_g une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-4}^g contenant $\mathcal{C}_{g,1}^1$, et $\partial \mathcal{C}_g^1$ une composante irréductible de $\partial \mathcal{C}_g$ contenant $\partial \mathcal{C}_{g,1}^1$. On a:

- $\dim \partial \mathcal{C}_g^1 = \dim \mathcal{C}_g - 1$
- $\partial \mathcal{C}_{g,1}^1 \subset \partial \mathcal{C}_g^1 \subset \rho_g^{-1}(\mathcal{N}_{g-4}^{g-1}) \cup \partial \mathcal{N}_{g-4,1}^g \cup \partial \mathcal{N}_{g-4,2}^g.$

On admet provisoirement le résultat suivant:

LEMME 5.6.4. Soient $p: C \rightarrow E$ une courbe superelliptique de genre $g \geq 6$ et $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement étale élément de $\mathcal{S}_{g,0}$. On note (P_0, Ξ) la variété de Prym associée et ε le seul élément non nul de $(\pi p)^*(JE[2]) \subset P_0$. On a alors:

$$\text{Sing}(\Xi \cdot \Xi_\varepsilon) = \text{Sing } \Xi = \text{Sing } \Xi_\varepsilon.$$

En particulier, comme $\dim \text{Sing } \Xi = g - 5$ (5.2.4(i)), l'extension $P \in \partial \mathcal{C}_{g,1}^1$ de P_0 correspondant à ε n'est ni dans $\rho_g^{-1}(\mathcal{N}_{g-4}^{g-1})$, ni dans $\partial \mathcal{N}_{g-4,1}^g$. On a donc:

$$\partial \mathcal{C}_{g,1}^1 \subset \partial \mathcal{C}_g^1 \subset \partial \mathcal{N}_{g-4,2}^g.$$

En prenant les images par ρ_g , on obtient:

$$\mathcal{C}_{g-1,0} \subset \rho_g(\partial \mathcal{C}_g^1) \subset \rho_g(\partial \mathcal{N}_{g-4,2}^g) \subset \mathcal{N}_{g-5}^{g-1}.$$

Or, pour $g - 1 \geq 5$, $\mathcal{C}_{g-1,0}$ est une composante irréductible de \mathcal{N}_{g-5}^{g-1} (5.4.5).
On en déduit:

$$\mathcal{C}_{g-1,0} = \rho_g(\partial \mathcal{C}_g^1).$$

Pour montrer que $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_{g,1}$, il suffit de montrer que $\dim \mathcal{C}_g = 2g - 1$, ou que $\dim \partial \mathcal{C}_g^1 = 2g - 2 = \dim \mathcal{C}_{g-1,0}$.

C'est une conséquence du lemme suivant, qui termine donc la démonstration du théorème. ■

LEMME 5.6.5. *Avec les hypothèses et notations de 5.6.4, on a:*

$$\{a \in P_0 \mid \dim(\text{Sing } \Xi \cdot \text{Sing } \Xi_a) \geq g - 5\} = \{0, \varepsilon\}.$$

Démonstration de 5.6.4 et 5.6.5. On écrira P au lieu de P_0 et on remplace g par $g + 1 \geq 6$ pour rester dans le cadre habituel.

On rappelle qu'on a (5.2.1, 5.2.2, 5.2.4):

$$\Xi = \{ \pi''^* L'' \mid L'' \in \text{Pic}^g C'', h^0(L'') \geq 1, \text{Nm}_{p''} L'' = \mathcal{O}(\delta) \}$$

$$\text{Sing } \Xi = \{ \pi''^*(L'' \otimes p''^* M) \mid L'' \in \text{Pic}^{g-4} C'',$$

$$h^0(L'') \geq 1, M \in \text{Pic}^2 E, \text{Nm}_{p''} L'' \otimes M^{\otimes 2} = \mathcal{O}(\delta) \}.$$

On note $\varepsilon = f^* \alpha$, où $\alpha \in JE[2] \setminus \{0, \mathcal{O}(\delta')\}$. Si $L = \pi''^* L^*$ est dans Ξ , on a (cf. 2):

$$h^0(L \otimes \varepsilon) = h^0(L'' \otimes p''^* \alpha) + h^0(L'' \otimes p''^* \alpha \otimes p''^* \mathcal{O}(\delta')).$$

Si $L'' = \mathcal{O}(D'')$ où D'' est effectif p'' -simple, on a par 5.2.7:

$$\begin{aligned} h^0(L'' \otimes p''^* \alpha) &\leq h^0(E, \alpha) + h^0(\text{Nm } L'' \otimes \alpha \otimes \mathcal{O}(-\delta'')) \\ &= h^0(\mathcal{O}(\delta') \otimes \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Donc $L \notin \Xi_\varepsilon$. On en déduit:

$$\begin{aligned} \Xi \cdot \Xi_\varepsilon &= \left\{ \pi''^*(L'' \otimes p''^*M) \mid L'' \in \text{Pic}^{g-2}C'', \right. \\ &\quad \left. h^0(L'') \geq 1, M \in \text{Pic}^1E, \text{Nm}_{p''}L'' \otimes M^{\otimes 2} = \mathcal{O}(\delta) \right\}. \end{aligned}$$

Pour un élément L de $(\Xi \cdot \Xi_\varepsilon) - \text{Sing } \Xi$ (c'est-à-dire avec $L'' = \mathcal{O}(D'')$, D'' effectif p'' -simple), on a par 5.2.7:

$$0 \rightarrow H^0(E, M) \rightarrow H^0(L'' \otimes p''^*M) \rightarrow H^0(M \otimes \text{Nm } L'' \otimes \mathcal{O}(-\delta'')) = 0.$$

Si on note $s_{D''}$ une section de diviseur D'' et s_N une base de $H^0(E, N)$ pour tout $N \in \text{Pic}^1E$, on a:

$$H^0(\tilde{C}, L) = \left\langle \pi''^*(s_{D''} \cdot p''^*s_M), \pi''^*(s_{D''} \cdot p''^*s_{M \otimes \delta'}) \right\rangle.$$

De même:

$$H^0(\tilde{C}, L \otimes \varepsilon) = \left\langle \pi''^*(s_{D''} \cdot p''^*s_{M \otimes \alpha}), \pi''^*(s_{D''} \cdot p''^*s_{M \otimes \delta' \otimes \alpha}) \right\rangle.$$

Si $G: \Xi_{\text{lisse}} \rightarrow \mathbb{P}T_0^\vee P \simeq \mathbb{P}H^0(K_C + \eta) \simeq \mathbb{P}H^0(\delta'')$ est l'application de Gauss, on en déduit:

$$\begin{aligned} G(L) &= p''_*(D'') + \text{div}(s_M) + \text{div}(s_{M \otimes \delta'}) \in |\delta''| \\ G(L_\varepsilon) &= p''_*(D'') + \text{div}(s_{M \otimes \alpha}) + \text{div}(s_{M \otimes \delta' \otimes \alpha}) \in |\delta''|. \end{aligned}$$

En particulier, $G(L) \neq G(L_\varepsilon)$ et $\Xi \cdot \Xi_\varepsilon$ est lisse en L , ce qui démontre 5.6.4.

Pour montrer 5.6.5, on utilise le résultat suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.

LEMME 5.6.6. Soit $p: C \rightarrow E$ une courbe superelliptique de genre $g + 1 \geq 5$. On pose:

$$W = \left\{ L \in \text{Pic}^g C \mid L = p^*M \otimes \mathcal{O}_C(D), M \in \text{Pic}^2 E, D \in C^{(g-4)} \right\}.$$

Alors

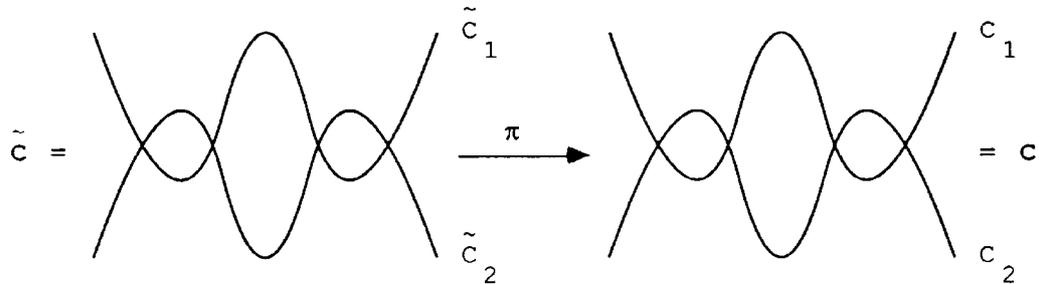
$$\{ a \in \text{Pic}^0 C \mid W + a = W \} = p^* \text{Pic}^0 E.$$

Soit $a \in P$ tel que $\dim(\text{Sing } \Xi \cdot \text{Sing } \Xi_a) \geq g - 4$. Comme $\text{Sing } \Xi$ est irréductible de dimension $g - 4$ (5.2.4), on a $\text{Sing } \Xi_a = \text{Sing } \Xi$. On écrit $a = \pi''^* a''$, où $a'' \in P''$ (5.5.1) et on note W'' l'ensemble W défini dans le lemme ci-dessus pour la courbe superelliptique C'' . Comme:

$$\{L'' \in W'' \mid \text{Nm } L'' = \delta\} = (\pi''^*)^{-1}(\text{Sing } \Xi),$$

on en déduit $W'' + a'' = W''$. On conclut par 5.6.6 que $a'' \in P'' \cap p''^* JE = p''^* JE[2]$, soit $a \in \{0, \varepsilon\}$. ■

6. Etude des familles $\mathcal{H}_{g+1,t}$ et de la famille \mathcal{T}_6 . On s'intéresse dans cette partie aux revêtements admissibles du type:

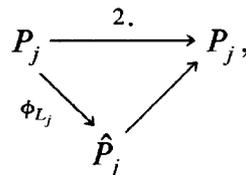


où $g(C_1) = t - 1$, $g(C_2) = g - t - 1$, C_1 et C_2 lisses, $1 \leq t \leq g/2$.

Les revêtements $\pi_j: \tilde{C}_j \rightarrow C_j$ sont ramifiés en 4 points. On note $P_j = \text{Ker}(J\tilde{C}_j \xrightarrow{\text{Nm}} JC_j)$. La polarisation de $J\tilde{C}_j$ induit une polarisation L_j sur P_j et on a ([Mu 2], Corollary 1, page 332, et 1):

$$H(L_j) \simeq \pi_j^*(JC_j[2]).$$

Ces polarisations sont donc de type $(2, \dots, 2)$ ($\dim P_j - 1$ fois). On a des factorisations:



qui induisent des polarisations \hat{L}_j sur \hat{P}_j , de type (2).

On note (P, L) la variété de Prym (principalement polarisée) associée au revêtement admissible π .

PROPOSITION 6.1. *Il existe une isogénie de degré 4, $g: \hat{P}_1 \times \hat{P}_2 \rightarrow P$ telle que $g^*L \sim \hat{L}_1 \boxtimes \hat{L}_2$.*

En particulier $\text{Pr}(\mathcal{H}_{g+1,t}) \subset \mathcal{A}_{t,g-t}^2$ pour $1 \leq t \leq g/2$ (cf. définition 9.3).

Démonstration. D'après [Be 1], page 159, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{T}[2] & \longrightarrow & P \times \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & P_1 \times P_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{*3} \simeq \tilde{T} & \longrightarrow & J\tilde{C} & \longrightarrow & J\tilde{C}_1 \times J\tilde{C}_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \text{Nm} & & \downarrow \text{Nm} \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{*3} \simeq T & \longrightarrow & JC & \longrightarrow & JC_1 \times JC_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Il existe donc une isogénie de degré 4, $f: P \rightarrow P_1 \times P_2$ qui vérifie $f^*(L_1 \boxtimes L_2) \simeq L^{\otimes 2}$.

On pose $g = \phi_L^{-1}f: \hat{P}_1 \times \hat{P}_2 \rightarrow \hat{P} \xrightarrow{\sim} P$. Il est facile de vérifier que $\hat{g}\phi_L g = \phi_{\hat{L}_1} \times \phi_{\hat{L}_2}$, ce qui prouve la proposition. ■

(6.2) On s'intéresse maintenant à la famille \mathcal{T}_6 , pour laquelle (cf. 3, 3.1) $C = C_1 \cup C_2$, C_1 rationnelle lisse, $C_1 \cap C_2 = \{u_1, \dots, u_4\}$, $\omega_{C_2} \simeq \mathcal{O}_{C_2}(u_1 + \dots + u_4)$. On supposera C_2 lisse non hyperelliptique (de genre 3).

