C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 885-888, 1987

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Annulation de thêtaconstantes sur les variétés abéliennes de dimension quatre

Olivier DEBARRE

Résumé — On étudie les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 4 avec un nombre donné de points d'ordre deux singuliers sur un diviseur thêta symétrique. Il n'en existe qu'une pour laquelle un diviseur thêta symétrique a 10 points d'ordre deux comme seules singularités.

Vanishing thetanulls on 4-dimensional abelian varieties

Abstract — *We study 4-dimensional principally polarized abelian varieties with a given number of points of order two singular on a symmetric theta divisor. There exists only one of them for which any symmetric theta divisor has only* 10 *points of order two as singularities.*

1. INTRODUCTION. — Beauville a démontré dans [1] que dans l'espace des modules $\mathscr{A}_4$ des variétés abéliennes principalement polarisées (v. a. p. p. par la suite) de dimension 4, celles dont le diviseur thêta est singulier forment un *diviseur* noté $\mathscr{N}_0$ qui a deux composantes irréductibles. L'une d'elles est l'adhérence de la famille $\mathscr{J}_4$ des jacobiennes de courbes de genre 4, l'autre est notée θ_{null}. C'est le lieu des v. a. p. p. (A, Θ), avec Θ *symétrique*, telles que Sing Θ contienne un point d'ordre 2. Cette dernière propriété est indépendante du choix du diviseur thêta symétrique. Elle équivaut à l'annulation, à un point τ du demi-espace de Siegel $\mathscr{H}_4$ correspondant à la v. a. p. p. A, d'une des fonctions

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^g}\exp 2i\pi[{}^t(n+a)\tau(n+a)+{}^t(n+a)b]$$

où a, $b\in(1/2)\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$, $2\,{}^ta.b\in\mathbf{Z}$.

C'est pourquoi l'on dit aussi qu'une thêtaconstante est nulle sur A.

Nous allons étudier ici la structure des sous-ensembles $\theta_{\text{null},\,p}$ de $\mathscr{A}_4$ formés des v. a. p. p. pour lesquelles au moins p thêtaconstantes s'annulent.

Notre résultat principal est qu'il n'y a qu'une seule v. a. p. p. *indécomposable* de dimension 4 avec 10 thêtaconstantes nulles et qui ne soit pas une jacobienne hyperelliptique. Celle-ci, que l'on notera ici A_{10}, a été étudiée en détail par R. Varley dans [8]. Nous en donnons dans le paragraphe 5 une présentation différente due à A. Beauville.

2. QUELQUES FAMILLES PARTICULIÈRES DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES DE DIMENSION 4. — En cette dimension, toute v. a. p. p. A est une *variété de Prym:* il existe des courbes stables $\tilde{C}$ et C de genres respectifs 9 et 5 et un revêtement *admissible* de degré deux $\pi:\tilde{C}\to C$ tel que A soit isomorphe (avec sa polarisation), au quotient $J\tilde{C}/\pi^* JC$.

- $\mathscr{H}_4$ est la famille (de dimension 7) des jacobiennes hyperelliptiques.
- $\mathscr{A}_{r,\,s}$ est la famille des produits $A_1\times A_2$ avec $A_1\in\mathscr{A}_r$, $A_2\in\mathscr{A}_s$.
- $\theta^{\text{ind}}_{\text{null},\,p}$ est la famille des éléments indécomposables de $\theta_{\text{null},\,p}$ c'est-à-dire $\theta_{\text{null},\,p}-\mathscr{A}_{1,\,3}-\mathscr{A}_{2,\,2}$.
- La famille $\mathscr{A}^2_{1,\,1,\,1,\,1}$ (de dimension 4) est construite de la façon suivante : soient E_1, E_2, E_3, E_4 des courbes elliptiques et α_j et β_j des générateurs du groupe des points d'ordre 2 de E_j. Le quotient de $E_1\times E_2\times E_3\times E_4$ par le sous-groupe engendré par

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0249-6291/87/03050885 $ 2.00 © Académie des Sciences

$(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$, $(\alpha_1, 0, \alpha_3, 0)$, $(\alpha_1, 0, 0, \alpha_4)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ est une v. a. p. p., élément de $\mathscr{A}^2_{1,1,1,1}$.