Par 6.1, il existe une isogénie:

$$(6.3) \quad f: F \times \hat{P}_2 \rightarrow P = \text{Prym}(\tilde{C}/C),$$

où $F \simeq J\tilde{C}_1$ est une courbe elliptique. Elle vérifie:

$$f^*L \sim L_F \boxtimes \hat{L}_2,$$

où L_F est une polarisation de degré 2 sur F .

On rappelle qu'on veut montrer que $\text{Pr}(\mathcal{T}_6) \subset \mathcal{E}_{5,1}$. On utilise pour cela 9.1 et 5.5.2 avec ses notations: il suffit de montrer que $(\hat{P}_2, \hat{L}_2) \in \mathcal{F}_4 \subset \mathcal{A}_{4,(2)}$. La

courbe C_1 ne joue plus aucun rôle: la courbe C_2 est plongée dans \mathbb{P}^2 par $|\omega_{C_2}|$, le revêtement $\pi_2: \tilde{C}_2 \rightarrow C_2$ est ramifié le long d'une section par une droite D et on veut montrer que la variété de Prym duale (\hat{P}_2, \hat{L}_2) est dans \mathcal{F}_4 .

Considérons le cas particulier $C = D \cup C_2$ d'élément de \mathcal{F}_6 . La courbe C est une quintique plane. Le revêtement $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ est pair au sens de [Ma] puisque sa variété de Prym (P, L) est dans \mathcal{N}_1^5 . Cette dernière est donc isomorphe à la jacobienne (JN, Θ) d'une courbe N lisse de genre 5 ([Be 2], [Ma], [Tj 1], [Tj 2]). Le lieu singulier du diviseur Θ est isomorphe à la courbe \tilde{C} , donc est réductible. Il ressort de l'analyse de [Te] qu'il existe un morphisme de degré 2, $p: N \rightarrow E$, où E est la courbe elliptique revêtement double de D ramifié sur $D \cap C_2$. Si on note $(Q, L_Q) \in \mathcal{F}_4$ la variété de Prym associée à p , on a deux isogénies:

$$f: E \times \hat{P}_2 \rightarrow P \quad (\text{par 6.3})$$

$$g: E \times Q \rightarrow JN \simeq P \quad (\text{cf. 5.5.3})$$

et $f^*L \sim L_E \boxtimes \hat{L}_2$, $g^*L \sim L_E \boxtimes L_Q$.

On va maintenant montrer que (\hat{P}_2, \hat{L}_2) est isomorphe à (Q, L_Q) , ce qui terminera la démonstration. Pour cela, on utilise 9.1 et ses notations. Les injections $j_E(f): E \hookrightarrow JN$ (déduite de f) et $j_E(g): E \hookrightarrow JN$ (déduite de g) induisent toutes deux des morphismes de degré 2 de N sur E . Comme C_2 est irréductible, il découle de [Te] que la structure superelliptique de N est unique. Quitte à modifier f par un automorphisme de E et de N , on peut supposer que $j_E(f) = j_E(g)$. La conclusion est alors une conséquence directe de l'unicité de B'' dans 9.1.

7. La construction de Recillas. La construction tétragonale de Donagi. Cette partie est consacrée à la démonstration de résultats de Donagi annoncés dans [Do].

7.1. La construction de Recillas. Rappelons la construction suivante, exposée dans [Re] et précisée dans [D-S], pages 47–49.

Soit X une courbe lisse de genre g munie d'un g_4^1 , $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. La courbe $\tilde{C} = S_{\mathbb{P}^1}^2 X$ a au plus des points doubles comme singularités et admet un morphisme de degré 6, $f^{(2)}: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Il y a sur \tilde{C} une involution naturelle ι qui à $(a + b)$ associe $f^{-1}f(a) - (a + b)$. On note $\pi: \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}/\iota = C$ le morphisme induit, par lequel $f^{(2)}$ se factorise. La courbe C est trigonale.

THÉORÈME 7.1.1. *Le revêtement $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ est admissible et sa variété de Prym est isomorphe à la jacobienne de X .*

- COROLLAIRE 7.1.2. (1) Les variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes obtenues en identifiant deux points d'une courbe hyperelliptique sont des jacobiniennes hyperelliptiques (comparer [Be 1], Theorem 4.10, cas (b)).
 (2) Le lieu des jacobiniennes hyperelliptiques de genre g est contenu dans $\text{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,0})$.
 (3) Le lieu des jacobiniennes superelliptiques de genre g est contenu dans $\text{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,1})$.

Démonstration. Soit X une courbe hyperelliptique ou superelliptique de genre g . On a donc un morphisme de degré 2, $p: X \rightarrow B$, d'involution associée σ sur X , de ramification Δ_p sur B , avec $g(B) = 0$ ou 1. On choisit un $g_2^1, q: B \rightarrow \mathbb{P}^1$ de ramification Δ_q sur \mathbb{P}^1 , d'involution τ . Si $\tau(\Delta_p) \neq \Delta_p$, le groupe de Galois de $f = qp: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est le groupe D_4 . La courbe \tilde{C} associée par la construction de Recillas est:

$$\tilde{C} = \{x + \sigma x | x \in X\} \cup \{x + y | px = \tau py\} \simeq B \cup \tilde{H}$$

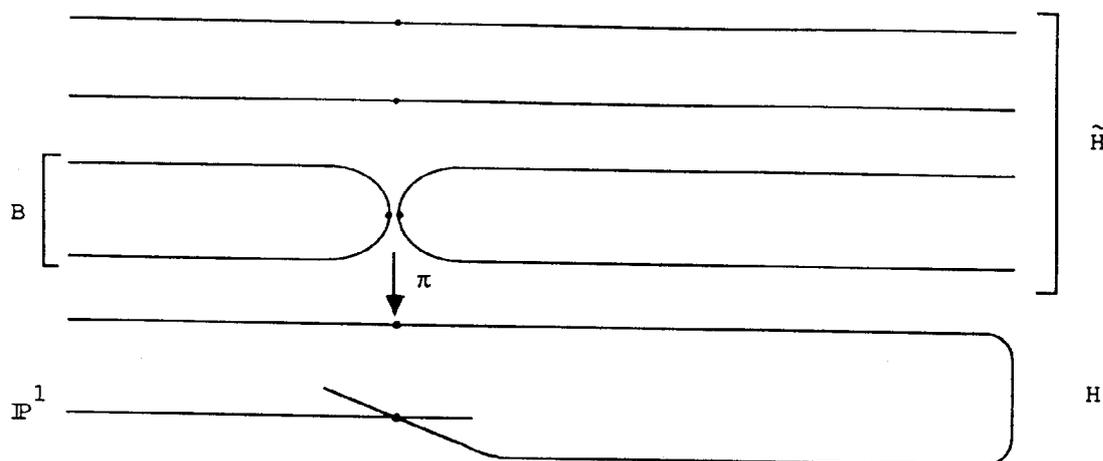
$$C = \tilde{C}/\iota \simeq \mathbb{P}^1 \cup H$$

et H est hyperelliptique.

Au-dessus de $Q \in \Delta_q \subset \mathbb{P}^1$, la fibre de $f^{(2)}$ est

- (a) sur B $x + \sigma x$ deux fois ($f(x) = Q$);
- (b) sur \tilde{H} $x + x, x + \sigma x, \sigma x + x, \sigma x + \sigma x$.

La figure locale est donc:

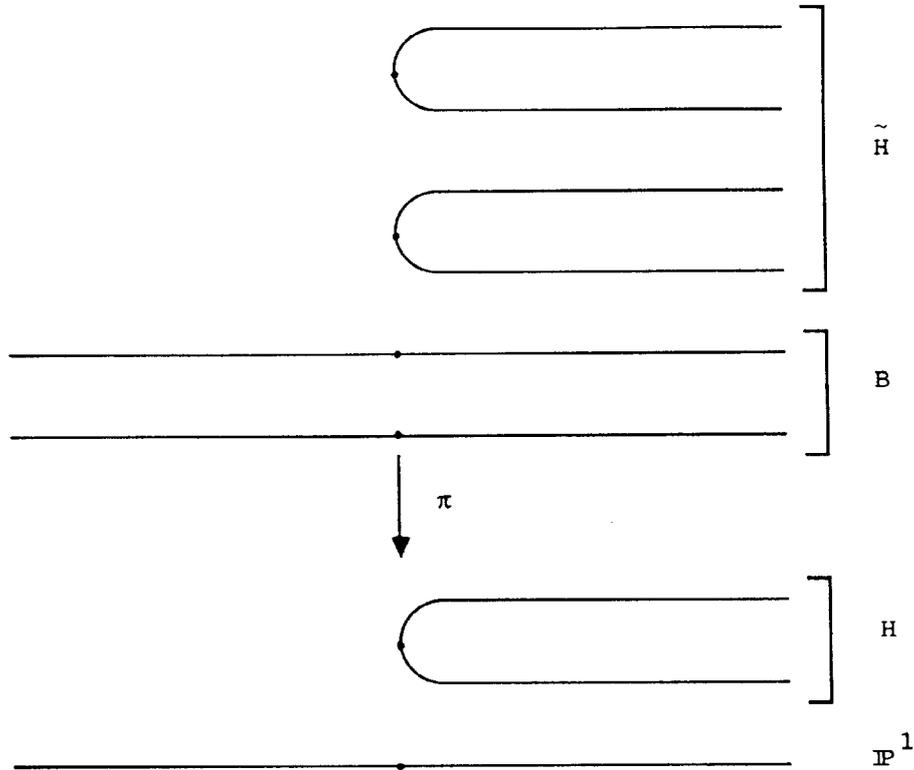


Donc H rencontre \mathbb{P}^1 en un point au-dessus de Q .

Au-dessus de $q(P)$, où $P \in \Delta_p \subset B$, la fibre est

- (a) sur B $2x, y + \sigma y$ ($p(x) = P, p(y) = \tau P$);
- (b) sur \tilde{H} $x + y$ deux fois, $x + \sigma y$ deux fois.

La figure locale est:



Donc H ne coupe pas \mathbb{P}^1 mais le morphisme $H \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^1$ est ramifié. On a donc

(a) $H \cap \mathbb{P}^1$ s'envoie par ϕ sur Δ_q et est Δ_q sur \mathbb{P}^1 ;

(b) ϕ est ramifié sur $q(\Delta_p)$.

Si $g(B) = 0$, H coupe \mathbb{P}^1 en 2 points quelconques. Il est facile de voir qu'on peut obtenir ainsi toutes les courbes hyperelliptiques H de genre g . En inversant la construction de Recillas ([Be 2], page 389), on a la réciproque, ce qui prouve (1) (utiliser [Be 1], 4.11.3). Si $\Delta_p = P_1 + \dots + P_{2g+2}$, on peut choisir q de façon que $\tau P_i = P_j \Leftrightarrow i = 1, j = 2$. La courbe H acquiert un point singulier au-dessus de $q(P_1)$. Ceci prouve (2).

Si $g(B) = 1$, H coupe \mathbb{P}^1 en 4 points, donc C est dans $\mathcal{H}_{g+1,1}$. ■

7.2. *La construction tétragonale de Donagi.* On part d'un revêtement double étale connexe $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ d'une courbe lisse C admettant un g_4^1 , $h: C \rightarrow \mathbb{P}^1$. On a donc un morphisme $\mathbb{P}^1 \rightarrow C^{(4)}$ qui à $P \in \mathbb{P}^1$ associe sa fibre $h^{-1}(P)$.

On pose:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} = \mathbb{P}^1 \times_{C^{(4)}} \tilde{C}^{(4)} & \longrightarrow & \tilde{C}^{(4)} \\ & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & C^{(4)} \end{array}$$

L'involution σ induit une involution γ sur \tilde{S} .

THÉORÈME 7.2.1 (Donagi) ([Do] et [Be 3], §3, (c)). *La courbe \tilde{S} est réunion disjointe de deux courbes \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 , stables par γ . Les revêtements $\tilde{C}_j \rightarrow \tilde{C}_j/\gamma$, $j = 1, 2$ sont admissibles et leurs variétés de Prym sont isomorphes à la variété de Prym de $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$.*

On va maintenant appliquer cette construction aux revêtements de $\mathcal{S}_{g+1,t}$ et de \mathcal{S}_{g+1} , pour lesquels la courbe C admet des g_4^1 .

7.2.2. *Le cas des familles $\mathcal{S}_{g+1,t}$.* On prend les notations 5.1, et on choisit un g_2^1 , $\phi: E \rightarrow \mathbb{P}^1$, d'involution associée ι . On pose $h = \phi p: C \rightarrow \mathbb{P}^1$. La fibre de $P \in \mathbb{P}^1$ sous $h\pi = \phi f: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ est $\{x, \sigma x, \sigma'x, \sigma''x, y, \sigma y, \sigma'y, \sigma''y\}$ où $f(x) = \iota f(y)$ et $\phi f(x) = P$.

Avec les notations ci-dessus, on a:

$$\tilde{C}_1 = \{x + \sigma''x + y + \sigma'y, \sigma x + \sigma''\sigma x + y + \sigma'y, \\ x + \sigma''x + \sigma y + \sigma'\sigma y, x + \sigma'x + y + \sigma''y \text{ et images par } \sigma \}$$

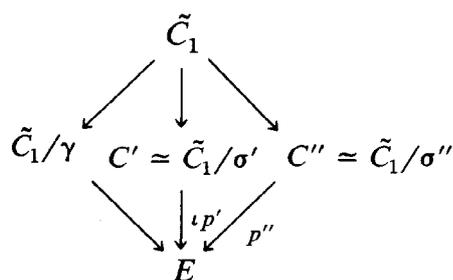
$$\tilde{C}_2 = \tilde{C}'_2 \cup \tilde{C}''_2 \quad \text{où:}$$

$$\tilde{C}'_2 = \{x + \sigma'x + y + \sigma'y, \sigma x + \sigma'\sigma x + y + \sigma'y \text{ et images par } \sigma \}$$

$$\simeq \{a' + b' \in C'^{(2)} | p'a' = \iota p'b'\}$$

$$\tilde{C}''_2 \simeq \{a'' + b'' \in C''^{(2)} | p''a'' = \iota p''b''\}.$$

(1) On suppose que $\iota P_i \neq P_j$ pour $1 \leq i \leq 2t < j \leq 2g$. On voit facilement (en utilisant [Be 3], Proposition 3, qui est un résultat de Welters ([We 3])) que \tilde{C}_1 est lisse et que γ y opère sans point fixe. Le groupe $\{1, \sigma, \sigma', \sigma''\}$ opère sur \tilde{C}_1 . On vérifie qu'il induit un diagramme commutatif:



Le revêtement étale $\tilde{C}_1 \rightarrow \tilde{C}_1/\gamma$ est donc dans $\mathcal{S}_{g+1,t}$. On peut remarquer que pour $t = 0$ (i.e. $2\delta' \equiv 0$), on a toujours $\iota\delta' \equiv \delta'$ et le revêtement obtenu est isomorphe à π . C'est d'ailleurs le seul cas où les fibres de $\text{Pr}|_{\mathcal{S}_{g+1,t}}$ sont de dimension 0 (5.4.2).

(2) Les courbes \tilde{C}'_2 et \tilde{C}''_2 se coupent en 4 points situés au-dessus de la ramification de ϕ sur \mathbb{P}^1 . Si $\iota P_i \neq P_j$ pour $1 \leq i, j \leq 2t$ (resp. $2t < i, j \leq 2g$)

alors \tilde{C}'_2 (resp. \tilde{C}''_2) est lisse. On a des morphismes de degré 2:

$$\tilde{C}'_2/\gamma \rightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{ramifié en } \phi P_1, \dots, \phi P_{2t}$$

$$\tilde{C}''_2/\gamma \rightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{ramifié en } \phi P_{2t+1}, \dots, \phi P_{2g}.$$

Plus précisément, on distingue les cas:

(i) $t = 0$. L'involution ι se remonte à C' et \tilde{C}'_2 est réunion disjointe de deux courbes rationnelles lisses stables par γ . La courbe $C_2 = \tilde{C}_2/\gamma$ est réunion de la courbe hyperelliptique \tilde{C}''_2/γ de genre $g - 1$ et de deux courbes rationnelles la coupant chacune en deux points. Sa réduction stable est dans $\overline{\mathcal{H}}_{g+1,0}$. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi toutes les courbes de $\mathcal{H}_{g+1,0}$.

(ii) $t = 1$. La courbe C_2 est réunion de la courbe hyperelliptique \tilde{C}''_2/γ de genre $g - 2$ et d'une courbe rationnelle la coupant en 4 points. On est donc dans $\overline{\mathcal{H}}_{g+1,1}$. Toute courbe hyperelliptique lisse de genre $g - 2$ peut être ainsi obtenue. Les quatre points d'intersection sont aussi quelconques sur cette courbe. Enfin, ils sont aussi quelconques sur \mathbb{P}^1 puisque, pour tous $R_1, \dots, R_4, S_1, \dots, S_4 \in \mathbb{P}^1$ tels que $[R_1: R_2: R_3: R_4] \neq [S_1: S_2: S_3: S_4]$, il existe un morphisme de degré 2, $\psi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ tel que $\psi(S_j) = R_j, 1 \leq j \leq 4$.

(iii) $t \geq 2$. On obtient deux courbes hyperelliptiques se coupant en 4 points. On est dans $\overline{\mathcal{H}}_{g+1,t}$. On a montré:

THÉORÈME 7.2.3. Pour tout g et $0 \leq t \leq g/2$, on a $\text{Pr}(\overline{\mathcal{S}}_{g+1,t}) \subset \text{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,t})$ avec égalité pour $t = 0$ et 1.

7.2.4. La famille \mathcal{S}_{g+1} . On rappelle (cf. 3, 3.1) que c'est le cas où la courbe C est lisse et admet une structure superelliptique $p: C \rightarrow E$ de ramification $\Delta_p = P_1 + \dots + P_{2g}$ sur E , et d'involution associée τ , mais où le morphisme $f = p\pi: \tilde{C} \rightarrow E$ est de groupe de Galois D_4 . On choisit un $g^1_2, \phi: E \rightarrow \mathbb{P}^1$ sur E , de ramification $\Delta_\phi = R_1 + \dots + R_4$ sur \mathbb{P}^1 , et d'involution associée ι . On a donc un $g^1_4 h = \phi p: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ sur C , qu'on suppose de groupe de Galois D_4 (par exemple $\iota(\Delta_p) \neq \Delta_p$) et auquel on applique la construction tétragonale.

Soit $P \in \mathbb{P}^1$. On écrit sa fibre sous $\pi: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C & \xrightarrow{p} & E & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^1 \\ \\ \left. \begin{array}{l} x, \sigma x \longmapsto a \\ y, \sigma y \longmapsto \tau a \end{array} \right\} & & & & \longmapsto e & & \\ \\ \left. \begin{array}{l} \bar{x}, \sigma \bar{x} \longmapsto b \\ \bar{y}, \sigma \bar{y} \longmapsto \tau b \end{array} \right\} & & & & \longmapsto \iota e & & \\ & & & & & & \longmapsto P \end{array}$$

Avec les notations précédentes, les fibres de \tilde{C}_1 et de \tilde{C}_2 au-dessus de P sont respectivement:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{C}_1)_P &= \{x + \bar{x} + y + \bar{y}, \sigma x + \sigma \bar{x} + y + \bar{y}, \\
 &\quad \sigma x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y}, \sigma x + \bar{x} + y + \sigma \bar{y} \text{ et images par } \sigma \} \\
 (\tilde{C}_2)_P &= \{\sigma x + \bar{x} + y + \bar{y}, x + \sigma \bar{x} + y + \bar{y}, \\
 &\quad x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y}, x + \bar{x} + y + \sigma \bar{y} \text{ et images par } \sigma \}.
 \end{aligned}$$

On peut montrer par un calcul d'action de groupes que \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 sont irréductibles. On remarque aussi que τ induit une involution sur C_1 (et sur C_2), qui envoie $[z + t + u + v] \in C_1$ où $f(z) = f(u)$, sur $[\sigma z + t + \sigma u + v]$ (encore une fois, ceci peut être prouvé rigoureusement par un calcul d'action de groupes que nous ne ferons pas). Par exemple, $[x + \bar{x} + y + \bar{y}]$ est envoyé sur $[\sigma x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y}] = [x + \sigma \bar{x} + y + \sigma \bar{y}]$. On note $D_j = C_j/\tau$ et on a:

$$\begin{aligned}
 (D_1)_P &= \{[x + \bar{x} + y + \bar{y}] = [\sigma x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y}] = \text{images par } \sigma, \\
 &\quad [\sigma x + \sigma \bar{x} + y + \bar{y}] = [\sigma x + \bar{x} + y + \sigma \bar{y}] = \text{images par } \sigma \} \\
 (D_2)_P &= \{[\sigma x + \bar{x} + y + \bar{y}] = [x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y}] = \text{images par } \sigma, \\
 &\quad [x + \sigma \bar{x} + y + \bar{y}] = [x + \bar{x} + y + \sigma \bar{y}] = \text{images par } \sigma \}.
 \end{aligned}$$

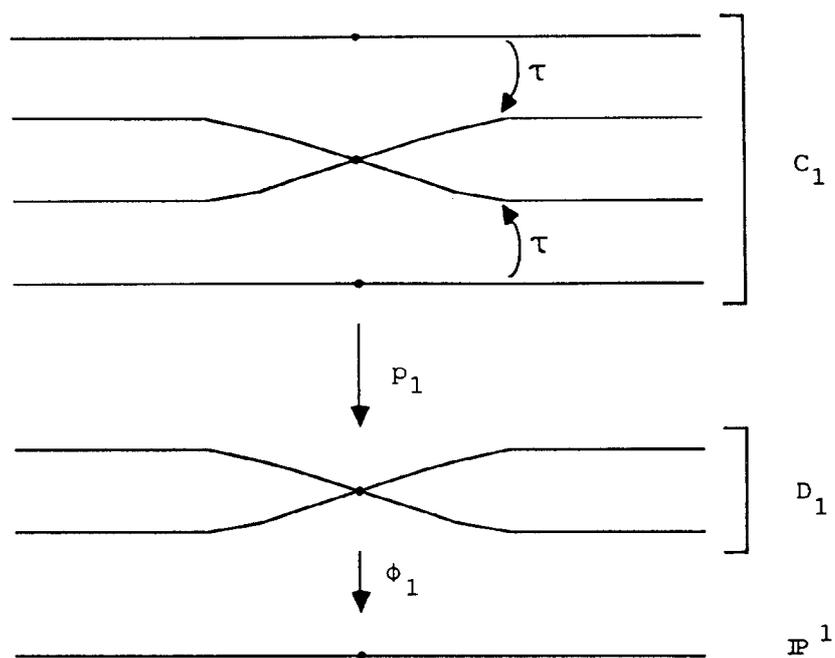
On a donc des morphismes:

$$\tilde{C}_j \xrightarrow{\pi_j} C_j \xrightarrow{p_j} D_j \xrightarrow{\phi_j} \mathbb{P}^1 \quad \text{pour } j = 1, 2.$$

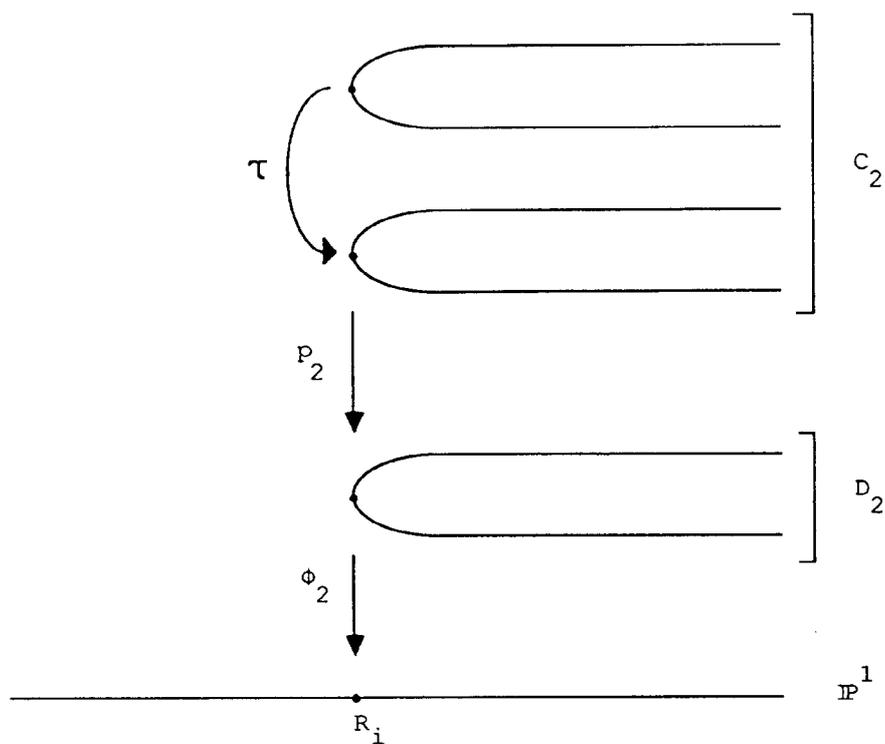
On remarque qu'au-dessus de R_i , $i = 1, \dots, 4$, il n'y a qu'un seul point sur D_1 et sur D_2 . Donc soit ϕ_j est ramifié en ce point, soit D_j y est singulière. Que se passe-t-il sur C_j au-dessus d'un R_i ? On a alors $x + y = \bar{x} + \bar{y}$ et

- soit $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ et $(C_1)_{R_i} = \{[2x + 2y], [2\sigma x + 2y], [x + \sigma x + y + \sigma y]\}$.