• La famille $\mathscr{B}^2_{1,1,1,1}$ (de même dimension 4) est construite de façon analogue : on considère les quotients de $E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$ par le sous-groupe engendré par $(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$, $(0, 0, \alpha_3, \alpha_4)$, $(\alpha_1, 0, \beta_3, \beta_4)$ et $(\beta_1, \beta_2, \alpha_3, 0)$.

• Une courbe superelliptique est une courbe *lisse* irréductible admettant un morphisme de degré 2 sur une courbe elliptique. La famille des variétés de Prym associées aux revêtements doubles étales des courbes superelliptiques a plusieurs composantes irréductibles [4], dont $\mathscr{E}^2_4$ (de dimension 8) et $\mathscr{E}^2_{2,2}$ (de dimension 6).

• De même, les revêtements doubles admissibles des dégénérescences de courbes superelliptiques obtenues en identifiant sur une courbe hyperelliptique lisse deux points ainsi que leurs images par l'involution hyperelliptique ne forment pas une famille irréductible ([3] (2.2)). De nouveau, mentionnons seulement deux familles correspondantes de variétés de Prym : $\mathscr{H}^2_4$ (de dimension 7) et $\mathscr{H}^2_{1,3}$ (de dimension 6).

3. Énoncé du théorème.

Théorème. — (i) $\theta_{\mathrm{null},2}$ *est irréductible de dimension* 8.

(ii) $\theta_{\mathrm{null},3}$ *a trois composantes irréductibles dont* $\mathscr{H}_4$ *et* $\mathscr{A}_{1,3}$, *chacune de dimension* 7.

(iii) $\theta^{\mathrm{ind}}_{\mathrm{null},9} - \mathscr{H}_4$ *est irréductible de dimension* 1. *Ses éléments sont dans* $\mathscr{A}^2_{1,1,1,1}$, *isogènes à un produit* E^4, *où* E *est une courbe elliptique.*

(iv) $\theta^{\mathrm{ind}}_{\mathrm{null},10} - \mathscr{H}_4$ *a un seul élément, qu'on note* A_{10}, *qui correspond au cas où la courbe* E *a multiplication complexe par i.*

Pour tout sous-ensemble Z de $\mathscr{A}_4$, on note $\bar{Z}$ son adhérence dans $\mathscr{A}_4$. D'autre part, on a $\mathscr{H}_4 \subset \theta_{\mathrm{null},10}$ et $\mathscr{A}_{1,3} \subset \theta_{\mathrm{null},28}$.

4. Démonstration du théorème. — Les fonctions $\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau)$, pour $a, b \in (1/2)\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$ et $2\,{}^t a.b \in \mathbf{Z}$, définissent des diviseurs sur l'espace de modules $\mathscr{A}_4(4, 8)$ [5]. On choisit deux d'entre eux D et D′, on note p la projection $\mathscr{A}_4(4, 8) \to \mathscr{A}_4$ et q sa restriction à $D \cap D'$. On remarque que $\theta_{\mathrm{null},2}$ est de dimension pure 8 et qu'il contient $\bar{\mathscr{E}}^2_4$ ([3], 3.1) qui en est donc une composante. Nous allons montrer par l'absurde que c'est la seule. On écrit donc $D \cap D' = M + M'$, où M et M′ sont des diviseurs de Weil réduits sur D sans composante commune, avec $M = q^{-1}(\bar{\mathscr{E}}^2_4)$. On notera aussi $\mathscr{A}_4(4, 8)^s$ la compactification de Satake et, pour tout sous-ensemble Z de $\mathscr{A}_4(4, 8)$, $\bar{Z}$ son adhérence dans $\mathscr{A}_4(4,8)$ et $\bar{Z}^s$ son adhérence dans cette compactification. On a, avec $\bar{\mathscr{J}}_4(4, 8) = p^{-1}(\bar{\mathscr{J}}_4)$:

$$D \cap D' \cap \bar{\mathscr{J}}_4(4, 8) \subset q^{-1}(\bar{\mathscr{J}}_4 \cap \theta_{\mathrm{null},2}) = q^{-1}(\bar{\mathscr{H}}_4) \cup q^{-1}(\bar{\mathscr{A}}_{1,3}).$$