Par le critère de Welters ([We 3], [Be 3], Proposition 3), C_1 est lisse en les deux premiers de ces points mais pas en le troisième. La courbe D_1 est singulière au-dessus de R_i et la figure locale est la suivante (l'involution τ n'est pas birégulière):



On a $(C_2)_{R_i} = \{[x + \sigma x + 2y], [2x + y + \sigma y]\}$ et C_2 est lisse en ces points par le critère de Welters. La courbe D_2 est lisse au-dessus de R_i et ϕ_2 est ramifié en R_i . La figure locale est la suivante:



• soit $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$ et la situation est inversée.

On en déduit que $\Delta_\phi = R_1 + \dots + R_4$ est réunion disjointe de la ramification de ϕ_1 et de celle de ϕ_2 . Comme les D_j sont irréductibles, on en déduit qu'elles sont toutes deux obtenues à partir de \mathbb{P}^1 en identifiant deux paires de points. Les courbes C_j sont donc obtenues en identifiant deux paires de points sur des courbes hyperelliptiques NC_j . On est donc dans $\bar{\mathcal{H}}_{g+1,0}$. Enfin, la ramification Δ_j de $NC_j \xrightarrow{p_j} ND_j \simeq \mathbb{P}^1$ satisfait à $\phi_j(\Delta_j) = \phi(\Delta_p)$ donc on voit qu'on obtient ainsi tous les revêtements de $\bar{\mathcal{H}}_{g+1,0}$. On a donc $\text{Pr}(\bar{\mathcal{F}}_{g+1}) = \text{Pr}(\bar{\mathcal{H}}_{g+1,0})$.

8. Le mot de la fin. En dimension $g \geq 6$, on sait maintenant que $\bar{\mathcal{J}}_g$, $\mathcal{E}_{g,0}$, $\mathcal{E}_{g,1}$ et les $\mathcal{A}_{t,g-t}^2$ pour $2 \leq t \leq g/2$ sont des composantes irréductibles de \mathcal{N}_{g-4}^g ([A-M], 5.4.5, 5.6.1, 12.5).

PROPOSITION 8.1. *Pour $g \geq 6$, ces composantes sont distinctes deux à deux.*

Démonstration. Le fermé $\bar{\mathcal{J}}_g$ est distinct de $\mathcal{E}_{g,1}$ et $\mathcal{A}_{t,g-t}^2$ car une jacobienne générique est simple, et de $\mathcal{E}_{g,0}$ car $3g - 3 \neq 2g$. La seule coïncidence de dimension qui reste est $\dim \mathcal{E}_{6,0} = \dim \mathcal{A}_{3,3}^2 = 12$. Pour un élément générique de $\mathcal{E}_{6,0}$, l'intersection des cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta est une courbe elliptique de degré 6 dans \mathbb{P}^5 (cf. 5.3.1(1)). Pour un élément générique de $\mathcal{A}_{3,3}^2$, c'est une union disjointe de deux 2-plans projectifs (cf. 12.4). Ils sont donc non isomorphes. ■

PROPOSITION 8.2. *L'espace \mathcal{N}_1^5 a cinq composantes irréductibles de dimensions respectives 12, 10, 9, 9 et 11, à savoir $\bar{\mathcal{J}}_5$; $\mathcal{E}_{5,0}$; $\mathcal{E}_{5,1}$; $\mathcal{A}_{2,3}^2$ et $\mathcal{A}_{1,4}$ (cf. définition ci-dessous).*

Démonstration. Comme l'application $\text{Pr}: \mathcal{R}_6 \rightarrow \mathcal{A}_5$ est surjective ([Be 1]), il ressort de la liste de Beauville (3), du commentaire qui la précède, et de 6.1, 6.2, 7.2.3 et 7.2.4, que $\mathcal{N}_1^5 = \bar{\mathcal{J}}_5 \cup \mathcal{E}_{5,0} \cup \mathcal{E}_{5,1} \cup \mathcal{A}_{2,3}^2 \cup \mathcal{A}_{1,4} \cup \mathcal{A}_{2,3}$; où $\mathcal{A}_{t,g-t} \subset \mathcal{A}_g$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes produit de deux variétés abéliennes de dimensions respectives t et $g - t$. Les dimensions respectives sont 12, 10, 9, 9, 11 et 9 (5.4.2, 9.3). On remarque tout de suite que $\mathcal{A}_{2,3} \subset \bar{\mathcal{J}}_5$. Tous ces ensembles sont irréductibles et $\bar{\mathcal{J}}_5$, $\mathcal{E}_{5,0}$ et $\mathcal{A}_{2,3}^2$ sont des composantes de \mathcal{N}_1^5 ([A-M], 5.4.5 et 12.5). Comme $\mathcal{A}_{1,4}$ n'est pas inclus dans $\bar{\mathcal{J}}_5$, c'est aussi une composante de \mathcal{N}_1^5 . Il reste à vérifier que $\mathcal{E}_{5,1}$ n'est pas inclus dans $\bar{\mathcal{J}}_5 \cup \mathcal{E}_{5,0} \cup \mathcal{A}_{2,3}^2 \cup \mathcal{A}_{1,4}$. C'est évident pour $\mathcal{A}_{1,4}$, puisque $\mathcal{E}_{5,1} \not\subset \mathcal{N}_5^3 \supset \mathcal{A}_{1,4}$.

Si un élément générique (P, Ξ) de $\mathcal{E}_{5,1}$ est la jacobienne d'une courbe C de genre 5, C est lisse non hyperelliptique puisque $\dim \text{Sing } \Xi = 1$ (5.2.4). On sait que l'espace vectoriel engendré par les équations des cônes tangents aux points doubles de Ξ est de dimension $\binom{5+1}{2} - (3.5-3)$ d'une part car $P \simeq JC$ (cf. [Gr]), $\binom{5+1}{2} - (3.5-2)$ d'autre part par 5.3.1(2). Contradiction.

Si c'est un élément de $\mathcal{A}_{2,3}^2$, il est aussi générique dans $\mathcal{A}_{2,3}^2$, qui a même dimension que $\mathcal{E}_{5,1}$. L'intersection des cônes tangents aux points doubles de Ξ devrait être à la fois un cône sur une courbe elliptique de \mathbb{P}^3 (5.3.1) et une union disjointe $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^2$ (12.4).

Si c'est un élément de $\mathcal{E}_{5,0}$, c'est la variété de Prym d'un revêtement admissible $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ de $\mathcal{S}_{6,0}$. Comme $\text{Sing } \Xi$ est irréductible, on n'est pas dans le cas exceptionnel 5.2.9. Si la courbe C était lisse, on pourrait donc appliquer 5.3.1 et aboutir à une contradiction. Vue la dimension de $\mathcal{E}_{5,1}$, la courbe C , munie de son involution τ est l'une des courbes suivantes:

(1) $C = H/x \sim y$, $\tau x \sim \tau y$ où H est hyperelliptique de genre 4, d'involution hyperelliptique τ . La variété P est isogène à $R = \text{Ker}(J\tilde{H} \xrightarrow{\text{Nm}} JH)$ ([Be 1], Remark 3.6), où \tilde{H} est la normalisée de \tilde{C} . Pour la même raison, la variété de Prym \bar{P} du revêtement admissible de $\bar{C} = H/x \sim \tau x$, $y \sim \tau y$ induit est isogène à R . Mais \bar{C} est hyperelliptique, donc ([Be 1], Theorem 4.10) \bar{P} est une jacobienne hyperelliptique. Mais c'est impossible puisque $P \in \mathcal{E}_{5,1}$ n'est pas simple et qu'une jacobienne hyperelliptique générique est simple.

(2) $C = N/x \sim \tau x$ où N est superelliptique lisse de genre 5, d'involution τ . Le revêtement $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ ne peut être le revêtement de Wirtinger puisqu'on aurait alors $P \simeq JN$ et que les jacobienes superelliptiques de genre 5 forment une famille de dimension 8, et $\dim \mathcal{E}_{5,1} = 9$. Donc \tilde{C} est irréductible, de normalisée \tilde{N} et $\tilde{N} \rightarrow N$ est ramifié en x et τx . La courbe \tilde{C} a un point double 0 qui est fixe par σ . Comme $p_a(\tilde{C}/\sigma') = 1$ (on est dans $\mathcal{S}_{6,0}$) et qu'il existe un morphisme de $\tilde{C}/\sigma' = C'$ sur une courbe elliptique lisse, C' est lisse et $p': C' \rightarrow E$ est étale. Ceci contredit le fait que $\pi'(0)$ est fixe par τ' . Donc ce revêtement n'est pas dans $\mathcal{S}_{6,0}$. ■

Deuxième partie: Construction de composantes irréductibles de \mathcal{N}_k^g

9. Définition du sous-ensemble $\mathcal{A}_{g',g''}^\delta$ de $\mathcal{A}_{g'+g''}$. Cette seconde partie est consacrée à l'étude systématique d'une situation qu'on a rencontrée plusieurs fois: en 5.5.1, 6.1 et 6.2, on a étudié des variétés abéliennes principalement polarisées isogènes à un produit de deux variétés abéliennes polarisées de degré 2.

On s'intéresse ici aux variétés abéliennes principalement polarisées isogènes à un produit de deux variétés abéliennes polarisées de même type. Comme le montre la proposition suivante, toutes les variétés abéliennes principalement polarisées *non simples* rentrent dans ce cadre.

On adopte les notations et les résultats de [Mu 5], rappelés en partie en 1. La démonstration de la proposition ci-dessous est reportée à la fin de cette section.

PROPOSITION 9.1. *Soient (A, L) une variété abélienne principalement polarisée et $j': B' \hookrightarrow A$ une sous-variété abélienne. Il existe alors une unique sous-variété abélienne $j'': B'' \hookrightarrow A$ vérifiant:*

(i) *Le morphisme $f: B' \times B'' \xrightarrow{(j'+j'')} A$ est une isogénie.*

(ii) *La polarisation f^*L est la polarisation produit $M' \boxtimes M''$, où $M' = j'^*L$, $M'' = j''^*L$.*

Les propriétés suivantes sont alors satisfaites:

(iii) *Il existe un isomorphisme $\psi: H(M') \rightarrow H(M'')$ vérifiant*

(a) $\text{Ker } f = \{(x, \psi x) | x \in H(M')\}$;

(b) ψ est antisymplectique:

$$\forall x, y \in H(M') \quad e^{M'}(x, y)e^{M''}(\psi x, \psi y) = 1.$$

(iv) Il existe une base $\{s'_1, \dots, s'_d\}$ de $H^0(B', M')$ et une base $\{s''_1, \dots, s''_d\}$ de $H^0(B'', M'')$ telles que l'élément $\sum_{i=1}^d s'_i \otimes s''_i$ de $H^0(B' \times B'', f^*L)$ engendre $f^*H^0(A, L)$.

(9.2) Réciproquement, si (B', M') et (B'', M'') sont deux variétés abéliennes polarisées de même type, et $\psi: H(M') \rightarrow H(M'')$ un isomorphisme antisymplectique, on pose $K = \{(x, \psi x) | x \in H(M')\}$. La variété abélienne $A = B' \times B''/K$ est alors principalement polarisée et le morphisme canonique $f: B' \times B'' \rightarrow A$ vérifie (i) et (ii). Comme l'espace des modules des variétés abéliennes polarisées (B, M) de dimension fixée et de type δ fixé, munies d'un isomorphisme symplectique $H(M) \xrightarrow{\sim} H(\delta)$, est irréductible, les variétés (A, L) ainsi construites à partir de variétés B' et B'' de dimensions fixées et de même type δ fixé, forment une sous-variété irréductible de \mathcal{A}_g .

Définition 9.3. On notera $\mathcal{A}_{g', g-g'}^\delta$ le fermé irréductible de codimension $g'(g - g')$ de \mathcal{A}_g , formé des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g , contenant une sous-variété abélienne de dimension g' , de polarisation induite de type δ .

Il résulte de 9.1 et 9.2 qu'on a $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta = \mathcal{A}_{g'', g'}^\delta$. On supposera donc toujours $1 \leq g' \leq g/2$.

(9.4) Si F' (resp. F'') est la partie fixe de M' (resp. M''), il résulte de 9.1(iv) qu'on a:

$$(9.5) \quad f(F' \times F'') \subset \text{Sing } \Theta$$

où Θ est le diviseur thêta de A .

En particulier, si $g - g' \geq g' \geq d = \text{deg } \delta$, on a:

$$\mathcal{A}_{g', g-g'}^\delta \subset \mathcal{N}_{g-2d}^g.$$

Le reste de cette seconde partie sera consacré à l'étude des $\mathcal{A}_{g', g-g'}^\delta$. Pour certains types δ , on montrera que l'inclusion (9.5) est une égalité pour B' et B'' génériques, et que $\mathcal{A}_{g', g-g'}^\delta$ est une composante irréductible de $\mathcal{N}_{g-2 \text{deg } \delta}^g$ pour $g - g' > g' \geq \text{deg } \delta$.

Démonstration de la proposition 9.1 et de 9.2. Puisque j' est injective, le noyau de l'application duale $\hat{j}': \hat{A} \rightarrow \hat{B}'$ est connexe. On note B'' son image inverse par $\phi_L: A \xrightarrow{\sim} \hat{A}$ et j'' l'injection $B'' \hookrightarrow A$. La matrice de la polarisation f^*L induite sur $B' \times B''$ est:

$$\begin{pmatrix} \hat{j}'\phi_L j' & \hat{j}'\phi_L j'' \\ \hat{j}''\phi_L j' & \hat{j}''\phi_L j'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{M'} & 0 \\ 0 & \phi_{M''} \end{pmatrix}$$

puisque, par construction, $\hat{j}'\phi_L j''$ et son dual $\hat{j}''\phi_L j'$ sont nuls. Ceci prouve (i) et (ii). L'unicité est évidente. De plus, il existe un sous-groupe K de $H(M')$ et une injection $\psi: K \hookrightarrow H(M'')$ tels que $\text{Ker } f = \{(x, \psi x) | x \in K\}$. Comme L est une polarisation principale, on a ([Mu 5], page 295):

$$(\text{Card } K)^2 = (\text{Card } \text{Ker } f)^2 = \text{Card } H(f^*L) = \text{Card } H(M') \cdot \text{Card } H(M'').$$

Il s'ensuit que ψ est un isomorphisme de $H(M')$ sur $H(M'')$. De plus, ([Mu 5], page 291), $\text{Ker } f$ est isotrope pour la forme symplectique e^{f^*L} , ce qui prouve (iii).

Vu la définition de e^{f^*L} , il revient au même de dire que ψ se relève en un isomorphisme $\tilde{\psi}: \mathcal{G}(M') \rightarrow \mathcal{G}(M'')$ qui est l'inverse de l'identité sur \mathbb{C}^* . Soient \tilde{G} et \tilde{K}' deux sous-groupes de niveau maximaux de $\mathcal{G}(M')$ tels que $\tilde{G} \cap \tilde{K}' = \{1\}$. Soit s' (resp. s'') un générateur du sous-espace de $H^0(B', M')$ (resp. $H^0(B'', M'')$) invariant par \tilde{K}' (resp. $\tilde{\psi}(\tilde{K}')$). Comme $\mathcal{G}(M')$ opère transitivement sur $H^0(B', M')$, $\{\tilde{g} \cdot s' | \tilde{g} \in \tilde{G}\}$ est une base de $H^0(B', M')$. De même, $\{\tilde{\psi}\tilde{g} \cdot s'' | \tilde{g} \in \tilde{G}\}$ est une base de $H^0(B'', M'')$. Tout élément de $H^0(B' \times B'', f^*L)$ invariant sous l'action du sous-groupe de niveau maximal $\{(\tilde{x}, \tilde{\psi}\tilde{x}) | \tilde{x} \in \mathcal{G}(M')\}$ de $\mathcal{G}(f^*L) \simeq \mathcal{G}(M') \times \mathcal{G}(M'') / \{(\lambda, \lambda^{-1}) | \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ engendre $f^*H^0(A, L)$. Il est facile de vérifier que

$$(9.6) \quad s = \sum_{\tilde{g} \in \tilde{G}} (\tilde{g} \cdot s') \otimes (\tilde{\psi}\tilde{g} \cdot s'')$$

convient.

Réciproquement, pour montrer 9.2, il suffit de remarquer que les hypothèses entraînent que $K \subset H(M' \boxtimes M'')$ est totalement isotrope maximal. ■

10. Les ensembles $\mathcal{T}_{g,\delta}$ et $\mathcal{U}_{g,\delta}$. On introduit les sous-variétés fermées suivantes de $\mathcal{A}_{g,\delta}$:

$$\mathcal{T}_{g,\delta} = \{(B, M) \in \mathcal{A}_{g,\delta} | \text{un des éléments de } |M| \text{ a un point de multiplicité } > 2\}.$$

$$\mathcal{U}_{g,\delta} = \{(B, M) \in \mathcal{A}_{g,\delta} \text{ qui ne vérifie pas la propriété (P) ci-dessous}\}$$

(P) Le lieu fixe F de $|M|$ est lisse de dimension $g\text{-deg } \delta$ si cet entier est ≥ 0 , vide sinon. De façon équivalente, si $\{s_1, \dots, s_d\}$ ($d = \text{deg } \delta$) est une base de $H^0(B, M)$, on a:

$$\forall z \in F \quad \text{Rang} \left(\frac{\partial s_i}{\partial z_j}(z) \right)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq g}} = d.$$

Par exemple, pour la polarisation principale $\delta = (1)$, on a:

$$\mathcal{T}_{g,(1)} \not\subset \mathcal{U}_{g,(1)} = \mathcal{N}_0^g \not\subset \mathcal{A}_g.$$

PROPOSITION 10.1. $(\mathcal{U}_{g,\delta} = \mathcal{A}_{g,\delta}) \Rightarrow (\mathcal{T}_{g,\delta} = \mathcal{A}_{g,\delta})$.

Démonstration. On pose $\theta_r(z, \tau) = \theta \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} (z, \tau)$ (cf. 1) pour $z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in \mathcal{H}_g$, $r \in \Delta_\delta^{-1} \mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g = \Gamma_\delta$. Les $\{\theta_r(z, \tau)\}_{r \in \Gamma_\delta}$ forment une base de $H^0(B, M)$, où $(B, M) \in \mathcal{A}_{g,\delta}$ correspond à τ (1.5). Si $\mathcal{U}_{g,\delta} = \mathcal{A}_{g,\delta}$, la méthode employée dans [A-M] (principalement Lemme 8, page 203) montre qu'il existe

- (a) un ouvert U de \mathcal{H}_g ;
- (b) deux morphismes $\lambda: U \rightarrow \mathbb{C}^d - \{0\}$ et $s: U \rightarrow \mathbb{C}^g$, tels que

$$(10.2) \quad \begin{cases} \forall r \in \Gamma_\delta & \theta_r(s(\tau), \tau) = 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, g\} & \sum_r \lambda_r(\tau) \frac{\partial \theta_r}{\partial z_i}(s(\tau), \tau) = 0, \text{ pour } \tau \in U. \end{cases}$$

Si on dérive l'égalité $\sum_r \lambda_r(\tau) \theta_r(s(\tau), \tau) = 0$ pour $\tau \in U$ par rapport à τ_{ij} , on trouve, en utilisant (10.2) et les équations de la chaleur pour les θ_r , ([A-M], page 202):

$$\forall \tau \in U \forall i, j \in \{1, \dots, g\} \quad \sum_r \lambda_r(\tau) \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial z_i \partial z_j}(s(\tau), \tau) = 0,$$

ce qui, avec (10.2) implique $\mathcal{T}_{g,\delta} \supset U$. ■

Remarque 10.3. On s'est uniquement servi du fait que les θ_r vérifient les équations de la chaleur. En particulier, si on se fixe des constantes α_r^i pour $r \in \Gamma_\delta$ et $1 \leq i \leq n$ avec $\text{Rang}(\alpha_r^i) = n$ et si $\mathcal{T}_{g,\delta} \neq \mathcal{A}_{g,\delta}$, alors, pour B générique dans $\mathcal{A}_{g,\delta}$, on a:

$$\bigcap_{i=1}^n \text{div} \left(\sum_r \alpha_r^i \theta_r(\cdot, \tau) \right)$$

est lisse de dimension $g - n$ si $n \leq g$, vide sinon.

THÉORÈME 10.4. On a $\mathcal{T}_{g,\delta} \neq \mathcal{A}_{g,\delta}$ dans les cas suivants:

- (i) $\delta = (2)$, $g \geq 1$.
- (ii) $\delta = (3)$, $g \geq 2$.
- (iii) $\delta = (2, 2)$, $g = 2$ ou $g \geq 4$.

Démonstration. On fait une démonstration par récurrence, en utilisant une construction analogue à la construction 9.2 de $\mathcal{A}_{g',g''}^\delta$. On prend les notations de la démonstration de 9.1 et on pose $M = M' \boxtimes M''$, polarisation sur $B = B' \times B''$. Le sous-groupe $\{(\tilde{x}, \tilde{\psi}\tilde{x}) | \tilde{x} \in \tilde{K}'\}$ de $\mathcal{G}(M)$ est de niveau, de cardinal $\text{deg } \delta$. On note H son image dans $H(M)$. Il existe une variété abélienne polarisée (C, N) de type δ et une isogénie $\pi: (B, M) \rightarrow (C, N)$ de noyau H . Une base de

$\pi^*H^0(C, N) \subset H^0(B, M)$ est $\{s_h = s'_h s''_h | h \in \tilde{G}\}$, où on a posé $s'_h s''_h = (h \cdot s') \otimes (\tilde{\psi}h \cdot s'')$.

LEMME 10.5. Si $(B'', M'') \notin \mathcal{F}_{g'', \delta}$ et si $\text{div } s''_1$ est lisse, alors $(C, N) \notin \mathcal{F}_{g'+g'', \delta}$ dans chacun des cas suivants:

- (i) $\delta = (d)$ et $g' = 1$.
- (ii) $\delta = (2, 2)$ et (B', M') générique dans $\mathcal{A}_{2, (2, 2)}$.

Démonstration. (1) $g' = 1$. On suppose que le diviseur de $s = \sum_{h \in G} \lambda_h s_h \in H^0(C, N)$ a un point (x', x'') de multiplicité > 2 . On a en particulier:

$$\begin{cases} \sum_h \lambda_h s'_h(x') s''_h(x'') = 0 \\ \sum_h \lambda_h s'_h(x') \frac{\partial s''_h}{\partial x''_i}(x'') = 0 \\ \sum_h \lambda_h s'_h(x') \frac{\partial^2 s''_h}{\partial x''_i \partial x''_j}(x'') = 0. \end{cases}$$

Comme (B'', M'') n'est pas dans $\mathcal{F}_{g'', \delta}$, on a:

$$\forall h \in \tilde{G} \quad \lambda_h s'_h(x') = 0.$$

Puisque $g' = 1$, les diviseurs des s'_h sont disjoints deux à deux. Par conséquent, au plus un des λ_h est non nul et $\text{div } s = (B' \times \text{div } s''_h) \cup (\text{div } s'_h \times B'')$ n'a pas de points de multiplicité > 2 puisque $\text{div } s''_h$, translaté de $\text{div } s''_1$, est lisse.

(2) $g' = 2$, $\delta = (2, 2)$. On a encore $\lambda_h s'_h(x') = 0$ pour tout h . En utilisant l'équation de la surface de Kummer (c'est-à-dire l'image de B' par le morphisme associé à $|M'|$) donnée dans [Mu 5], page 354, on remarque que si 3 des sections s'_h sont nulles en un point, cette équation est du type $Bxyzw + C(x^2y^2 + z^2w^2) + D(x^2w^2 + y^2z^2) + E(x^2z^2 + y^2w^2) = 0$, qui n'est pas une surface de Kummer générique (cf. fin de la démonstration du théorème 10.4). D'autre part, si 3 des λ_h sont nuls, on peut conclure comme ci-dessus (cas $g' = 1$). On supposera donc:

$$\tilde{G} = \{1, 2, 3, 4\} \quad s'_1(x') = s'_2(x') = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0.$$

Pour B' générique, le lieu $(\text{div } s'_1 \cap \text{div } s'_2)$ est lisse (il suffit de vérifier que pour (A, Θ) générique dans \mathcal{A}_2 et tout $a \in A[2]$, $\Theta \cdot \Theta_a$ est lisse). Or on a, pour $1 \leq j \leq 2$ et $1 \leq k \leq g''$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial s'_1}{\partial x'_j}(x') s''_1(x'') + \lambda_2 \frac{\partial s'_2}{\partial x'_j}(x') s''_2(x'') = 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial s'_1}{\partial x'_j}(x') \frac{\partial s''_1}{\partial x''_k}(x'') + \lambda_2 \frac{\partial s'_2}{\partial x'_j}(x') \frac{\partial s''_2}{\partial x''_k}(x'') = 0. \end{cases}$$

Comme $\text{Rang}(\partial s'_i / \partial x'_j(x')) = 2$, on en déduit $x'' \in \text{Sing}(\text{div } s''_1)$, ce qui contredit l'hypothèse. ■

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de traiter les cas:

(1) $\delta = (2)$, $g = 1$. Evident.