Il ressort de [3] que $\mathscr{H}_4$ et $\mathscr{A}_{1,3}$ sont contenus dans $\bar{\mathscr{E}}^2_4$, donc que M contient toutes les composantes de l'intersection $D \cap D' \cap \bar{\mathscr{J}}_4(4, 8)$. Comme $\bar{\mathscr{J}}_4(4, 8)^s$ est un diviseur de Cartier irréductible ample sur $\mathscr{A}_4(4, 8)^s$ [6], on a $\dim \bar{M}'^s \cap \bar{\mathscr{J}}_4(4, 8)^s \geqq 7$. Le complémentaire de $\mathscr{A}_4(4, 8)$ dans $\mathscr{A}_4(4, 8)^s$ étant de dimension 6, on en déduit que $M' \cap \bar{\mathscr{J}}_4(4, 8)$ est non vide de dimension au moins 7. Il existe donc une composante Z de $q^{-1}(\bar{\mathscr{H}}_4) \cup q^{-1}(\bar{\mathscr{A}}_{1,3})$ qui est contenue à la fois dans M et dans M′, donc qui est dans le lieu singulier de $D \cap D'$. Or une v. a. p. p. (A, Θ) correspond à un point singulier de $D \cap D'$ si $\mathrm{Sing}\,\Theta$ contient au moins deux points d'ordre 2 et, soit les cônes tangents en deux de ces points sont égaux, soit la multiplicité de l'un d'eux est au moins 4. Comme $q(Z)$ est soit $\bar{\mathscr{H}}_4$, soit $\mathscr{A}_{1,3}$, il est alors facile d'aboutir à une contradiction. On a montré que $D \cap D' = q^{-1}(\bar{\mathscr{E}}^2_4)$, donc que $\theta_{\mathrm{null},2} = \bar{\mathscr{E}}^2_4$, ce qui prouve (i).

Pour montrer les points suivants, on utilise la description de $\overline{\mathscr{E}}_4^2$ qui ressort des résultats de [3], à savoir :

$$\overline{\mathscr{E}}_4^2-\mathscr{A}_{1,3}-\mathscr{A}_{2,2}=\mathscr{E}_4^2\cup\mathscr{H}_4\cup\mathscr{H}_4^2\cup\mathscr{H}_{1,3}^2\cup\mathscr{E}_{2,2}^2.$$

En vertu de (i), $\theta_{\text{null},3}$ est de dimension pure 7. Un élément générique est donc dans $\mathscr{A}_{1,3}$, $\mathscr{E}_4^2$, $\mathscr{H}_4$ ou $\mathscr{H}_4^2$. Cette dernière famille n'est pas contenue dans $\theta_{\text{null},3}$ ([3], 3.2). Il ressort alors de [3], § 3 et [4] (5.2.9) que les éléments de $\mathscr{E}_4^2$ avec trois thêtaconstantes nulles forment une famille irréductible, ce qui prouve (ii).

Enfin, le nombre maximal de thêtaconstantes nulles est 8 pour les éléments de $\mathscr{E}_4^2$, $\mathscr{H}_4^2$ ou $\mathscr{H}_{1,3}^2$, et 10 pour ceux de $\mathscr{E}_{2,2}^2$. De plus, les éléments de $\mathscr{E}_{2,2}^2$ qui en ont 9 ou 10 sont dans $\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$ ou $\mathscr{B}_{1,1,1,1}^2$. Les deux lemmes suivants permettent de conclure la démonstration des points (iii) et (iv) du théorème.

LEMME 1. — *On a* $\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2\subset\theta_{\text{null},6}^{\text{ind}}$. *Les sous-variétés* $\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2\cap\theta_{\text{null},p}$ *pour* $6\leqq p\leqq 10$ *sont irréductibles de dimension* $(10-p)$. *En particulier, un seul élément de* $\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$ *a* 10 *thêtaconstantes nulles.*

■ On a une isogénie π: $E_1\times E_2\times E_3\times E_4\to A$. Soit o_j l'élément neutre de E_j. Il existe [3] une base $\{s_j, t_j\}$ de $H^0(\mathcal{O}(2o_j))$ telle qu'une équation de l'image inverse du diviseur Θ de A dans $E_1\times E_2\times E_3\times E_4$ soit $s=s_1s_2s_3s_4+t_1t_2t_3t_4$. On peut écrire $\operatorname{div}(s_j)=x_j+(x_j+\alpha_j)$ et $\operatorname{div}(t_j)=(x_j+\beta_j)+(x_j+\alpha_j+\beta_j)$, avec $x_j\in E_j$ et $2x_j=\alpha_j$. Les points singuliers de Θ sont d'une part les six points $\pi(x_1+x_2+x_3+x_4+\beta_1+\beta_j+\varepsilon\alpha_1)$ avec $j\in\{2, 3, 4\}$ et $\varepsilon\in\{0, 1\}$, et d'autre part, éventuellement, les images des points d'ordre 2 de $E_1\times E_2\times E_3\times E_4$ qui sont sur Θ.

Les images des points d'ordre 2 de E_j par l'application (s_j, t_j): $E_j\to\mathbf{P}^1$ sont λ_j, $-\lambda_j$, $1/\lambda_j$, $-1/\lambda_j$ ([7], p. 350) avec $\lambda_j\in U=\mathbf{C}-\{0, 1, -1, i, -i\}$. Soit G le groupe engendré par les transformations $\lambda\mapsto-\lambda$ et $\lambda\mapsto-1/\lambda$. Le morphisme $U^4\to\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$ est invariant par l'action de G^4 ainsi que par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Il s'ensuit que $\theta_{\text{null},7}\cap\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$ est l'image de l'hypersurface irréductible $1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=0$ de U^4; $\theta_{\text{null},8}\cap\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$ celle de la sous-variété $\lambda_1=\lambda_2$, $\lambda_3=\lambda_4$; $\theta_{\text{null},9}\cap\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$ celle de la diagonale de U^4, tandis que $\theta_{\text{null},10}\cap\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$ correspond au cas $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda$, $\lambda^4=-1$. Les courbes $E_1, \ldots, E_4$ sont alors isomorphes à la courbe elliptique avec multiplication complexe par i et α est l'unique point d'ordre 2 non nul invariant par multiplication par i. ■

LEMME 2. — *On a* $\mathscr{B}_{1,1,1,1}^2\subset\theta_{\text{null},4}$ *et* $\mathscr{B}_{1,1,1,1}^2\cap\theta_{\text{null},7}\subset\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$.

■ Avec les notations du lemme précédent, l'équation de Θ est maintenant $s=s_1s_2(s_3s_4+t_3t_4)+t_1t_2(s_3s_4-t_3t_4)$. Les quatre points :

$$\pi(x_1+x_2+\beta_2+x_3+x_4+\beta_4),\qquad \pi(x_1+x_2+\beta_2+x_3+\alpha_3+x_4+\beta_4),$$
$$\pi(x_1+x_2+\beta_2+x_3+\beta_3+x_4),\qquad \pi(x_1+x_2+\beta_2+x_3+x_4+\alpha_4)$$

sont d'ordre 2 sur A et singuliers sur Θ. S'il y a au moins trois thêtaconstantes nulles supplémentaires, on a alors, par le critère jacobien, $\lambda_1=\lambda_2$ ou $\lambda_1\lambda_2=1$ ou $\lambda_3=\lambda_4$ ou $\lambda_3\lambda_4=1$. Dans ce premier cas, par exemple, il existe alors un isomorphisme $E_1\xrightarrow{\sim}E_2$ envoyant α_1 sur α_2. Si on note E_1' la courbe elliptique $E_1/\{o_1, \alpha_1\}$ et α_1' l'image de β_1 dans E_1', on a :

$$E_1\times E_1\xrightarrow{p}X\xleftarrow{p'}E_1'\times E_1'$$

où $\operatorname{Ker}p=\{\alpha_1, \alpha_1\}$, $\operatorname{Ker}p'=\{\alpha_1', \alpha_1'\}$. On a aussi $p(\beta_1, \beta_1)=p'(\alpha_1', o_1')$ et $p(\alpha_1, o_1)=p'(\beta_1', \beta_1')$ de sorte que (A, Θ) est élément de $\mathscr{A}_{1,1,1,1}^2$, quotient de $E_1'\times E_1'\times E_3\times E_4$. ■

5. LA VARIÉTÉ ABÉLIENNE A_{10}. — Beauville m'a indiqué la construction suivante de la v. a. p. p. A_{10}. Soit E_i la courbe elliptique avec multiplication complexe par i. Il résulte de la description ci-dessus que A_{10} est isomorphe au quotient de E_i^4 par un sous-groupe stable par multiplication par i, donc qu'elle admet un automorphisme qui induit la multiplication par i sur son algèbre de Lie. Ceci entraîne que A_{10} est isomorphe à E_i^4 en tant que variété abélienne; la donnée d'une polarisation principale indécomposable sur A_{10} équivaut alors à celle d'une forme hermitienne positive unimodulaire indécomposable sur le $\mathbf{Z}[i]$-module $\mathbf{Z}[i]^4$. Or une telle forme est unique : en effet, sa partie réelle est une forme quadratique positive unimodulaire Q sur $\mathbf{Z}^8$, et la multiplication par i définit un élément J de O(Q) de carré (-1). Cela impose que Q est la forme quadratique canonique sur le réseau Γ_8 du système de racines E_8, et que J appartient au groupe de Weyl $W(E_8)$. Or il existe, à conjugaison près, un unique élément de $W(E_8)$ de carré (-1) [2]. Cet élément munit Γ_8 d'une structure de $\mathbf{Z}[i]$-module libre de rang 4; la forme hermitienne H sur Γ_8 définie par $H(x, y)=Q(x, y)+i\,Q(Jx, y)$ fournit la polarisation cherchée.

Il résulte de [2] que le groupe d'automorphismes de A_{10}, qui s'identifie au centralisateur de J dans $W(E_8)$, est d'ordre 46080.

Note reçue le 12 octobre 1987, acceptée le 22 octobre 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BEAUVILLE, Prym varieties and the Schottky problem, *Invent. Math.*, 41, 1977, p. 149-196.

[2] R. W. CARTER, Conjugacy classes in the Weyl group, *Comp. Math.*, 25, 1972, p. 1-59.

[3] O. DEBARRE, *La conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym* (à paraître).

[4] O. DEBARRE, Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3, *Duke Math. J.* (à paraître).

[5] J. I. IGUSA, *Theta functions*, Grundlehren der Math. Wiss., 194, Springer Verlag.

[6] J. I. IGUSA, On the irreducibility of the Schottky's divisor, *J. Fac. Sci. Tokyo*, 28, 1981, p. 531-545.

[7] D. MUMFORD, On the equations defining abelian varieties I, *Invent. Math.*, 1, 1966, p. 287-354.

[8] R. VARLEY, Weddle's surface, Humbert's curves, and a certain 4-dimensional abelian variety, *Am. J. of Math.*, 108, 1986, p. 931-952.

Université Paris-Sud, Bât. n° 425, 91405 *Orsay Cedex*.