(2) $\delta = (3)$, $g = 2$. On reprend les notations du lemme ci-dessus avec $g' = g'' = 1$. D'après [Mu 5], page 350, l'image de B'' par le morphisme $x'' \mapsto (s''_0(x''), s''_1(x''), s''_2(x''))$ a pour équation:

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\mu''XYZ, \quad \mu'' \notin \{1 = \omega^3, \omega, \omega^2, \infty\}.$$

Si (x', x'') est de multiplicité > 2 sur $\text{div } s$, x'' est de multiplicité > 2 sur $\text{div}(\sum_{i=0}^2 \lambda_i s'_i(x') s''_i)$. C'est donc un point d'inflexion de la cubique. Or on a:

$$\{\text{Points d'inflexions}\} = \{(0, 1, -1); (0, 1, -\omega); (0, 1, -\omega^2) \text{ et permutations}\}$$

$$\{\text{Tangentes}\} = \{\mu''X + Y + Z, \mu''\omega X + Y + \omega^2Z, \\ \mu''\omega^2X + Y + \omega Z \text{ et permutations}\}.$$

On en déduit:

$$(10.6) \quad (\lambda_0 s'_0(x'), \lambda_1 s'_1(x'), \lambda_2 s'_2(x')) \in \{(0, 0, 0); (\mu'', 1, 1); (\mu''\omega, 1, \omega^2); \\ (\mu''\omega^2, 1, \omega) \text{ et permutations}\}$$

$$(10.7) \quad (s''_0(x''), s''_1(x''), s''_2(x'')) \text{ et par symétrie, } (s'_0(x'), s'_1(x'), s'_2(x')) \\ \text{sont dans } \{(0, 1, -1); (0, 1, -\omega); (0, 1, -\omega^2) \text{ et permutations}\}.$$

Par (10.7), exactement un des $s'_i(x')$ est nul. On peut supposer $\mu'' \neq 0$. Par (10.6), deux des λ_j sont nuls, ce qui termine la démonstration.

(3) $\delta = (2, 2)$, $g = 2$. Il suffit de montrer qu'il existe une surface de Kummer dans \mathbb{P}^3 dont toute section hyperplane n'a que des points de multiplicité au plus deux. La quartique S_ε d'équation:

$$F_\varepsilon = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2(2 + \varepsilon)x_0x_1x_2x_3 + \varepsilon(x_0^2x_1^2 + x_2^2x_3^2)$$

est une surface de Kummer pour $\varepsilon \notin \{0, 2, -2\}$. Si une section hyperplane a un point de multiplicité > 2 , il existe un point de S_ε en lequel la forme quadratique $\sum \partial^2 F_\varepsilon / \partial x_i \partial x_j X_i X_j$ est de rang ≤ 2 . On vérifie que c'est impossible pour $\varepsilon = 0$ donc aussi pour ε voisin.

(4) $\delta = (2, 2)$, $g = 5$. On reprend les notations du lemme ci-dessus avec $g' = 2$ et $g'' = 3$. On supposera que:

(i) $(B', M') \notin \mathcal{T}_{2,(2,2)} \cup \mathcal{U}_{2,(2,2)}$ (c'est possible d'après le cas 3) qu'on vient de traiter et 10.1).

(ii) $\text{div } s_1''$ et $\text{div } s_1'' \cdot \text{div } s_2''$ lisses (c'est possible puisqu'on a $\mathcal{T}_{3,(2)} \neq \mathcal{A}_{3,(2)} \Rightarrow \mathcal{U}_{3,(2)} \neq \mathcal{A}_{3,(2)}$).

(iii) $\text{div } s_1'' \cdot \text{div } s_2'' \cdot \text{div } s_3''$ et $F'' = \bigcap \text{div } s_h''$ lisses de dimension 0, de longueurs respectives 24 et 16.

Pour montrer ce dernier point, il suffit de montrer, d'après (10.10), que pour un élément générique (A, Θ) de \mathcal{A}_3 et $a, b \in A[2]$ non nuls distincts vérifiant $e_2(a, b) = 1$, on a:

(a) $\Theta \cdot \Theta_a \cdot \Theta_b$ est lisse de dimension 0. Il suffit pour cela de considérer un produit de 3 courbes elliptiques.

(b) $\Theta \cdot \Theta_a \cdot \Theta_b \cdot \Theta_{a+b}$ est lisse, égal à $\{\epsilon, \epsilon + a, \epsilon + b, \epsilon + a + b\}$ pour un ϵ d'ordre 2. On laisse la démonstration de ce fait au lecteur.

Remarquons que ce dernier fait entraîne que $\mathcal{U}_{3,(2,2)} = \mathcal{A}_{3,(2,2)}$. On a donc aussi, par 10.1: $\mathcal{T}_{3,(2,2)} = \mathcal{A}_{3,(2,2)}$.

On fait maintenant la construction du lemme 10.5. Si $(C, N) \in \mathcal{T}_{5,(2,2)}$, on déduit de (i) $\lambda_h s_h''(x'') = 0$ pour tout h .

Si $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\text{div } s = (B' \times \text{div } s_1'') \cup (\text{div } s_1' \times B'')$ n'a pas de point de multiplicité > 2 par (ii).

Si $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, on a $s_1''(x'') = s_2''(x'') = 0$.

L'hypothèse (ii) implique, comme à la fin de la démonstration de 10.5, que $s_1'(x') = s_2'(x') = \partial s_1' / \partial x_1'(x') = \partial s_2' / \partial x_1'(x') = 0$; ce qui contredit (i).

Si $\lambda_4 = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$, on a $s_1''(x'') = s_2''(x'') = s_3''(x'') = 0$.

On arrive de la même façon à une contradiction en utilisant l'hypothèse (iii).

Si $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \neq 0$, on a $s_h''(x'') = 0$ pour tout $h \in \{1, \dots, 4\}$.

Par (iii) on sait que $\text{Rg}[\partial s_h'' / \partial x_j''(x'')] = 3$. On en déduit que:

$$\text{Rg} \left[s_h'(x') \frac{\partial s_h'}{\partial x_1'}(x') \frac{\partial s_h'}{\partial x_2'}(x') \right]_{1 \leq h \leq 4} \leq 1.$$

Comme $\phi_{|M|}: B' \rightarrow \mathbb{P}^3$ est non-ramifié hors de $B'[2]$, on a $x' \in B'[2]$. Si on fait varier B' dans $\mathcal{A}_{2,(2,2)}$, on voit que $(s_1'(x'), \dots, s_4'(x')) \in \mathbb{P}^3$ décrit une sous-variété qui engendre \mathbb{P}^3 (considérer un produit de 2 courbes elliptiques) donc ne peut rester dans $\text{Ker}[\partial s_h'' / \partial x_j''(x'')]$ qui est de dimension 1.

Donc tous les λ_h sont nuls et $(C, N) \notin \mathcal{T}_{5,(2,2)}$. ■

Indiquons rapidement une extension des résultats du théorème 10.4. Pour $a \in \mathbb{C}^g - \mathbb{Z}^g$, en définit les fermés analytiques suivants de \mathcal{H}_g :

$$\mathcal{T}_{g,a} = \{ \tau \in \mathcal{H}_g \mid \exists x \in \mathbb{C}^g \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1 \text{ tels que } z \mapsto \lambda \theta(z, \tau) + \mu \theta(z - a, \tau) \text{ s'annule à l'ordre 2 en } x \}$$

$$\mathcal{U}_{g,a} = \{ \tau \in \mathcal{H}_g \mid \text{La propriété suivante n'est pas vérifiée: le lieu d'équations } \theta(z, \tau) = \theta(z - a, \tau) = 0 \text{ dans } \mathbb{C}^g \text{ est lisse de dimension } g - 2 \text{ pour } g \geq 2, \text{ vide pour } g = 1 \}.$$

Il est clair par exemple que si $2a \in \mathbb{Z}^g$, l'image de $\mathcal{F}_{g,a}$ (resp. $\mathcal{U}_{g,a}$) dans $\mathcal{A}_{g,(2)}$ est $\mathcal{F}_{g,(2)}$ (resp. $\mathcal{U}_{g,(2)}$). On montre comme en 10.1 que $(\mathcal{U}_{g,a} = \mathcal{H}_g) \Rightarrow (\mathcal{F}_{g,a} = \mathcal{H}_g)$. La même démonstration que celle utilisée pour le cas (1) ($g' = 1$) du lemme 10.5 permet de prouver que si $a' \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\tau' \in \mathcal{H}_1$, $a'' \in \mathbb{C}^{g''} - \mathbb{Z}^{g''}$, $\tau'' \notin \mathcal{F}_{g'',a''}$, $\text{Div } \theta(\cdot, \tau'')$ lisse, alors $\tau = \begin{pmatrix} \tau' & 0 \\ 0 & \tau'' \end{pmatrix} \notin \mathcal{F}_{g'+1,(a',a')}$. On en déduit:

PROPOSITION 10.8. *Soient $g \geq 1$ et a un élément de \mathbb{C}^g dont aucune composante n 'est entière. Alors on a $\mathcal{F}_{g,a} \neq \mathcal{H}_g$.*

Démonstration. Il reste à traiter le cas $g = 1$. Si la proposition était fausse, il existerait un ouvert U de \mathcal{H}_1 et deux morphismes $\lambda: U \rightarrow \mathbb{C}^*$, $s: U \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant, pour $\tau \in U$:

$$(10.9) \quad \begin{cases} \lambda(\tau)\theta(s(\tau), \tau) + \theta(s(\tau) - a, \tau) = 0 \\ \lambda(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial z}(s(\tau), \tau) + \frac{\partial \theta}{\partial z}(s(\tau) - a, \tau) = 0 \\ \lambda(\tau) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}(s(\tau), \tau) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}(s(\tau) - a, \tau) = 0. \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport à τ , on obtient, avec les deux autres et l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}(\tau)\theta(s(\tau), \tau) = 0.$$

Si $\theta(s(\tau), \tau) = 0$, on a aussi $\theta(s(\tau) - a, \tau) = 0$ par (10.9), ce qui est impossible en genre 1 si $a \notin \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, donc pour τ générique. On a donc $\lambda(\tau) = \lambda$, constante. On déduit alors du Lemme 9 de [A-M] que $\lambda\theta(z, \tau) + \theta(z - a, \tau)$ est identiquement nulle, ce qui est impossible. ■

(10.10) On peut traduire les résultats de 10.4 (joint à celui de 10.1) en termes d'intersections de translatés du diviseur thêta d'une variété abélienne principalement polarisée générique. Par exemple, si (B, M) est une variété abélienne polarisée de type $\delta = (d)$, il existe une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) , une isogénie $\pi: (B, M) \rightarrow (A, \Theta)$ avec $\pi^*\Theta \equiv M$, une base $\{s_1, \dots, s_d\}$ de $H^0(B, M)$ et un élément a de A d'ordre d , engendrant $\pi(H(M))$, tels que:

$$\text{div}(s_j) = \pi^*(\Theta_{ja}) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq d.$$

Le lieu fixe de $|M|$ est alors revêtement étale de l'intersection $(\Theta \cdot \Theta_a \cdot \dots \cdot \Theta_{(d-1)a})$.

Dans le cas $\delta = (2, 2)$, l'image $\pi(H(M))$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$, engendrée par $a = \pi(b)$ et $a' = \pi(b')$, avec $b, b' \in B[2]$. On a ([Mu 6], page 228):

$$e_2(a, a') = e^{L^{\otimes 2}}(a, a') = e^{M^{\otimes 2}}(b, b') = e^M(b, 2b') = 1.$$

Le lieu fixe de $|M|$ est alors revêtement étale de $\Theta \cdot \Theta_a \cdot \Theta_{a'} \cdot \Theta_{a+a'}$.
On en déduit:

COROLLAIRE 10.11. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g \geq 2$. On a:*

(i) *Si a est d'ordre 3, $\Theta \cdot \Theta_a \cdot \Theta_{2a}$ est vide pour $g = 2$, lisse de dimension $g - 3$ pour $g \geq 3$.*

(ii) *Si a et b sont distincts, d'ordre 2 avec $e_2(a, b) = 1$, $\Theta \cdot \Theta_a \cdot \Theta_b$ est vide pour $g = 2$, lisse de dimension $g - 3$ pour $g \geq 3$, et $\Theta \cdot \Theta_a \cdot \Theta_b \cdot \Theta_{a+b}$ est lisse de dimension $g - 4$ pour $g \geq 4$.*

De plus, ces schémas sont irréductibles lorsqu'ils sont de dimension strictement positive.

Démonstration. D'après ce qui précède, ces résultats sont une conséquence immédiate du théorème 10.4, de la proposition 10.1 et de la remarque 10.3. L'assertion d'irréductibilité est conséquence du résultat suivant ([F-L]): si L est un faisceau inversible ample sur une variété projective irréductible X , s_1, \dots, s_r des sections de L , alors le lieu $\bigcap_{i=1}^r \text{div}(s_i)$ est connexe pour $r < \dim X$. ■

De même, on déduit de la proposition 10.8 le théorème suivant:

THÉORÈME 10.12. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension ≥ 2 . Alors, pour tout a non nul de torsion dans A , $\Theta \cdot \Theta_a$ est lisse de codimension 2. En particulier, si Θ est symétrique, les seuls points de torsion sur Θ sont d'ordre 2.*

Démonstration. L'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) munies d'un élément non nul a d'ordre n fixé est irréductible et la propriété " $\Theta \cdot \Theta_a$ lisse de codimension 2" est ouverte. Il suffit donc, pour chaque $n \geq 2$, d'exhiber (A, Θ) et a d'ordre n avec $\Theta \cdot \Theta_a$ lisse de codimension 2. Or, par 10.8, pour $a_0 = (1/n, 1/n, \dots, 1/n) \in \mathbb{Q}^g$, on a $\mathcal{T}_{g, a_0} \neq \mathcal{H}_g$, soit $\mathcal{U}_{g, a_0} \neq \mathcal{H}_g$, de sorte qu'il existe $\tau_0 \in \mathcal{H}_g$ tel que le lieu $\theta(z, \tau_0) = \theta(z - a_0, \tau_0) = 0$ dans \mathbb{C}^g soit lisse de codimension 2. L'image a du point a_0 dans la variété abélienne principalement polarisée $A_0 = \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g \oplus \tau_0 \mathbb{Z}^g$ est d'ordre n et $\Theta \cdot \Theta_a$ est lisse de codimension 2. L'assertion d'irréductibilité découle comme ci-dessus de [F-L]. Enfin, la dernière affirmation provient du fait que si Θ est symétrique et si $x \in \Theta$, $\Theta \cdot \Theta_{2x}$ est singulier en x . ■

11. Le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$

PROPOSITION 11.1. *On suppose $\mathcal{T}_{g', \delta} \neq \mathcal{A}_{g', \delta}$ et $\mathcal{U}_{g'', \delta} \neq \mathcal{A}_{g'', \delta}$ (ou l'inverse) et $g'' > g'$. Alors le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ est*

(a) *vide si $g' < \deg \delta = d$;*

(b) *lisse de codimension $2d$ sinon, avec égalité dans (9.5). Les singularités de Θ sont toutes quadratiques de rang $2d$.*

Démonstration. Si on n'a pas égalité dans (9.5) pour tout élément de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$, il existe, comme dans la démonstration de (10.1)

- (a) un ouvert U' de $\mathcal{H}_{g'}$,
- (b) un ouvert U'' de $\mathcal{H}_{g''}$,
- (c) deux applications holomorphes,

$$s': U' \times U'' \rightarrow \mathbb{C}^{g'}, \quad s'': U' \times U'' \rightarrow \mathbb{C}^{g''},$$

tels que:

$$\forall \tau' \in U', \forall \tau'' \in U'', \forall i \in \{1, \dots, g'\}, \forall j \in \{1, \dots, g''\},$$

(11.2)

les $\theta'_r(s'(\tau', \tau''), \tau')$, $\theta''_r(s''(\tau', \tau''), \tau'')$ $r \in \Gamma_\delta$, ne sont pas tous nuls.

$$(11.3) \quad \sum_r \theta'_r(s'(\tau', \tau''), \tau') \theta''_{\psi_r}(s''(\tau', \tau''), \tau'') = 0$$

$$(11.4) \quad \sum_r \frac{\partial \theta'_r}{\partial z'_i}(s'(\tau', \tau''), \tau') \theta''_{\psi_r}(s''(\tau', \tau''), \tau'') = 0$$

$$(11.5) \quad \sum_r \theta'_r(s'(\tau', \tau''), \tau') \frac{\partial \theta''_{\psi_r}}{\partial z''_j}(s''(\tau', \tau''), \tau'') = 0.$$

Si on dérive (11.3) par rapport à τ'_{ij} , on trouve, en utilisant (11.4), (11.5) et les équations de la chaleur:

$$\forall i, j \quad \sum_r \frac{\partial^2 \theta'_r}{\partial z'_i \partial z'_j}(s'(\tau', \tau''), \tau') \theta''_{\psi_r}(s''(\tau', \tau''), \tau'') = 0.$$

Vu l'hypothèse $\mathcal{T}_{g', \delta} \neq \mathcal{A}_{g', \delta}$, on en déduit:

$$\forall r \in \Gamma_\delta \quad \forall \tau' \in U' \quad \forall \tau'' \in U'' \quad \theta''_r(s''(\tau', \tau''), \tau'') = 0.$$

De l'hypothèse $\mathcal{U}_{g'', \delta} \neq \mathcal{A}_{g'', \delta}$ et de (11.5), on déduit:

$$\forall r, \tau', \tau'' \quad \theta'_r(s'(\tau', \tau''), \tau') = 0,$$

ce qui contredit (11.2).

Pour un élément générique (A, Θ) de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$, on a donc égalité dans (9.5): $f(F' \times F'') = \text{Sing } \Theta$. Puisque $\mathcal{U}_{g', \delta} \neq \mathcal{A}_{g', \delta}$ (par 10.1) et $\mathcal{U}_{g'', \delta} \neq \mathcal{A}_{g'', \delta}$, $\text{Sing } \Theta$ est lisse de codimension $2d$ (ou vide si $g' < d$).

Si $g' \geq d$, la matrice des dérivées secondes en un point singulier est:

$$\begin{pmatrix} 0 & T = \left(\sum_r \frac{\partial \theta'_r}{\partial z'_1}(z') \cdot \frac{\partial \theta''_{\psi_r}}{\partial z''_j}(z'') \right)_{\substack{1 \leq i \leq g' \\ 1 \leq j \leq g''}} \\ {}^t T & 0 \end{pmatrix}$$

Si $B' \notin \mathcal{U}_{g', \delta}$, $B'' \notin \mathcal{U}_{g'', \delta}$, alors:

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial \theta'_r}{\partial z'_i}(z') \right)_{i,r} = \text{Rang} \left(\frac{\partial \theta''_{\psi_r}}{\partial z''_j}(z'') \right)_{j,r} = d \leq g' \leq g''.$$

Les singularités de Θ sont quadratiques de rang $2d$. ■

COROLLAIRE 11.6. Pour $\delta = (2), (3)$ ou $(2, 2)$, le lieu singulier du diviseur thêta d 'un élément générique de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ ($g'' \geq g'$) est

- (a) vide si $g' < \deg \delta = d$, sauf si $\delta = (2, 2)$ et $3 \in \{g', g''\}$;
- (b) composé de $(d!)^2$ points si $g' = g'' = d$;
- (c) lisse avec $(d-1)!$ composantes connexes de codimension $2d$ si $g'' > g' = d$;
- (d) lisse irréductible de codimension $2d$ si $g' > d$.

Démonstration. Il ne reste qu'à calculer le nombre de composantes connexes en gardant en mémoire la fin de l'énoncé de 10.11. On suppose $g' = d$. On a $(M')^{g'} = d \cdot (g')!$ (cf. 1.3). Le lieu fixe F' de M' est de cardinal $d \cdot d!$ et est stable par $H(M')$, qui est de cardinal d^2 (1.4). Le nombre de composantes est:

$$(d \cdot d!)^2 / d^2 \quad \text{si } g'' = d$$

$$d \cdot d! / d^2 \quad \text{si } g'' > d. \blacksquare$$

Remarque 11.7. Les singularités de Θ sont alors quadratiques de rang $2d$ et $\text{Sing } \Theta$ est invariant par un groupe de translations de cardinal d^2 , isomorphe à $H(\delta)$, à savoir $f(H(M') \times \{0\}) = f(\{0\} \times H(M''))$.

Il est intéressant de compter, pour un élément générique de chacune des familles ci-dessus, le nombre de points d'ordre 2 singuliers sur un diviseur thêta symétrique.

PROPOSITION 11.8. Pour $g'' \geq g' \geq \deg \delta$ et $\delta = (2), (3)$ ou $(2, 2)$, un diviseur thêta symétrique d 'un élément générique de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ contient

- (A) $2^{g'+g''-2}(2^{g'-1}-1)(2^{g''-1}-1)$ points d 'ordre 2 si $\delta = (2)$
- (b) aucun point d 'ordre 2 si $\delta = (3)$
- (c) $2^{g'+g''-2}(2^{g'-2}-1)(2^{g''-2}-1)$ points d 'ordre 2 si $\delta = (2, 2)$.

Démonstration. Soit $f: (B' \times B'', M' \boxtimes M'') \rightarrow (A, L)$ une isogénie faisant de (A, L) un élément de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$. On prend les notations de la section 9. Quitte à remplacer M' et M'' par des translatés, on peut supposer les diviseurs $\text{div}(s')$ et $\text{div}(s'')$ symétriques. L'unique élément Θ de $|L|$, d'équation (9.6), est alors symétrique.

Dans les cas où l'inclusion (9.5) est une égalité (par exemple pour un élément générique de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ avec $\delta = (2), (3)$ ou $(2, 2)$ et $g'' \geq g' \geq \text{deg } \delta$), un point d'ordre 2 de A singulier sur Θ peut s'écrire $f(x', x'')$ avec $x' \in F', x'' \in F'', 2x' \in H(M'), 2x'' \in H(M'')$ et $\psi(2x') = 2x''$.

Comme $\alpha' = 2x' \in H(M')$, il existe une isogénie f' de (B', M') sur une variété abélienne principalement polarisée (A', Θ') dont le noyau contient α' . On a par construction (comme en 10.10):

$$(11.9) \quad f'(x') \in \bigcap_{h' \in H(M')} \Theta'_{f'(h')},$$

ce qui entraîne (cf. [Mu 6], page 228), avec $L' = \mathcal{O}(\Theta')$:

$$\begin{aligned} \forall h' \in H(M') \quad 1 &= e^{L'^{\otimes 2}}(f'(x'), f'(h')) = e^{M'^{\otimes 2}}(x', h') \\ &= e^{M'}(2x', h'). \end{aligned}$$

La forme $e^{M'}$ étant non dégénérée; on en déduit que $\alpha' = 2x'$ est nul, donc aussi $2x'' = \psi(2x')$.

De plus, les éléments $f'(x' + h')$, de torsion sur A' , sont tous sur Θ' par (11.9). Par 10.12, ceci n'est possible, pour A' générique, que s'ils sont tous d'ordre 2. Ceci ne sera réalisé pour toute isogénie f' que si δ est un type $(2, 2, \dots, 2)$ (r fois). Ceci montre déjà le second point de la proposition. Pour le reste, il suffit de compter le nombre de points d'ordre 2 sur une intersection $\bigcap_{h' \in V} \Theta'_{h'}$, où V est un sous-espace de $A'[2]$ isotrope pour la forme e_2 , de dimension r .

Le résultat est conséquence de la théorie des formes quadratiques sur les espaces vectoriels sur \mathbb{F}_2 . C'est:

$$\begin{aligned} \text{Card } V \cdot \left(\begin{array}{l} \text{Nombre de 1 de la forme quadratique d'invariant} \\ \text{d'Arf 0 associée à } \Theta' \text{ sur } V^\perp/V \end{array} \right) \\ = 2^r \cdot 2^{g'-r-1}(2^{g'-r} - 1) = 2^{g'-1}(2^{g'-r} - 1). \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\text{Card}(F' \cap B'[2]) = \text{Card Ker } f' \cdot 2^{g'-1}(2^{g'-r} - 1)$$

puis:

$$\begin{aligned} \text{Card}(A[2] \cap \text{Sing } \Theta) &= \frac{1}{\text{Card Ker } f} \text{Card}(F' \cap B'[2]) \cdot \text{Card}(F'' \cap B''[2]) \\ &= \frac{1}{2^{2r}} 2^r 2^{g'-1} (2^{g'-r} - 1) 2^r 2^{g''-1} (2^{g''-r} - 1) \\ &= 2^{g'+g''-2} (2^{g'-r} - 1) (2^{g''-r} - 1). \blacksquare \end{aligned}$$

12. Application du théorème d'Andreotti et Mayer

THÉORÈME 12.1. *On suppose $g'' = g - g' \geq g' \geq 1$, $\mathcal{T}_{g', \delta} \neq \mathcal{A}_{g', \delta}$ et $\mathcal{U}_{g'', \delta} \neq \mathcal{A}_{g'', \delta}$ (cf. section 10) ou l'inverse. Alors, pour $g' \geq \text{deg } \delta$, $g'' > \text{deg } \delta$, $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$ est une composante irréductible de $\mathcal{N}_{g-2 \text{deg } \delta}^g$, de codimension $g'g''$ dans \mathcal{A}_g .*

Démonstration. On va appliquer le théorème 5.4.3 d'Andreotti et Mayer à un élément générique (A, Θ) de $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$. Par 11.1, $\text{Sing } \Theta$ est équidimensionnel de codimension $2d$, égal à $f(F' \times F'')$, où F' (resp. F'') est le lieu fixe de M' (resp. M''). De plus F'' est irréductible. On notera F'_0 une composante irréductible de F' : c'est un point si $g' = d$, égal à F' si $g' > d$. On a déjà remarqué, à la fin de la démonstration de 11.1, que l'application (5.4.4) est donnée par:

$$(12.2) \quad F'_0 \times F'' \rightarrow \mathbb{P}(T_0^\vee B' \otimes T_0^\vee B'') \subset \mathbb{P}S^2 T_0^\vee A$$

$$(z', z'') \mapsto \left(\sum_r \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z') \frac{\partial s''_r}{\partial z''_j}(z'') \right)_{\substack{1 \leq i \leq g' \\ 1 \leq j \leq g''}}$$

On rappelle que les $\partial s'_r / \partial z'_i$ (resp. $\partial s''_r / \partial z''_j$) sont des éléments de $H^0(F', M')$ (resp. $H^0(F'', M'')$) (cf. [Gr], page 92, et Lemme 12.3 ci-dessous).

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que (12.2) est non dégénérée, puis d'appliquer 5.4.3.

LEMME 12.3. *Soient (B, M) une variété abélienne polarisée de dimension g , $\{s_1, \dots, s_d\}$ une base de $H^0(B, M)$. On suppose que le schéma F partie fixe de $|M|$ est de dimension $g - d > 0$. Alors une base de $H^0(F, M)$ est*

$$\{ \partial s_r / \partial z_j \mid 1 \leq r \leq d, 1 \leq j \leq g \}.$$

Démonstration. Pour $1 \leq r \leq d$, on note D_r le schéma défini par l'annulation de s_1, \dots, s_r , et on pose $D_0 = B$. On montre facilement que $H^i(D_r, \mathcal{O}_{D_r}(dM)) = 0$ pour $0 < i < g - r$ et $d \in \mathbb{Z}$, donc que la restriction $H^1(B, \mathcal{O}_B) \rightarrow H^1(D_r, \mathcal{O}_{D_r})$ est bijective pour $g - r > 1$.

Si on note E_r le diviseur de s_r sur B , on a les suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & H^0(B, \mathcal{O}_B(M))/\mathbb{C}s_r & \longrightarrow & H^0(E_r, \mathcal{O}_{E_r}(M)) & \longrightarrow & H^1(B, \mathcal{O}_B) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & H^0(D_{r-1}, \mathcal{O}_{D_{r-1}}(M))/\mathbb{C}s_r & \longrightarrow & H^0(D_r, \mathcal{O}_{D_r}(M)) & \longrightarrow & H^1(D_{r-1}, \mathcal{O}_{D_{r-1}}) & \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

pour $r \geq 1$, $g - (r - 1) > 1$. Il est facile de voir (cf. [Gr], page 95) que la première ligne est:

$$0 \rightarrow \langle s_1, \dots, \hat{s}_r, \dots, s_d \rangle \rightarrow \left\langle s_1, \dots, \hat{s}_r, \dots, s_d, \frac{\partial s_r}{\partial z_j} \right\rangle \rightarrow H^1(B, \mathcal{O}_B) \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial s_r}{\partial z_j} \mapsto d\bar{z}_j,$$

pour un choix convenable des coordonnées z_1, \dots, z_g .

On en déduit facilement par récurrence sur r que pour $1 \leq r \leq \min(d, g - 1)$, une base de $H^0(D_r, \mathcal{O}_{D_r}(M))$ est:

$$\left\{ s_{r+1}, \dots, s_d, \frac{\partial s_1}{\partial z_j}, \dots, \frac{\partial s_r}{\partial z_j} \text{ pour } 1 \leq j \leq g \right\}. \blacksquare$$

Dans notre cas, puisque $g'' > d$, on peut appliquer le lemme à (B'', M'') . Si (12.2) est dégénérée, on a:

$$\exists (\lambda_{ij}) \in \mathbb{P}^{g'g''-1} \forall z' \in F'_0 \forall z'' \in F'' \quad \sum_{r,i,j} \lambda_{ij} \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z') \frac{\partial s''_r}{\partial z''_j}(z'') = 0.$$

On déduit du lemme que:

$$\forall z' \in F'_0 \forall j, r \quad \sum_i \lambda_{ij} \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z') = 0.$$

Si $g' > d$ on peut appliquer le lemme à (B', M') et conclure que les λ_{ij} sont tous nuls. Si $g' = d$, alors la matrice $(\partial s'_r / \partial z'_i(z'))$ est $d \times d$ de rang d donc on peut conclure aussi que les λ_{ij} sont tous nuls.

L'application (12.2) est donc non dégénérée et on peut conclure en appliquant le théorème d'Andreotti et Mayer 5.4.3. \blacksquare

Remarque 12.4. Sous les hypothèses de 12.1, l'intersection dans $\mathbb{P}T_0A$ des cônes tangents aux points singuliers de Θ , pour (A, Θ) générique dans $\mathcal{A}_{g', g''}^\delta$, est la réunion disjointe de $\mathbb{P}T_0B' \simeq \mathbb{P}^{g'-1}$ et de $\mathbb{P}T_0B'' \simeq \mathbb{P}^{g''-1}$.

COROLLAIRE 12.5.

- (i) $\mathcal{A}_{g', g-g'}^{(2)}$ est une composante de \mathcal{N}_{g-4}^g pour $2 \leq g' \leq g/2$ et $g \geq 5$.
(ii) $\mathcal{A}_{g', g-g'}^{(3)}$ est une composante de \mathcal{N}_{g-6}^g pour $3 \leq g' \leq g/2$ et $g \geq 7$.
(iii) $\mathcal{A}_{g', g-g'}^{(2,2)}$ est une composante de \mathcal{N}_{g-8}^g pour $4 \leq g' \leq g/2$ et $g \geq 9$.

Remarque 12.6. On rappelle (cf. Proposition 11.8) qu'on a, avec les notations de l'introduction:

$$\mathcal{A}_{g', g-g'}^{(2)} \subset \theta_{\text{null}, g} \quad \text{pour } 2 \leq g' \leq g/2$$

$$\mathcal{A}_{g', g-g'}^{(3)} \not\subset \theta_{\text{null}, g}$$

$$\mathcal{A}_{g', g-g'}^{(2,2)} \subset \theta_{\text{null}, g} \quad \text{pour } 4 \leq g' \leq g/2.$$

RÉFÉRENCES

- [ACGH] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS, ET J. HARRIS, *Geometry of Algebraic Curves, I*, Springer-Verlag, New York, 1985.
[A-M] A. ANDREOTTI ET A. MAYER, *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **21** (1967), 189–238.
[Ba] W. BARTH, *Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und Komplexprojektiven Räumen*, Invent. Math. **5** (1968), 42–62.
[Be 1] A. BEAUVILLE, *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent. Math. **41** (1977), 149–196.
[Be 2] ———, *Variétés de Prym et Jacobiennes intermédiaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), 309–391.
[Be 3] ———, *Sous-variétés spéciales des variétés de Prym*, Compositio Math. **45** (1982), 357–383.
[B-D] A. BEAUVILLE ET O. DEBARRE, *Une relation entre deux approches du problème de Schottky*, Invent. Math. **86** (1986), 195–207.
[D-M] P. DELIGNE ET D. MUMFORD, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES **36** (1969), 75–109.
[Do] R. DONAGI, *The tetragonal construction*, Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1981), 181–185.
[D-S] R. DONAGI ET R. C. SMITH, *The structure of the Prym map*, Acta Math. **146** (1981), 25–102.
[EGA] A. GROTHENDIECK, *Eléments de Géométrie Algébrique II*, Publ. IHES **8**, Paris, 1961.
[F-L] W. FULTON ET R. LAZARSFELD, *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors*, Acta Math. **146** (1981), 271–283.
[F-S 1] R. FRIEDMAN ET R. SMITH, *Degenerations of Prym varieties and intersections of three quadrics*, Invent. Math. **85** (1986), 615–635.
[F-S 2] ———, *The generic Torelli theorem for the Prym map*, Invent. Math. **67** (1982), 473–490.
[Gr] M. GREEN, *Quadrics of rank four in the ideal of a canonical curve*, Invent. Math. **75** (1984), 85–104.
[Ha] J. HARRIS, *Theta-characteristics on algebraic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982), 611–638.
[Ig 1] J. I. IGUSA, *A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions*, Math. Ann. **168** (1967), 228–260.
[Ig 2] ———, *Theta Functions*, Grundlehren der Math. Wiss. **194**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972.
[Ma] L. MASIEWICKI, *Universal properties of Prym varieties with an application to algebraic curves of genus five*, Trans. Amer. Math. Soc. **222** (1976), 221–240.
[Mu 1] D. MUMFORD, *On the Kodaira Dimension of the Siegel Modular Variety*, Springer Lecture Notes **997**, Springer-Verlag, New York, 1983, pp. 348–375.

- [Mu 2] _____, *Prym Varieties I*, Contributions to Analysis, Academic Press, New York, 1974, pp. 325–350.
- [Mu 3] _____, *Theta characteristics of an algebraic curve*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 (1971), 181–192.
- [Mu 4] _____, *Varieties defined by quadratic equations*, C.I.M.E., Varenna, 1969.
- [Mu 5] _____, *On the equations defining abelian varieties I*, Invent. Math. 1 (1966), 287–354.
- [Mu 6] _____, *Abelian Varieties*, Tata Studies in Math. 5, Oxford, 1970.
- [Mu 7] _____, *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*, Compositio Math. 24 (1972), 239–272.
- [Na] Y. NAMIKAWA, *A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties*, Math. Ann. 221 (1976), 97–142 et 201–242.
- [Re] S. RECILLAS, *Jacobians of curves with g_4^1 's are Prym varieties of trigonal curves*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 19 (1974), 9–13.
- [S–V] R. SMITH ET R. VARLEY, “Components of the locus of singular theta divisors of genus five,” in *Algebraic Geometry, Sitges (Barcelona) 1983*, Springer Lecture Notes 1124, Springer-Verlag, New York, 1983, pp. 338–416.
- [Te] M. TEIXIDOR, *For which Jacobi varieties is $\text{Sing } \Theta$ reducible?* J. Reine Angew. Math. 354 (1984), 141–149.
- [Tj 1] A. N. TJURIN, *Five lectures on three-dimensional varieties*, Russian Math. Surveys 27 (1972), 1–53.
- [Tj 2] _____, *On intersections of quadrics*, Russian Math. Surveys 30 (1975), 51–105.
- [Tj 3] _____, *The geometry of the Poincaré theta divisor of a Prym variety*, Math. USSR-Izv. 9 (1975), 951–986.
- [We 1] G. WELTERS, *A theorem of Gieseker-Petri type for Prym varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 18 (1985), 671–683.
- [We 2] _____, *The surface C-C on Jacobi varieties and 2nd order theta functions*, Acta Math. 157 (1986), 1–22.
- [We 3] _____, *Abel–Jacobi isogenies for certain types of Fano threefolds*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.

MATHÉMATIQUE, BÂTIMENT 425, UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE