THÉORÈMES DE LEFSCHETZ POUR LES LIEUX DE DÉGÉNÉRESCENCE

O. Debarre

Soient X une variété complexe projective *lisse* connexe et Y le lieu des zéros d'une section d'un fibré en droites ample sur X. Le théorème de Lefschetz énonce que la restriction $\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{Y},\mathbf{Z})$ est bijective pour $p < \dim \mathrm{X} - 1$, injective pour $p = \dim \mathrm{X} - 1$. Cela entraîne le théorème de Bertini : Y est connexe si sa dimension est au moins 1. Dans le même ordre d'idées, Grothendieck a montré que les groupes de Picard de X et de Y sont isomorphes (quelles que soient les singularités de Y !) si $\dim \mathrm{Y} \geq 3$.

Etant donnés des fibrés vectoriels E et F sur X de rangs respectifs e et f, et un morphisme $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, on considère les lieux de dégénérescence

$$\mathrm{D}_r = \{x \in \mathrm{X} \mid \mathrm{rg}(u_x) \leq r\} ,$$

munis de leur structure réduite. Fulton et Lazarsfeld ont démontré dans [FL] l'analogue du théorème de Bertini : si $\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est ample, D_r est connexe si sa dimension attendue $\delta(r) = \dim(\mathrm{X}) - (f-r)(e-r)$ est au moins 1. Nous poursuivons leurs méthodes pour obtenir des extensions des théorèmes de Lefschetz et Grothendieck mentionnés plus haut. Il y a plusieurs cas de figure :

- si D_{r-1} est vide, on peut complètement décrire (*cf.* (1.1)) la cohomologie entière de D_r jusqu'en degré $\delta(r)-1$. Si D_r est normal, et que l'on a les inégalités $0 < r < \min\{e,f\}$ et $\delta(r) \geq 3$, le groupe de Picard de D_r est isomorphe à $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}) \oplus \mathbf{Z}$.

- Si au contraire suffisament des lieux D_s, pour $s \leq r$, sont non vides, la restriction $\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{D}_r,\mathbf{Z})$ est un isomorphisme pour p assez petit (*cf.* th. 2.2 pour un énoncé précis). Par exemple, si D_r est normal, que D_{r-1} n'est pas vide ou que $r = 0$, et que $\delta(r) \geq 3$, les groupes de Picard de X et de D_r sont isomorphes (cor. 3.4).

Dans [E], Ein montre ces résultats sur le groupe de Picard dans le cas où E est trivial, en supposant seulement $\delta(r) = 2$ mais aussi F « suffisamment ample » et u général (c'est une extension du théorème de Noether-Lefschetz sur le groupe de Picard d'une surface générale dans $\mathbf{P}^3$). López ([Lo]), puis Ellingsrud et Peskine ([EP]), étudient le cas des surfaces générales de $\mathbf{P}^4$ projectivement de Cohen-Macaulay (qui sont des lieux de dégénérescence avec $r = e-1 = f-2$). D'autre part, pour $r = \min\{e,f\}-1$ et D_{r-1} vide, toujours sous les hypothèses F « suffisamment ample » et u général, Spandaw détermine dans sa thèse les classes *algébriques* de $\mathrm{H}^{\delta(r)}(\mathrm{D}_r,\mathbf{Z})$.

Nous nous intéressons ensuite au cas d'un morphisme $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ *antisymétrique.* Tu a démontré que si $\wedge^2 \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ est ample, le lieu de dégénérescence

$$\mathrm{A}_r = \{x \in \mathrm{X} \mid \mathrm{rg}(u_x) \leq 2r\}$$

est connexe si sa dimension attendue $\alpha(r) = \dim(\mathrm{X}) - \binom{e-2r}{2}$ est au moins 1. Nous obtenons des extensions des théorèmes de Grothendieck et Lefschetz dans ce cadre : la restriction $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{A}_r)$ est bijective si A_r est normale et $\alpha(r) \geq 3$, et

- si A_{r-1} est vide, on peut décrire (th. 4.1) la cohomologie entière de A_r jusqu'en degré $\alpha(r) - 1$;
- si au contraire suffisament des lieux A_s, pour $s \leq r$, sont non vides (*cf.* th. 5.1 pour un énoncé précis), la restriction $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{A}_r, \mathbf{Z})$ est un isomorphisme pour p assez petit.

Nous terminons par l'étude du cas des fibrés *orthogonaux* (dont le cas des morphismes antisymétriques est un cas particulier) : on se donne un fibré vectoriel V de rang pair sur X muni d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans un fibré en droites L et des sous-fibrés E et F totalement isotropes maximaux de V. On montre un théorème de Bertini pour les lieux de dégénérescence

$$\mathrm{O}^r = \{x \in \mathrm{X} \mid \dim(\mathrm{E}_x \cap \mathrm{F}_x) \geq r \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{E}_x \cap \mathrm{F}_x) \equiv r \pmod 2\} \ ;$$

si $\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{F}^* \otimes \mathrm{L}$ est ample, O^r est connexe si sa dimension attendue $\dim(\mathrm{X}) - \binom{r}{2}$ est au moins 1. Cela entraîne en particulier que les lieux de Brill-Noether d'une variété de Prym P (définis dans [W]) sont connexes dès que leur dimension attendue est strictement positive, et irréductibles lorsque P est générale.

Il est probable que les résultats de type Lefschetz obtenus dans le cas antisymétrique subsistent dans ce cas, mais je ne sais pas le démontrer (*cf.* (6.3)).

Dans cet article, tous les schémas sont de type fini sur le corps des nombres complexes. On désigne par $\mathbf{F}$ un corps fini ou égal à $\mathbf{Q}$.

Je remercie R. Laterveer et W. Fulton de leurs conseils, ainsi que P. Pragacz pour sa lecture attentive d'une première version de cet article et ses remarques pertinentes.

I. Lieux de dégénérescence

1. Le résultat de Fulton et Lazarsfeld

Soient X une variété complexe projective irréductible et E et F des fibrés vectoriels sur X de rangs respectifs e et f. Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un morphisme ; on considère

$$\mathrm{D}_r = \{x \in \mathrm{X} \mid \mathrm{rg}(u_x) \leq r\}_{\mathrm{red}} \ ,$$

on note ι_r l'inclusion $\mathrm{D}_r \hookrightarrow \mathrm{X}$ et on pose $\delta(r) = \dim(\mathrm{X}) - (f-r)(e-r)$. Par la suite, nous supposerons toujours $e \leq f$ (ce que l'on peut toujours faire quitte à remplacer u par son dual).

(1.1) Soient $\pi : \mathrm{G} = \mathrm{G}(e-r, \mathrm{E}) \to \mathrm{X}$ le fibré en grassmanniennes et S le fibré tautologique de rang $e-r$ sur G. Soit Y le lieu des zéros de la composée

$$\mathrm{S} \hookrightarrow \pi^*\mathrm{E} \xrightarrow{\pi^* u} \pi^*\mathrm{F} \ .$$

Le morphisme π induit par restriction un morphisme $\pi' : \mathrm{Y} \to \mathrm{D}_r$ propre surjectif, birationnel au-dessus de $\mathrm{D}_r - \mathrm{D}_{r-1}$, de fibre $\mathrm{G}(e-r, e-l)$ au-dessus de $\mathrm{D}_l - \mathrm{D}_{l-1}$. Fulton et Lazarsfeld montrent que *si* $\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est ample*, $\mathrm{H}^q(\mathrm{G}-\mathrm{Y}, \mathbf{F})$ s'annule pour $q \geq \dim(\mathrm{X}) + (f+r)(e-r)$. Par dualité de Lefschetz, on en déduit, si X est lisse, $\mathrm{H}^p(\mathrm{G},\mathrm{Y};\mathbf{F}) = 0$ pour $p \leq \delta(r)$.

La dualité de Lefschetz n'est valable que lorsque $\mathrm{G}-\mathrm{Y}$ est lisse. Elle est remplacée dans le cas général par une suite spectrale

$$\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathrm{G}-\mathrm{Y}, \mathcal{H}_{-q}(\mathrm{G},\mathbf{F})) \Rightarrow \mathrm{H}_{-p-q}(\mathrm{G},\mathrm{Y};\mathbf{F}) \ ,$$

où $\mathcal{H}_q(\mathrm{G},\mathbf{F})$ est le faisceau de fibre $\mathrm{H}_q(\mathrm{G},\mathrm{G}-\{x\};\mathbf{F})$ en un point x de G ([H1], p. 548). Lorsque $\mathrm{G}-\mathrm{Y}$ est localement intersection complète, le support de $\mathcal{H}_{\dim(\mathrm{G})+i}(\mathrm{G},\mathbf{F})$ est de dimension au plus i, pour tout $i \in \mathbf{Z}$ ([H1], lemma 4, p. 550). Or la démonstration de Fulton et Lazarsfeld montre que pour tout fermé Z de X, la dimension cohomologique de $\pi^{-1}(\mathrm{Z})-\mathrm{Y}$ est au plus $\dim(\pi^{-1}(\mathrm{Z})) + f(e-r) - 1$. On en déduit [1]

$$\mathrm{E}_2^{pq} = 0 \qquad \text{pour} \quad p > -q - \dim(\mathrm{G}) + f(e-r) - 1 \ ,$$

d'où de nouveau

$$\mathrm{H}_p(\mathrm{G},\mathrm{Y};\mathbf{F}) = 0 \qquad \text{pour} \quad p \leq \dim(\mathrm{G}) - f(e-r) = \delta(r) \ , \tag{1.2}$$

sous l'hypothèse que $\mathrm{X}-\mathrm{D}_0$ *est localement intersection complète* [2].

(1.3) Supposons D_{r-1} vide et notons c l'inverse dans $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{D}_r,\mathbf{Z})$ de la classe de Chern totale du fibré vectoriel $\mathrm{Ker}(u|_{\mathrm{D}_r})$. La discussion ci-dessus entraîne que la cohomologie de D_r est, en degré $< p$, celle du fibré en grassmanniennes G. Comme cette dernière est calculée par exemple dans [F1], prop. 14.6.5, on en déduit que l'application

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\bigoplus_{\substack{\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{e-r}) \\ r\geq\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_{e-r}\geq 0}} \mathrm{H}^{p-2|\lambda|}(\mathrm{X},\mathbf{F}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{D}_r,\mathbf{F}) \\ \sum_\lambda \alpha_\lambda & \longmapsto & \sum_\lambda \Delta_\lambda(c)\cdot \iota_r^*\alpha_\lambda \end{array}$$

[1] Les faisceaux $\mathcal{H}_q$ ne sont localement constants que sur chaque strate d'une stratification de Whitney de G, et il faut en fait raisonner strate par strate comme dans [H2], Lemma 3, p. 134.

[2] On a une autre suite spectrale

$$\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathrm{G},\mathrm{Y};\mathcal{H}_{-q}(\mathrm{G},\mathbf{F})) \Rightarrow \mathrm{H}_{-p-q}(\mathrm{G}-\mathrm{Y},\mathbf{F}) \ ,$$

qui permet de montrer que l'on a une inclusion $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{Y};\mathbf{Q}) \hookrightarrow \mathrm{H}_{2\dim(\mathrm{G})-1}(\mathrm{G}-\mathrm{Y},\mathbf{Q})$ sous la seule hypothèse que G est normale ([FL], lemma 1.3). Il en résulte que D_r est connexe dès que $\delta(r) > 0$, sans hypothèse sur les singularités de X.

est injective pour $p \leq \delta(r)$, bijective pour $p < \delta(r)$. On a employé les notations standard

$$|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{e-r} \qquad , \qquad \Delta_\lambda(c) = \det(c_{\lambda_i+j-i})_{1\leq i,j\leq e-r} \ .$$

Exemple 1.4. Soient C une courbe projective lisse de genre g et J_d la jacobienne des classes d'isomorphisme de fibrés en droites de degré d sur C. Il est montré dans [FL] que la sous-variété W_d^s de J_d qui paramètre les classes d'isomorphisme de fibrés en droites L sur C tels que $h^0(\mathrm{C},\mathrm{L}) > s$ peut s'interpréter comme le lieu D_r pour un morphisme $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ de fibrés vectoriels sur J_d, avec $r = e - s - 1$ et $f = e + g - 1 - d$, et que $\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est ample. La variété Y correspondante est habituellement notée G_d^s ([ACGH], IV, § 3); elle paramètre les paires $(\Lambda, [\mathrm{L}])$, où L est un fibré en droites de degré d sur C et Λ un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0(\mathrm{C},\mathrm{L})$ de dimension $s+1$. Par exemple, G_d^0 n'est autre que le produit symétrique C_d, et on déduit de (1.3) un isomorphisme

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{C}_d, \mathbf{Z}) \simeq \bigoplus_{0\leq 2j\leq p} [\mathrm{C}_{d-1}]^j \cdot \iota^*\mathrm{H}^{p-2j}(\mathrm{JC}, \mathbf{Z})$$

pour $p < d$. C'est un cas particulier de [M], (6.3). On peut calculer de la même façon les groupes $\mathrm{H}^p(\mathrm{G}_d^s, \mathbf{Z})$ pour $p < g - (s+1)(g-d+s)$.

Nous aurons besoin d'une généralisation (basée sur les idées de [S]) du résultat de connexité de Fulton et Lazarsfeld, qui fait intervenir la notion de d-connexité. Rappelons qu'un schéma X est dit d-connexe s'il est de dimension $> d$ et si, pour tout sous-schéma fermé Z de X de dimension $< d$, le schéma $\mathrm{X} - \mathrm{Z}$ est connexe. Les propriétés suivantes sont classiques :

1) un schéma est (-1)-connexe si et seulement s'il est non vide; il est 0-connexe si et seulement s'il est connexe.

2) Un schéma irréductible de dimension d est $(d-1)$-connexe. Toute composante irréductible d'un schéma d-connexe est de dimension $> d$.

3) Si X est réunion de sous-schémas fermés d-connexes $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$, il est d-connexe si et seulement si, pour tous i et j, il existe des indices $i_0, i_1, \ldots, i_m$ avec $i_0 = i$ et $i_m = j$ tels que $\dim(\mathrm{X}_{i_\nu} \cap \mathrm{X}_{i_{\nu+1}}) \geq d$ pour tout $\nu = 0, \ldots, m-1$.

Proposition 1.5.– *Soient X un schéma projectif d-connexe, E et F des fibrés vectoriels sur X de rangs respectifs e et f, avec $\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ample, et $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un morphisme partout de rang $\leq k$.*

Pour tout $r \leq k$, le lieu D_r est $(d - (f-r)(e-r) + (e-k)(f-k))$-connexe. En particulier, si X est irréductible de dimension $> (f-r)(e-r) - (e-k)(f-k)$, le lieu D_r est connexe.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $k = r+1$; posons

$$d' = d - (f-r)(e-r) + (e-k)(f-k) = d - e - f + 2r + 1 \ .$$

Notons $X_1, \ldots, X_m$ les composantes irréductibles de X ; elles sont toutes de dimension $> d$ par 2). Par [S], Lemma 4.1.3 (qui se démontre aussi à partir de [ACGH], prop. (1.3), p. 307, en prenant des sections hyperplanes), chaque intersection $X_j \cap D_r$ est d'-connexe. Pour tous i et j, il existe par 3) des indices $i_0 = i, i_1, \ldots, i_m = j$ tels que $\dim(X_{i_\nu} \cap X_{i_{\nu+1}}) \geq d$ pour tout $\nu = 0, \ldots, m-1$. On a par *loc.cit.*

$$\dim(X_{i_\nu} \cap X_{i_{\nu+1}} \cap D_r) \geq d' ,$$

pour tout ν, de sorte que $D_r = \cup_j (X_j \cap D_r)$ est d'-connexe par 3). ■

2. Un théorème de Lefschetz

(2.1) Restons dans la situation du §1, dont nous gardons les notations. Comme remarqué dans [FL], l'application $H^p(\iota_r, \mathbf{F})$ est injective pour $p \leq \delta(r)$. On posera $\varepsilon(0) = 1$, $\varepsilon(1) = 2$ et, pour tout entier k strictement positif, $\varepsilon(2k) = 0$ et $\varepsilon(2k+1) = 1$.

Théorème 2.2.– *Soit* X *une variété projective irréductible localement intersection complète. Soient* E *et* F *des fibrés vectoriels sur* X*, avec* $\mathrm{Hom}(E, F)$ ample*, et* $u : E \to F$ *un morphisme. Supposons* $[\frac{m}{2}] \leq r$ *et* $\delta(r - [\frac{m}{2}]) \geq \varepsilon(m)$ *; l'application* $H^p(\iota_r, \mathbf{Z})$ *est bijective pour* $p \leq m$.

Démonstration. Elle consiste à comparer les suites spectrales de Leray pour l'application $\pi : G \to X$ et sa restriction $\pi' : Y \to D_r$. Les fibres de ces deux applications étant des grassmanniennes, les faisceaux $R^q \pi_* \mathbf{Z}$ et $R^q \pi'_* \mathbf{Z}$ sont nuls pour q impair, de sorte que ${}^{\pi}E_2^{p,q} = {}^{\pi}E_3^{p,q}$ et ${}^{\pi'}E_2^{p,q} = {}^{\pi'}E_3^{p,q}$. D'autre part, par le théorème de Leray-Hirsch, la suite spectrale

$${}^{\pi}E_2^{pq} = H^p(X, R^q \pi_* \mathbf{Z}) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(G, \mathbf{Z})$$

dégénère en E_2 et les applications $H^q(G(e-r, \mathbf{P}^e), \mathbf{Z}) \to H^0(X, R^q \pi_* \mathbf{Z})$ sont surjectives, de sorte que les faisceaux $R^q \pi_* \mathbf{Z}$ sont constants. Soit x un point de X, on a

$$(R^{2q} \pi_* \mathbf{Z})_x \simeq H^{2q}(G(e-r, e), \mathbf{Z}) \simeq \bigoplus_{\substack{r \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{e-r} \geq 0 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{e-r} = q}} \mathbf{Z}$$

et, si $x \in D_l - D_{l-1}$,

$$(R^{2q} \pi'_* \mathbf{Z})_x \simeq H^{2q}(G(e-r, e-l), \mathbf{Z}) \simeq \bigoplus_{\substack{r-l \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{e-r} \geq 0 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{e-r} = q}} \mathbf{Z} .$$

En particulier, la restriction $R^{2q} \pi_* \mathbf{Z} \to R^{2q} \pi'_* \mathbf{Z}$ est surjective pour tout q. Son noyau $\mathcal{K}_{2q}$ est nul sur D_{r-q} et, comme $R^{2q} \pi_* \mathbf{Z}$, il est constant [3] sur chaque $D_l - D_{l-1}$. Plus précisément, il existe une filtration

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_q \subset \mathcal{F}_{q+1} = \mathcal{K}_{2q} ,$$

[3] Alternativement, on peut faire tout le raisonnement avec des faisceaux localement constants à la place de $\mathbf{Z}$, puisque le résultat de Fulton et Lazarsfeld que l'on utilise plus bas est aussi valable avec ces faisceaux.

vérifiant $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i \simeq \mathbf{Z}^{r_i}_{\mathrm{X}-\mathrm{D}_{r-q+i}}$ pour $0 \leq i \leq q$, où les r_i sont des entiers.

L'assertion à démontrer découle de (1.2) pour $m = 0$; supposons-la vraie pour tout entier $< m$. On peut supposer aussi $r < e$; on vérifie que dans ce cas, on a pour tous entiers $t \geq s \geq 0$ les inégalités

$$\delta(t) \geq \delta(t-s) + s(s+2) \tag{2.3}$$

$$\varepsilon(t) + [\frac{t}{2}]([\frac{t}{2}]+2) > t \ . \tag{2.4}$$

Premier pas. *Supposons* $0 \leq p < m$ *et* $q + [\frac{p}{2}] \leq r$. *On a*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\mathcal{K}_{2q}) = 0 \qquad & \text{si} \quad \delta(r-q) \geq 0 \ ; \\ \mathrm{H}^{p+1}(\mathcal{K}_{2q}) = 0 \qquad & \text{si} \quad \delta(r-q-[\frac{p}{2}]) \geq \varepsilon(p) \ . \end{aligned}$$

Considérons la suite de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}_{\mathrm{X}-\mathrm{D}_{r-q+i}} \to \mathbf{Z}_{\mathrm{X}} \to \mathbf{Z}_{\mathrm{D}_{r-q+i}} \to 0 \ .$$

Le théorème de Fulton et Lazarsfeld (*cf.* (1.2)) entraîne que $\mathrm{H}^0(\mathbf{Z}_{\mathrm{X}-\mathrm{D}_{r-q+i}})$ est nul lorsque $\delta(r-q+i) \geq 0$. Comme la fonction δ est croissante, on en déduit $\mathrm{H}^0(\mathcal{K}_{2q}) = 0$ lorsque $\delta(r-q) \geq 0$.

D'autre part, on a par (2.1) des suites exactes

$$0 \to \mathrm{H}^p(\mathbf{Z}_{\mathrm{X}}) \to \mathrm{H}^p(\mathbf{Z}_{\mathrm{D}_{r-q+i}}) \to \mathrm{H}^{p+1}(\mathbf{Z}_{\mathrm{X}-\mathrm{D}_{r-q+i}}) \to 0$$

lorsque $p < \delta(r-q+i)$; l'hypothèse de récurrence entraîne alors $\mathrm{H}^{p+1}(\mathbf{Z}_{\mathrm{X}-\mathrm{D}_{r-q+i}}) = 0$ si l'on a de plus $\delta(r-q+i-[\frac{p}{2}]) \geq \varepsilon(p)$ et $p < m$. Comme la fonction δ est croissante, on a donc $\mathrm{H}^{p+1}(\mathcal{K}_{2q}) = 0$ lorsque $\delta(r-q-[\frac{p}{2}]) \geq \varepsilon(p)$ et $p < m$, puisque l'on a alors, par (2.3) et (2.4),

$$\delta(r-q) \geq \delta(t-q-[\frac{p}{2}]) + [\frac{p}{2}]([\frac{p}{2}]+2) \geq \varepsilon(p) + [\frac{p}{2}]([\frac{p}{2}]+2) > p \ .$$

Ceci montre le premier pas.

Deuxième pas. *Supposons* $[\frac{m}{2}] \leq r$ *et* $\delta(r-[\frac{m}{2}]) \geq \varepsilon(m)$. *L'application naturelle* $\iota^{p,q}_\infty : {}^{\pi}\mathrm{E}^{p,q}_\infty \to {}^{\pi'}\mathrm{E}^{p,q}_\infty$ *est injective pour* $p < m$ *et* $p + q \leq m$. *D'autre part,* ${}^{\pi'}\mathrm{E}^{m,0}_\infty \simeq {}^{\pi'}\mathrm{E}^{m,0}_2 \simeq \mathrm{H}^m(\mathrm{D}_r, \mathbf{Z})$.

Supposons $p + 2q \leq m$. L'hypothèse $\delta(r-[\frac{m}{2}]) \geq \varepsilon(m)$ entraîne

$$\delta(r-q) \geq \delta(r-[\frac{m}{2}]) \geq \varepsilon(m) \geq 0$$

et, si $p + 2q < m$,

$$\delta(r-q-[\frac{p}{2}]) \geq \varepsilon(p) \ ;$$

en effet, si $q+[\frac{p}{2}]<[\frac{m}{2}]$, cela découle de (2.3), et si $q+[\frac{p}{2}]=[\frac{m}{2}]$, on a $\varepsilon(p)\le\varepsilon(m)$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^p(\mathcal{K}_{2q}) & & \\
\downarrow & & \\
\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathrm{R}^{2q}\pi_*\mathbf{Z}) & \xrightarrow{{}^{\pi}d_3^{p,2q}} & \mathrm{H}^{p+3}(\mathrm{X},\mathrm{R}^{2q-2}\pi_*\mathbf{Z}) \\
\downarrow \iota_3^{p,2q} & & \downarrow \iota_3^{p+3,2q-2} \\
\mathrm{H}^p(\mathrm{D}_r,\mathrm{R}^{2q}\pi'_*\mathbf{Z}) & \xrightarrow{{}^{\pi'}d_3^{p,2q}} & \mathrm{H}^{p+3}(\mathrm{D}_r,\mathrm{R}^{2q-2}\pi'_*\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \\
\mathrm{H}^{p+1}(\mathcal{K}_{2q})\ ; & &
\end{array}$$

il résulte du premier pas que l'application $\iota_3^{p,2q}$ est injective, et bijective si $p+2q<m$.

Supposons maintenant $p+q\le m$; comme ${}^{\pi}d_3^{p,q}=0$, on a ${}^{\pi'}d_3^{p,q}=0$ pour $p+q<m$. En particulier, ${}^{\pi'}\mathrm{E}_4^{p,q}$ est un sous-groupe de ${}^{\pi'}\mathrm{E}_3^{p,q}$ qui lui est égal pour $p=m$ et, le même raisonnement s'appliquant à chaque cran de la suite spectrale, ${}^{\pi'}\mathrm{E}_\infty^{p,q}$ est un sous-groupe de ${}^{\pi'}\mathrm{E}_3^{p,q}$ qui lui est égal pour $p=m$, de sorte que $\iota_\infty^{p,q}$ est injective.

Conclusion. Supposons $p+q\le m$ et $\delta(r-[\frac{m}{2}])\ge\varepsilon(m)$; on en déduit $\delta(r)>m$ par (2.3) et (2.4), de sorte que la restriction $\rho:\mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{G},\mathbf{Z})\to\mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{Y},\mathbf{Z})$ est bijective par (1.2). Comme $\iota_\infty^{p,q}$ est injective (deuxième pas), il en résulte que $\mathrm{Gr}\,\rho$ est bijective, ainsi donc que $\iota_\infty^{m,0}$, qui, par le deuxième pas, n'est autre que $\mathrm{H}^m(\iota_r,\mathbf{Z})$. ∎

Remarque 2.5. On a $\mathrm{R}^2\pi'_*\mathbf{Z}\simeq\mathbf{Z}_{\mathrm{D}_{r-1}}$, d'où un diagramme commutatif à lignes exactes, où tous les groupes de cohomologie sont à coefficients dans $\mathbf{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{X}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^2(\pi)} & \mathrm{H}^2(\mathrm{G}) & \to & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}) & \xrightarrow{0} & \mathrm{H}^3(\mathrm{X}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^3(\pi)} & \mathrm{H}^3(\mathrm{G}) & \to & \mathrm{H}^1(\mathrm{X}) \\
 & & \downarrow \mathrm{H}^2(\iota_r) & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{H}^0(\iota_{r-1}) & & \downarrow \mathrm{H}^3(\iota_r) & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{H}^1(\iota_{r-1}) \\
0 & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{D}_r) & \xrightarrow{\mathrm{H}^2(\pi')} & \mathrm{H}^2(\mathrm{Y}) & \to & \mathrm{H}^0(\mathrm{D}_{r-1}) & \xrightarrow{{}^{\pi'}d_3^{02}} & \mathrm{H}^3(\mathrm{D}_r) & \xrightarrow{\mathrm{H}^3(\pi')} & \mathrm{H}^3(\mathrm{Y}) & \to & \mathrm{H}^1(\mathrm{D}_{r-1})
\end{array}$$

Supposons $0<r<e$ et $\delta(r)\ge 3$. Si D_{r-1} n'est pas vide, on en déduit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^3(\mathrm{X}) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{H}^3(\mathrm{G}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathrm{X}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{H}^3(\iota_r) & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{H}^1(\iota_{r-1}) \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}^{c-1} & \longrightarrow & \mathrm{H}^3(\mathrm{D}_r) & \xrightarrow{\pi'^*} & \mathrm{H}^3(\mathrm{Y}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathrm{D}_{r-1})\ ,
\end{array}$$

où c est le nombre de composantes connexes de D_{r-1}. En particulier, le conoyau de l'injection $\mathrm{H}^3(\iota_r, \mathbf{Z})$ contient $\mathbf{Z}^{c-1}$: il peut être arbitrairement grand et ne peut être contrôlé seulement par une condition sur $\delta(r)$.

Exemple 2.6. On garde les notations de l'exemple 1.4. et on suppose $g-(s+1+[\frac{m}{2}])(g-d+[\frac{m}{2}]) \geq \varepsilon(m)$. Le théorème entraîne que la restriction $\mathrm{H}^p(\mathrm{J}_d, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{W}^s_d, \mathbf{Z})$ est bijective pour tout $p \leq m$. Soit $\alpha : \mathrm{C}_d \to \mathrm{J}_d$ l'application d'Abel-Jacobi. La variété $\mathrm{C}^s_d = \alpha^{-1}(\mathrm{W}^s_d)$ paramètre les diviseurs effectifs D sur C tels que $h^0(\mathrm{C}, \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})) > s$ ([ACGH], IV, § 1). Avec les notations de § 1, on a un diagrame commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}\mathrm{S} & \xrightarrow{\widetilde{\pi}} & \mathbf{P}\mathrm{E} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow \\ \mathrm{G} = \mathrm{G}(s+1, \mathrm{E}) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{J}_d \end{array}$$

qui induit par restriction le diagrame commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tau^{-1}(\mathrm{G}^s_d) & \xrightarrow{\widetilde{\pi}'} & \mathrm{C}^s_d \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathrm{Y} = \mathrm{G}^s_d & \xrightarrow{\pi'} & \mathrm{W}^s_d \end{array}$$

La fibre de $\widetilde{\pi}'$ en un point D est la grassmannienne $\mathrm{G}(s, \mathrm{H}^0(\mathrm{C}, \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(\mathrm{D}))/\mathbf{C}\cdot s_{\mathrm{D}})$. Le raisonnement de la démonstration du th. 2.2 s'applique aux morphismes $\widetilde{\pi}$ et $\widetilde{\pi}'$: *si* $g-(s+1+[\frac{m}{2}])(g-d+[\frac{m}{2}]) \geq \varepsilon(m)$, la restriction $\mathrm{H}^p(\mathbf{P}\mathrm{E}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{C}^s_d, \mathbf{Z})$ est bijective pour $p \leq m$; comme la restriction $\mathrm{H}^p(\mathbf{P}\mathrm{E}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{C}_d, \mathbf{Z})$ est bijective pour $p < d$ (ex. 1.4), on en déduit que *la restriction* $\mathrm{H}^p(\mathrm{C}_d, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{C}^s_d, \mathbf{Z})$ *est bijective pour* $p \leq m$.

3. Groupes de Picard et cohomologie du faisceau structural

Pour obtenir des informations sur la cohomologie de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}_r}$ connaissant celle du faisceau $\mathbf{C}_{\mathrm{D}_r}$, il est utile d'avoir des informations sur les applications naturelles

$$\alpha^p_{\mathrm{D}_r} : \mathrm{H}^p(\mathrm{D}_r, \mathbf{C}_{\mathrm{D}_r}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{D}_r, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_r}) .$$

La théorie de Hodge entraîne qu'elles sont surjectives si D_r est lisse, ce qui n'est malheureusement que rarement le cas. Par les travaux de du Bois, Kollár et Steenbrink ([K], cor. 12.9), cela reste vrai si D_r n'a que des singularités rationnelles, ce qui n'est le cas que dans la situation générique (les singularités déterminantielles sont rationnelles). Nous démontrons un résultat similaire avec des hypothèses plus faibles; nous dirons qu'un schéma X *vérifie la propriété* (P_p) s'il est régulier en codimension p et de profondeur $> p$ en ses points fermés de codimension $> p$. Un schéma normal vérifie (P_1).

Proposition 3.1.– *Soit* X *une variété projective vérifiant la propriété* (P_p). *L'application* α_{X}^p *est surjective et*

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \simeq \mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^0\,\mathrm{Gr}_p^{\mathrm{W}}\,\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C})\ .$$

Démonstration. Si X est de dimension $\leq p$, il est régulier et la proposition est claire. Supposons donc X de dimension $> p$. Soit L un faisceau inversible ample sur X. Comme X est de profondeur $> p$ en ses points fermés, il existe par [G2], Exp. XII, cor. 1.4, un entier m_0 tel que $\mathrm{H}^i(\mathrm{X},\mathrm{L}^{-m}) = 0$ pour $i \leq p$ et $m \geq m_0$. Le sous-schéma Y de X défini par l'annulation de p sections générales de L^{m_0} est régulier et, si ι est l'inclusion de Y dans X, la restriction $\mathrm{H}^p(\iota,\mathcal{O})$ est injective.

Considérons les complexes $\underline{\Omega}_{\mathrm{X}}^0$ et $\underline{\Omega}_{\mathrm{Y}}^0$ construits par du Bois dans [dB]. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{X}}^p} & \mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) & \xrightarrow{\beta_{\mathrm{X}}^p} & \mathrm{H}^p(\mathrm{X},\underline{\Omega}_{\mathrm{X}}^0) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^p(\iota,\mathcal{O})} & & \downarrow \\
\mathrm{H}^p(\mathrm{Y},\mathbf{C}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{Y}}^p} & \mathrm{H}^p(\mathrm{Y},\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}) & \xrightarrow{\beta_{\mathrm{Y}}^p} & \mathrm{H}^p(\mathrm{Y},\underline{\Omega}_{\mathrm{Y}}^0)\ ,
\end{array}$$

où β_{Y}^p est bijective car Y est lisse, et $\mathrm{H}^p(\iota,\mathcal{O})$ est injective comme on vient de le voir, de sorte que β_{X}^p est injective. Mais $\beta_{\mathrm{X}}^p \circ \alpha_{\mathrm{X}}^p$ est surjective car X est propre, donc β_{X}^p est surjective, donc bijective, et α_{X}^p est surjective.

Soit $\pi : \widetilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ une désingularisation de X. Comme ι se factorise à travers π, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{rccccc}
& \mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^p(\pi,\mathbf{C})} & \mathrm{H}^p(\widetilde{\mathrm{X}},\mathbf{C}) & & \\
& {\scriptstyle \alpha_{\mathrm{X}}^p}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_{\widetilde{\mathrm{X}}}^p}\downarrow & & \\
\mathrm{H}^p(\iota,\mathcal{O}): & \mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^p(\pi,\mathcal{O})} & \mathrm{H}^p(\widetilde{\mathrm{X}},\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{X}}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{Y},\mathcal{O}_{\mathrm{Y}})\ ,
\end{array}$$

qui entraîne que $\mathrm{H}^p(\pi,\mathcal{O})$ est injective. Le noyau de $\mathrm{H}^p(\pi,\mathbf{C})$ est $\mathrm{W}_{p-1}\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C})$ ([De], prop. 8.2.5); on en déduit $\alpha_{\mathrm{X}}^p(\mathrm{W}_{p-1}\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C})) = 0$ et un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gr}_p^{\mathrm{W}}\,\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C}) & \hookrightarrow & \mathrm{H}^p(\widetilde{\mathrm{X}},\mathbf{C}) \\
{\scriptstyle \bar{\alpha}_{\mathrm{X}}^p}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_{\widetilde{\mathrm{X}}}^p}\downarrow \\
\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^p(\pi,\mathcal{O})} & \mathrm{H}^p(\widetilde{\mathrm{X}},\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{X}}})\ .
\end{array}$$

Le noyau de $\bar{\alpha}_{\mathrm{X}}^p$ est donc

$$\mathrm{Gr}_p^{\mathrm{W}}\,\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C}) \cap \mathrm{Ker}\,\alpha_{\widetilde{\mathrm{X}}}^p = \mathrm{Gr}_p^{\mathrm{W}}\,\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C}) \cap \mathrm{F}^1\mathrm{H}^p(\widetilde{\mathrm{X}},\mathbf{C})\ .$$

Comme les morphismes de structures de Hodge sont stricts, le membre de droite est $\mathrm{F}^1\,\mathrm{Gr}_p^{\mathrm{W}}\,\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathbf{C})$, ce qui prouve la proposition. ■

Corollaire 3.2.– *Soient* X *et* Y *des variétés projectives et* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un morphisme. On suppose que* X *vérifie la propriété* (P_p) *.*

a) *Si* $\mathrm{H}^p(f, \mathbf{C})$ *est injective, il en est de même de* $\mathrm{H}^p(f, \mathcal{O})$ *.*

b) *Si* Y *vérifie la propriété* (P_p) *et que* $\mathrm{H}^p(f, \mathbf{C})$ *est bijective, il en est de même de* $\mathrm{H}^p(f, \mathcal{O})$ *.*

Démonstration. Soit $\pi : \widetilde{\mathrm{Y}} \to \mathrm{Y}$ une désingularisation de Y . La composée

$$\mathrm{Gr}_p^{\mathrm{W}} \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_p^{\mathrm{W}} \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^p(\widetilde{\mathrm{Y}}, \mathbf{C})$$

est injective car le morphisme de droite l'est par [De], prop. 8.2.5.2 et le morphisme de gauche par hypothèse, puisque les morphismes de structures de Hodge mixtes sont stricts. On en déduit que l'application induite

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^0 \mathrm{Gr}_p^{\mathrm{W}} \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{F}}^0 \mathrm{H}^p(\widetilde{\mathrm{Y}}, \mathbf{C}) \ ,$$

qui par la proposition s'identifie à $\mathrm{H}^p(\pi \circ f, \mathcal{O})$, est aussi injective, d'où a). Le b) résulte du fait que les morphismes de structures de Hodge mixtes sont stricts. ■

On veut maintenant montrer un résultat analogue pour les groupes de Picard. Si X est une variété projective, on note $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$ son groupe de Picard, $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{X})$ la composante connexe de l'élément neutre, et $\mathrm{NS}(\mathrm{X})$ le quotient $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})/\mathrm{Pic}^0(\mathrm{X})$; c'est un sous-groupe de $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbf{Z})$, il est abélien de type fini. Si X est normale, $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{X})$ est une variété abélienne ([G1], cor. 3.2) dont l'espace tangent à l'origine est $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ et le groupe $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$ est isomorphe à $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{X}) \oplus \mathrm{NS}(\mathrm{X})$.

Proposition 3.3.– *Soient* X *et* Y *des variétés projectives irréductibles, avec* X *normale, et* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un morphisme.*

a) *Si* $\mathrm{H}^1(f, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ *est injective pour tout entier* ℓ *premier,* $\mathrm{Pic}^0(f)$ *est injective.*

b) *Si* $\mathrm{H}^1(f, \mathbf{Z})$ *est bijective et que* $\mathrm{H}^2(f, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ *est injective pour tout entier* ℓ *premier,* $\mathrm{Pic}(f)$ *est injective et son conoyau est sans torsion ; si de plus* Y *est normale,* $\mathrm{Pic}^0(f)$ *est bijective.*

c) *Si* X *vérifie* (P_2) *, que* Y *est normale et que* $\mathrm{H}^1(f, \mathbf{Z})$ *et* $\mathrm{H}^2(f, \mathbf{Z})$ *sont bijectives,* $\mathrm{Pic}(f)$ *est bijective.*

Démonstration. Pour tout entier premier ℓ, on a un diagramme commutatif issu des suites exactes $0 \to \mu_\ell \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\cdot)^\ell} \mathbb{G}_m \to 0$ pour X et Y :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^*) & \to & \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) & \to & \mathrm{Pic}(\mathrm{X}) & \xrightarrow{\times \ell} & \mathrm{Pic}(\mathrm{X}) & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^0(f, \mathcal{O}^*)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^1(f, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pic}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pic}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^2(f, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})} \\
\mathrm{H}^0(\mathrm{Y}, \mathcal{O}_{\mathrm{Y}}^*) & \to & \mathrm{H}^1(\mathrm{Y}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) & \to & \mathrm{Pic}(\mathrm{Y}) & \xrightarrow{\times \ell} & \mathrm{Pic}(\mathrm{Y}) & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{Y}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})
\end{array}$$

Les hypothèses de a) entraînent que la multiplication par ℓ est injective sur le noyau de $\operatorname{Pic}(f)$, donc sur celui de $\operatorname{Pic}^0(f)$, qui est ainsi sans torsion. Comme c'est un sous-groupe d'une variété abélienne, il est nul, d'où a).

Sous les hypothèses de b), $\mathrm{NS}(f)$ est injective, donc aussi $\operatorname{Pic}(f)$ par a). Le diagramme ci-dessus montre que la multiplication par ℓ est injective sur le conoyau de $\operatorname{Pic}(f)$, qui est donc sans torsion. Si Y est normale, le cor. 3.2 montre que l'application tangente à $\operatorname{Pic}^0(f)$ est bijective, d'où b).

Sous les hypothèses de c), le cor. 3.2 entraîne que $\mathrm{H}^1(f,\mathcal{O})$ est bijective et $\mathrm{H}^2(f,\mathcal{O})$ injective. Une chasse au diagramme issu des suites exactes exponentielles $0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$ pour X et Y permet de conclure. ∎

Plaçons-nous dans la situation du § 1, en supposant pour simplifier X lisse. Le cor. 3.2 et (2.1) entraînent que $\mathrm{H}^p(\iota_r,\mathcal{O})$ est injective pour $p \leq \delta(r)$. Si D_r est normal et $\delta(r) \geq 2$, l'application $\mathrm{H}^1(\iota_r,\mathcal{O})$ est bijective par le th. 2.2 et le cor. 3.2. Plus généralement, si $\delta(r-[p/2]) \geq \varepsilon(p)$ et que D_r est non singulier en codimension p et a la dimension attendue (donc qu'il est de Cohen-Macaulay), $\mathrm{H}^p(\iota_r,\mathcal{O})$ est bijective. C'est aussi le cas pour $p < \delta(r)$ lorsque D_r est lisse et D_{r-1} vide par (1.3).

Il est tentant de conjecturer (comme dans [Ma], p. 415) que $\mathrm{H}^p(\iota_r,\mathcal{O})$ est bijective pour $p < \delta(r)$. Laytimi a obtenu dans [L] des résultats dans ce sens en utilisant des théorèmes d'annulation ; sous l'hypothèse que D_r a la dimension attendue, ils entraînent la conjecture lorsque X est une variété torique ou abélienne, ou lorsque $r = \min\{e,f\}-1$, ou lorsque $e = f = r+2$ (*cf.* aussi [Ma], où, sous des hypothèses plus restrictives sur E et F, la conjecture est montrée avec les mêmes méthodes).

Corollaire 3.4.– *On se place dans la situation du § 1, avec* X *localement intersection complète normale.*

a) *Si* $\delta(r) \geq 1$, *l'application* $\operatorname{Pic}^0(\iota_r)$ *est injective.*

b) *Si* $\delta(r) \geq 2$, *l'application* $\operatorname{Pic}(\iota_r)$ *est injective et son conoyau est sans torsion ; si de plus* D_r *est normale,* $\operatorname{Pic}^0(\iota_r)$ *est bijective.*

c) *Si* D_r *est normale,* X *non singulière en codimension* 2, *et* $\delta(r) \geq 3$,

- *si* D_{r-1} *est vide et* $0 < r < e$, *on a* $\operatorname{Pic}(\mathrm{D}_r) \simeq \operatorname{Pic}(\mathrm{X}) \oplus \mathbf{Z}[\det(\operatorname{Ker}(u|_{\mathrm{D}_r}))]$;
- *si* D_{r-1} *n'est pas vide ou si* $r = 0$, *l'application* $\operatorname{Pic}(\iota_r)$ *est bijective.*

Démonstration. Les points a) et b), ainsi que le deuxième cas du point c), découlent de la proposition, du th. 2.2 et de la rem. 2.5. Pour le premier cas du point c), on applique le raisonnement de la démonstration de la proposition au diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{H}^1(\mathrm{X},\mathbf{Z}) & \to & \mathrm{H}^1(\mathrm{X},\mathcal{O}_\mathrm{X}) & \to & \operatorname{Pic}(\mathrm{X}) \oplus \mathbf{Z} & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{X},\mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z} & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{X},\mathcal{O}_\mathrm{X}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^1(\iota_r,\mathbf{Z})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^1(\iota_r,\mathcal{O})} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^2(\iota_r,\mathcal{O})} \\
\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_r,\mathbf{Z}) & \to & \mathrm{H}^1(\mathrm{D}_r,\mathcal{O}_{\mathrm{D}_r}) & \to & \operatorname{Pic}(\mathrm{D}_r) & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{D}_r,\mathbf{Z}) & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{D}_r,\mathcal{O}_{\mathrm{D}_r})
\end{array}$$

Ceci démontre le corollaire. ■

Ce résultat est bien sûr à rapprocher du théorème de Lefschetz de Grothendieck ([G2], Exp. XII, cor. 3.6) qui démontre le point c) dans le cas $e = f = 1$ et $r = 0$, en toute caractéristique (moyennant une hypothèse d'annulation de certains groupes de cohomologie qui découle du théorème de Kodaira en caractéristique 0 et pour X lisse) et sans hypothèse sur les singularités de D_0. La méthode de Grothendieck semble difficile à généraliser, même dans le cas E trivial (et F ample); on aurait en effet besoin de l'annulation des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathrm{S}^k\mathrm{F}^*)$ pour $i = 1, 2$ et $k > 0$, alors que seuls les groupes $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathrm{S}^k\mathrm{F}^* \otimes \det(\mathrm{F}^*))$ sont nuls en général.

Exemple 3.5. Soient C une courbe projective lisse de genre g et d un entier vérifiant $3 \leq d \leq g-1$. La variété W^0_d définie dans l'exemple 1.4 est normale, de la dimension attendue d. Si C n'a pas de g^1_d, on a $\mathrm{Pic}(\mathrm{W}^0_d) \simeq \mathrm{Pic}(\mathrm{J}_d) \oplus \mathbf{Z}[\mathrm{W}^0_{d-1}]$.

Supposons à partir de maintenant que C a un g^1_d. La restriction $\mathrm{Pic}(\mathrm{J}_d) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{W}^0_d)$ est bijective par le cor. 3.4.

Si C n'est pas hyperelliptique, cela entraîne que pour tout point x de C, le diviseur de Weil $\mathrm{W}^0_{d-1} + x$ de W^0_d n'est pas $\mathbf{Q}$-Cartier : en effet, si $\alpha : \mathrm{C}_d \to \mathrm{W}^0_d$ est l'application d'Abel-Jacobi, il découle de [M] (ou de l'exemple 1.4) qu'aucun multiple non nul de $\alpha^{-1}(\mathrm{W}^0_{d-1} + x) = \mathrm{C}_{d-1} + x$ n'est dans $\alpha^* \mathrm{Pic}(\mathrm{J}_d)$. Comme le complémentaire de $\alpha^{-1}((\mathrm{W}^0_d)_{\mathrm{lisse}})$ dans C_d est de codimension au moins 2, le groupe de Picard de $(\mathrm{W}^0_d)_{\mathrm{lisse}}$ est isomorphe à celui de C_d, de sorte que la restriction $\mathrm{Pic}(\mathrm{W}^0_d) \to \mathrm{Pic}((\mathrm{W}^0_d)_{\mathrm{lisse}})$ est injective de conoyau isomorphe à $\mathbf{Z}$.

En revanche, si C est hyperelliptique d'involution associée τ, que Θ est un diviseur thêta convenable sur J_d, et que x est un point de C tel que $\tau(x) \neq x$, on a

$$(\Theta + x - \tau(x)) \cdot \mathrm{W}^0_d = (g - d + 1)\big(\mathrm{W}^0_{d-1} + x\big) \ .$$

En particulier, $\mathrm{W}^0_{d-1} + x$ n'est pas un diviseur de Cartier dans W^0_d (puisque la classe de Θ n'est pas divisible dans $\mathrm{Pic}(\mathrm{J}_d)$), mais est $\mathbf{Q}$-Cartier. Comme le complémentaire de $\alpha^{-1}((\mathrm{W}^0_d)_{\mathrm{lisse}})$ dans C_d est un diviseur irréductible, le noyau de la restriction $\mathrm{Pic}(\mathrm{C}_d) \to \mathrm{Pic}(\pi^{-1}((\mathrm{W}^0_d)_{\mathrm{lisse}}))$ est engendré par la classe de ce diviseur, et la restriction $\mathrm{Pic}(\mathrm{W}^0_d) \to \mathrm{Pic}((\mathrm{W}^0_d)_{\mathrm{lisse}})$ est injective de conoyau isomorphe à $\mathbf{Z}/(g-d+1)\mathbf{Z}$.

II. Lieux de dégénérescence antisymétriques

4. Le résultat de Tu

Soit X une variété complexe projective irréductible. Soient L un fibré en droites et E un fibré vectoriel de rang e sur X muni d'une forme antisymétrique $u : \mathrm{E} \otimes \mathrm{E} \to \mathrm{L}$, c'est-à-dire d'une section de $\wedge^2\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$, ou encore d'un morphisme antisymétrique $v : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$. On considère

$$\mathrm{A}_r = \{x \in \mathrm{X} \mid \mathrm{rg}(u_x) \leq 2r\}_{\mathrm{red}}$$

et on pose $\alpha(r) = \dim(\mathrm{X}) - \binom{e-2r}{2}$. La forme antisymétrique u_x est de rang $\leq 2r$ si et seulement s'il existe un sous-espace isotrope de E_x de dimension $e-r$. On introduit donc de nouveau le fibré en grassmanniennes $\pi : \mathrm{G} = \mathrm{G}(e-r, \mathrm{E}) \to \mathrm{X}$ et le lieu des zéros Y de la composée $\mathcal{O}_{\mathrm{G}} \xrightarrow{\pi^* u} \wedge^2 \pi^*\mathrm{E}^* \otimes \pi^*\mathrm{L} \xrightarrow{\text{rest.}} \wedge^2 \mathrm{S}^* \otimes \pi^*\mathrm{L}$. Le morphisme π induit par restriction un morphisme $\pi' : \mathrm{Y} \to \mathrm{A}_r$ propre surjectif. En appliquant la méthode de [FL] à une construction de Pragacz ([P1]), Tu démontre dans [T], p. 391 (il fait l'hypothèse que L est trivial, mais sa démonstration marche en général) que *si* $\wedge^2\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ *est ample,* $\mathrm{H}^q(\mathrm{G}-\mathrm{Y}, \mathbf{F})$ s'annule pour $q \geq \dim(\mathrm{X}) + \binom{e}{2} + r$. On en déduit, comme dans le §1, *si* X *est localement intersection complète,* $\mathrm{H}^p(\mathrm{G}, \mathrm{Y}; \mathbf{F}) = 0$ pour $p \leq \alpha(r)$. Notons ι_r l'injection de A_r dans X et ι celle de Y dans G. Dans le diagramme commutatif (où les groupes de cohomologie sont à coefficients dans $\mathbf{F}$)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(\mathrm{X}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^p(\pi)} & \mathrm{H}^p(\mathrm{G}) \\ {\scriptstyle \mathrm{H}^p(\iota_r)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^p(\iota)} \\ \mathrm{H}^p(\mathrm{A}_r) & \xrightarrow{\mathrm{H}^p(\pi')} & \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}) \end{array},$$

$\mathrm{H}^p(\pi)$ est injective; pour $p \leq \alpha(r)$, le résultat de Tu montre que $\mathrm{H}^p(\iota)$ l'est aussi, et il en donc de même de $\mathrm{H}^p(\iota_r)$.

On suppose A_{r-1} vide. On note c l'inverse dans $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{A}_r, \mathbf{Z})$ de la classe de Chern totale du fibré vectoriel $\mathrm{Ker}(v|_{\mathrm{A}_r})$ (on montrera dans la prop. 6.4 que $c_1, c_3, c_5, \ldots$ sont dans le sous-anneau $\iota_r^*\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}, \mathbf{Z})[c_2, c_4, \ldots]$ de $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{A}_r, \mathbf{Z})$). Puisque $\mathrm{Ker}(v|_{\mathrm{A}_r})$ est de rang $e-2r$, on a $\Delta_\lambda(c) = 0$ si $\lambda_{e-2r+1} \neq 0$. Enfin, si λ et μ sont des partitions, on notera $\lambda\mu$ la partition obtenue en réarrangeant les parts de λ et de μ en ordre décroissant.

Théorème 4.1.– *Soit* X *une variété projective irréductible localement intersection complète. Soient* E *un fibré vectoriel et* L *un fibré en droites sur* X*, avec* $\wedge^2\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ ample, *et* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ *un morphisme antisymétrique. Supposons* $\mathrm{A}_{r-1} = \varnothing$ *; l'application*

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\bigoplus_{\substack{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots) \\ r\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq 0}} \mathrm{H}^{p-4|\lambda|}(\mathrm{X}, \mathbf{F}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{A}_r, \mathbf{F}) \\ \sum_\lambda \alpha_\lambda & \longmapsto & \sum_\lambda \Delta_{\lambda\lambda}(c) \cdot \iota_r^*\alpha_\lambda \end{array}$$

est injective pour $p \leq \alpha(r)$, *bijective pour* $p < \alpha(r)$.

Démonstration. On a

$$\pi'^*\Big(\sum_\lambda \Delta_{\lambda\lambda}(c) \cdot \iota_r^*\alpha_\lambda\Big) = \iota^*\Big(\sum_\lambda \Delta_{\lambda\lambda}(c) \cdot \pi^*\alpha_\lambda\Big) \ ;$$

l'application $\sum_\lambda \alpha_\lambda \mapsto \sum_\lambda \Delta_{\lambda\lambda}(c) \cdot \pi^*\alpha_\lambda$, à valeurs dans $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{G}, \mathbf{F})$, est injective, ι^* est injective pour $p \leq \alpha(r)$, donc aussi l'application du théorème. On conclut avec le lemme suivant, où les groupes de cohomologie sont à valeurs dans $\mathbf{F}$. ∎

Lemme 4.2.– *On a pour* $p < \alpha(r)$

$$\sum_{r\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq 0} h^{p-4|\lambda|}(\mathrm{X}) = h^p(\mathrm{A}_r)\ .$$

Démonstration. Puisque A_{r-1} est vide, $\pi' : \mathrm{Y} \to \mathrm{A}_r$ est le fibré en grassmanniennes isotropes $\mathrm{G}^0(r, \iota_r^*\mathrm{E}/\operatorname{Ker}(v|_{\mathrm{A}_r}))$. Notons

$$\mathcal{P}(q) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid r \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0\ ,\ |\lambda| = q\}$$

et

$$\mathcal{S}(q) = \{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \mid r \geq \mu_1 > \cdots > \mu_s > 0\ ,\ |\mu| = q\ ,\ s \geq 0\}\ .$$

On a l'égalité (*cf.* (9.1))

$$h^p(\mathrm{Y}) = \sum_{q\geq 0} h^{p-2q}(\mathrm{A}_r)\operatorname{Card}(\mathcal{S}(q))\ .$$

Procédant par récurrence sur p, on obtient

$$\begin{aligned} h^p(\mathrm{A}_r) &= h^p(\mathrm{Y}) - \sum_{q>0} h^{p-2q}(\mathrm{A}_r)\operatorname{Card}(\mathcal{S}(q)) \\ &= h^p(\mathrm{Y}) - \sum_{q>0,\ q'\geq 0} h^{p-2q-4q'}(\mathrm{X})\operatorname{Card}(\mathcal{S}(q))\operatorname{Card}(\mathcal{P}(q'))\ . \end{aligned}$$

On construit une bijection entre $\bigcup_{q+2q'=q''}\big(\mathcal{S}(q)\times\mathcal{P}(q')\big)$ et $\mathcal{P}(q'')$ en associant à un couple (μ, λ) la partition $\lambda\lambda\mu$, la bijection réciproque envoyant une partition de $\mathcal{P}(q'')$ qui s'écrit $(\alpha_1)^{a_1}\cdots(\alpha_t)^{a_t}$, avec $r \geq \alpha_1 > \cdots > \alpha_t > 0$, sur la partition stricte composée des α_i pour lesquels a_i est impair et la partition $(\alpha_1)^{[a_1/2]}\cdots(\alpha_t)^{[a_t/2]}$. On en déduit

$$\begin{aligned} h^p(\mathrm{A}_r) &= h^p(\mathrm{Y}) - \sum_{q''\geq 0} h^{p-2q''}(\mathrm{X})\operatorname{Card}(\mathcal{P}(q'')) + \sum_{q'\geq 0} h^{p-4q'}(\mathrm{X})\operatorname{Card}(\mathcal{P}(q')) \\ &= h^p(\mathrm{Y}) - h^p(\mathrm{G}) + \sum_{q'\geq 0} h^{p-4q'}(\mathrm{X})\operatorname{Card}(\mathcal{P}(q')) \end{aligned}$$

ce qui, avec le résultat de Tu selon lequel $h^p(\mathrm{G}) = h^p(\mathrm{Y})$, prouve le lemme. ∎

5. Un théorème de Lefschetz

On a de nouveau un théorème analogue au th. 2.2. Soit m un entier; on définit $\varepsilon'(m)$ comme le reste de la division de m par 4 si $m \geq 4$, et comme $m+1$ si $0 \leq m < 4$. Rappelons que ι_r désigne l'injection de A_r dans X.

Théorème 5.1.– *Soit* X *une variété projective irréductible localement intersection complète. Soient* E *un fibré vectoriel et* L *un fibré en droites sur* X*, avec* $\wedge^2 \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ ample, *et* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ *un morphisme antisymétrique. Supposons* $[\frac{m}{4}] \leq r$ *et* $\alpha(r-[\frac{m}{4}]) \geq \varepsilon'(m)$ *; l'application* $\mathrm{H}^p(\iota_r, \mathbf{Z})$ *est bijective pour* $p \leq m$ *.*

Démonstration. Elle suit celle du th. 2.2 : on compare de nouveau les suites spectrales pour $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ et sa restriction $\pi' : \mathrm{Y} \to \mathrm{A}_r$. La fibre de π' au-dessus d'un point de $\mathrm{A}_l - \mathrm{A}_{l-1}$ est la Grassmannienne LG des sous-espaces isotropes de dimension $e-r$ d'un espace vectoriel de dimension e muni d'une forme antisymétrique de rang $2l$, dont la cohomologie est étudiée dans le §8. Elle est en particulier nulle en degré impair. Les faisceaux $\mathrm{R}^q\pi_*\mathbf{Z}$ et $\mathrm{R}^q\pi'_*\mathbf{Z}$ sont donc nuls pour q impair. De plus, il découle de la prop. 8.2 que la restriction $\mathrm{R}^{2q}\pi_*\mathbf{Z} \to \mathrm{R}^{2q}\pi'_*\mathbf{Z}$ est surjective et que son noyau $\mathcal{K}_{2q}$ est nul sur $\mathrm{A}_{r-[\frac{q}{2}]}$. La démonstration procède par récurrence sur m ; on peut supposer $e \geq 2r+2$, auquel cas on a les inégalités

$$\alpha(t) \geq \alpha(t-s) + s(2s+3) \tag{5.2}$$

$$\varepsilon'(t) + [\frac{t}{4}](2[\frac{t}{4}]+3) > t\ . \tag{5.3}$$

Les étapes de la démonstration sont les mêmes que celles du th. 2.2.

Premier pas. *Supposons* $0 \leq p < m$ *et* $[\frac{q}{2}] - [\frac{p}{4}] \leq r$*. On a*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\mathcal{K}_{2q}) = 0 &\qquad \text{si} \quad \alpha(r-[\frac{q}{2}]) \geq 0\ ;\\ \mathrm{H}^{p+1}(\mathcal{K}_{2q}) = 0 &\qquad \text{si} \quad \alpha(r-[\frac{q}{2}]-[\frac{p}{4}]) \geq \varepsilon'(p)\ . \end{aligned}$$

On procède comme dans la démonstration du th. 2.2. La seule chose à vérifier est que $\alpha(r-[\frac{q}{2}]-[\frac{p}{4}]) \geq \varepsilon'(p)$ entraîne $\alpha(r-[\frac{q}{2}]) > p$, mais cela découle de (5.2) et (5.3).

Deuxième pas. *Supposons* $[\frac{m}{4}] \leq r$ *et* $\alpha(r-[\frac{m}{4}]) \geq \varepsilon'(m)$*. L'application naturelle* $\iota_\infty^{p,q} : {}^{\pi}\mathrm{E}_\infty^{p,q} \to {}^{\pi'}\mathrm{E}_\infty^{p,q}$ *est injective lorsque* $p < m$ *et* $p+q \leq m$*. D'autre part,* ${}^{\pi'}\mathrm{E}_\infty^{m,0} \simeq {}^{\pi'}\mathrm{E}_2^{m,0} \simeq \mathrm{H}^m(\mathrm{A}_r, \mathbf{Z})$*.*

On procède comme dans la démonstration du th. 2.2. La seule chose à vérifier est que si $p+2q \leq m$, l'hypothèse $\alpha(r-[\frac{m}{4}]) \geq \varepsilon'(m)$ entraîne $\alpha(r-[\frac{q}{2}]) \geq 0$ et, si $p+2q < m$,

$$\alpha(r-[\frac{q}{2}]-[\frac{p}{4}]) \geq \varepsilon'(p)\ ;$$

si $[\frac{q}{2}]+[\frac{p}{4}] < [\frac{m}{4}]$, cela découle de (5.2), et si $[\frac{q}{2}]+[\frac{p}{4}] = [\frac{m}{4}]$, on a $\varepsilon'(p) \leq \varepsilon'(m)$.

Conclusion. On conclut comme dans la démonstration du th. 2.2, en vérifiant que si $p+q \leq m$ et $\alpha(r-[\frac{m}{4}]) \geq \varepsilon'(m)$, on a $\alpha(r) > m$, ce qui résulte de (5.2) et (5.3). ∎

Comme dans I, le cor. 3.2 entraîne que $\mathrm{H}^p(\iota_r, \mathcal{O})$ est injective pour $p \leq \alpha(r)$. Si $\alpha(r - [\frac{p}{4}]) \geq \varepsilon'(p)$ et que A_r est non singulier en codimension p et a la dimension attendue, $\mathrm{H}^p(\iota_r, \mathcal{O})$ est bijective. C'est aussi le cas pour $p < \alpha(r)$ lorsque D_r est lisse et D_{r-1} vide par le th. 4.1. On peut conjecturer (comme dans [Ma], p. 415) que $\mathrm{H}^p(\iota_r, \mathcal{O})$ est bijective pour $p < \alpha(r)$ (*cf.* [Ma], où cette conjecture est montrée sous des hypothèses plus restrictives).

Corollaire 5.4.– *On conserve les hypothèses du théorème, et on suppose en outre* X *normale.*

a) *Si* $\alpha(r) \geq 1$, *l'application* $\mathrm{Pic}^0(\iota_r)$ *est injective.*

b) *Si* $\alpha(r) \geq 2$, *l'application* $\mathrm{Pic}(\iota_r)$ *est injective et son conoyau est sans torsion ; si de plus* A_r *est normale,* $\mathrm{Pic}^0(\iota_r)$ *est bijective.*

c) *Si* A_r *est normale et* X *non singulière en codimension* 2, *et si* $\alpha(r) \geq 3$, *l'application* $\mathrm{Pic}(\iota_r)$ *est bijective.*

III. Lieux de dégénérescence orthogonaux

6. Un théorème de Bertini

Soient X un schéma connexe et V un fibré vectoriel de rang $2n$ sur X muni d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans un fibré en droites L. Soient E et F des sous-fibrés totalement isotropes maximaux de V. On considère les lieux

$$\mathrm{O}^r = \{x \in \mathrm{X} \mid \dim(\mathrm{E}_x \cap \mathrm{F}_x) \geq r \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{E}_x \cap \mathrm{F}_x) \equiv r \pmod 2\}_{\mathrm{red}} .$$

On notera que la parité de $\dim(\mathrm{E}_x \cap \mathrm{F}_x)$ reste constante ; en particulier, soit $\mathrm{X} = \mathrm{O}^0$ et $\mathrm{O}^{2r+1} = \varnothing$ pour tout r, soit $\mathrm{X} = \mathrm{O}^1$ et $\mathrm{O}^{2r} = \varnothing$ pour tout r. Le cas des lieux de dégénérescence antisymétriques est un cas particulier de celui-ci : si $v : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ est un morphisme antisymétrique, on munit le fibré $\mathrm{V} = \mathrm{E} \oplus (\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L})$ de la forme quadratique de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ à valeurs dans L. Les sous-fibrés $\mathrm{E} \oplus \{0\}$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, v)$ sont totalement isotropes maximaux et $\mathrm{A}_r = \mathrm{O}^{e-2r}$.

La « codimension attendue » de O^r est $\binom{r}{2}$. On aimerait obtenir des résultats analogues à ceux du § 4. Commençons par la connexité (dans le cas des lieux de dégénérescence antisymétriques, on notera que l'hypothèse « $\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ ample » de la proposition ci-dessous est plus forte que l'hypothèse « $\wedge^2 \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{L}$ ample » du résultat de Tu).

Proposition 6.1.– *Dans la situation ci-dessus, on suppose de plus que* X *est* d*-connexe, que* $\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{F}^* \otimes \mathrm{L}$ *est ample, et que* $\mathrm{X} = \mathrm{O}^k$. *Pour tout* $r \geq k$ *avec* $r - k$ *pair,* O^r *est* $(d - \binom{r}{2} + \binom{k}{2})$*-connexe.*

En particulier, si X *est irréductible de dimension* $> \binom{r}{2}$, *le lieu* O^r *est connexe.*

Démonstration. La démonstration est inspirée de [B]. Il suffit de traiter le cas $r = k+2$. Comme $\mathrm{E}_x \cap \mathrm{F}_x$ est le noyau en x de la composée $u : \mathrm{E} \subset \mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{F} \simeq \mathrm{F}^* \otimes \mathrm{L}$, on a $\mathrm{O}^r = \mathrm{D}_{n-r}(u) = \mathrm{D}_{n-r+1}(u)$, puisque la parité de $\dim(\mathrm{E}_x \cap \mathrm{F}_x)$ est celle de r. On a $\mathrm{X} = \mathrm{D}_{n-r+2}(u)$; la proposition 1.5 entraîne alors que O^r est

$$d - (r-1)^2 + (r-2)^2 = d - 2r + 3 = d - \binom{r}{2} + \binom{r-2}{2}$$

connexe. ∎

Exemples 6.2. 1) **Variétés de Prym.** Soit C une courbe projective lisse de genre g munie d'une involution σ sans point fixe. Le lieu $\mathrm{P} = \{[\mathrm{L}] \in \mathrm{J}_{g-1} \mid \mathrm{L} \otimes \sigma^*\mathrm{L} = \omega_\mathrm{C}\}$ a deux composantes connexes, la *variété de Prym* P^0, qui est une variété abélienne de dimension $p = (g-1)/2$, et sa translatée P^1, définies par $\mathrm{P}^j = \{[\mathrm{L}] \in \mathrm{P} \mid h^0(\mathrm{C},\mathrm{L}) \equiv j \pmod 2\}$.

Welters définit dans [W] les lieux $\mathrm{V}^s = \{[\mathrm{L}] \in \mathrm{P} \mid h^0(\mathrm{C},\mathrm{L}) \geq s\}$ [4], qui sont donc les traces dans P des lieux W^{s-1}_{2g-2} définis dans l'exemple 1.4; en tant que tels, ce sont des lieux de dégénérescence associés à un morphisme $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ où E et F sont des fibrés vectoriels sur P de même rang n et $\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est ample (ex. 1.4). Il est montré dans [Mu] que l'on peut construire un fibré vectoriel V de rang $2n$ sur P, muni d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans $\mathcal{O}_\mathrm{P}$, de façon que E et F^* soient des sous-fibrés totalement isotropes maximaux de V et que u soit la composée $\mathrm{E} \subset \mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{F}^* \simeq \mathrm{F}$. Les lieux V^s apparaissent alors comme des lieux de dégénérescence orthogonaux O^s auxquels on peut appliquer la proposition. On obtient que V^s *est connexe* (et même $\left(p - \binom{s}{2} - 1\right)$-connexe) *dès que sa dimension attendue* $p - \binom{s}{2}$ *est strictement positive* [5].

Welters montre dans [W] que *lorsque la paire* (C,σ) *est générale* et $s \geq 2$, le lieu V^s a la dimension attendue et son lieu singulier est V^{s+2}, qui est donc de codimension $\binom{s+2}{2} - \binom{s}{2} = 2s+1 > 1$. Comme V^s est $\left(p - \binom{s}{2} - 1\right)$-connexe, *il est irréductible.*

2) **Thêta-caractéristiques.** Soit $\pi : \mathcal{C} \to \mathrm{S}$ une famille plate de courbes projectives réduites munie d'une thêta-caractéristique, c'est-à-dire d'un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes 2} \simeq \omega_{\mathcal{C}/\mathrm{S}}$, et d'un diviseur effectif relatif $\mathcal{D}$ contenu dans le lieu où π est lisse. Il résulte de [Ha] que les

$$\{s \in \mathrm{S} \mid h^0(\mathcal{C}_s,\mathcal{L}_s) \geq r,\ h^0(\mathcal{C}_s,\mathcal{L}_s) \equiv r \pmod 2\}$$

sont des lieux de dégénérescence orthogonaux construits à partir des fibrés vectoriels $\mathrm{V} = \pi_*(\mathcal{L}(m\mathcal{D})/\mathcal{L}(-m\mathcal{D}))$, $\mathrm{E} = \pi_*(\mathcal{L}(m\mathcal{D}))$ et $\mathrm{F} = \pi_*(\mathcal{L}/\mathcal{L}(-m\mathcal{D}))$, où m est un entier assez grand. Je ne connais cependant pas d'exemple intéressant où $\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{F}^*$ est ample.

(6.3) Il est probable que les théorèmes de type Lefschetz 4.1 et 5.1 s'étendent au cas orthogonal. Je ne sais pas le démontrer et me contenterai de présenter deux indices qui laissent soupçonner que c'est en effet le cas.

[4] La sous-variété V^2 de P^0 est un diviseur qui définit une polarisation principale.

[5] Il est montré dans [B] que V^s n'est pas vide dès que sa dimension attendue est positive.

Dans toute la suite, on suppose $\mathrm{O}^{r+2} = \varnothing$; on note ι_r l'injection de O^r dans X. Sur O^r, on a une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow \iota_r^*\mathrm{E} \longrightarrow \iota_r^*\mathrm{F}^* \otimes \iota_r^*\mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{K}^* \otimes \iota_r^*\mathrm{L} \longrightarrow 0 \ ,$$

où K est de rang r. Comme dans § 4, on écrit $1/c(\mathrm{K}) = \sum c_i \in \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{O}^r, \mathbf{Z})$. Si l'analogue du th. 4.1 est vrai, les composantes de degré impair de c doivent être dans le sous-anneau engendré par la cohomologie de X et les composantes de degré pair. Nous allons montrer que c'est le cas, même au niveau des groupes de Chow.

Proposition 6.4.– *Tous les* c_i *sont dans le sous-anneau* $\iota_r^*\mathrm{A}^\bullet(\mathrm{X})[c_2, c_4, \ldots]$ *de* $\mathrm{A}^\bullet(\mathrm{O}^r)$.

Démonstration. On peut supposer, par le principe de scindage de [F2], § 2, que tous les fibrés en présence sont sommes directes de fibrés en droites, et enfin, en raisonnant comme dans *loc.cit.* p. 257, que X est un produit d'espaces projectifs. On a

$$c_m(\mathrm{E}/\mathrm{K}) = \sum_{i=0}^{m} c_i(\mathrm{E})c_{m-i} \quad , \quad c_m(\mathrm{F}/\mathrm{K}) = \sum_{i=0}^{m} c_i(\mathrm{F})c_{m-i} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}/\mathrm{K} \simeq (\mathrm{E}/\mathrm{K})^* \otimes \mathrm{L} \ .$$

Si m est un entier impair, on a les congruences suivantes modulo $\mathrm{A}^\bullet(\mathrm{X})[c_1, \ldots, c_{m-1}]$:

$$c_m \equiv c_m(\mathrm{F}/\mathrm{K}) = c_m((\mathrm{E}/\mathrm{K})^* \otimes \mathrm{L}) \equiv c_m((\mathrm{E}/\mathrm{K})^*) = -c_m(\mathrm{E}/\mathrm{K}) \equiv -c_m \ ,$$

c'est-à-dire $c_m \equiv 0$ puisque $\mathrm{A}^\bullet(\mathrm{X})$ est sans torsion. La proposition s'en déduit par récurrence. ∎

Remarques 6.5. 1) Si L est trivial, on peut montrer que pour tout entier m impair, on a dans $\mathrm{A}^m(\mathrm{O}^r)$ l'égalité $\sum_{i=0}^{m} \iota_r^* d_i \cdot c_{m-i} = 0$, où les $d_i \in \mathrm{A}^i(\mathrm{X})$ (avec $d_0 = 1$) sont les classes introduites dans [EG].

2) Supposons $\mathrm{X} = \mathrm{O}^0$. Localement, on peut représenter le morphisme associé $u : \mathrm{E} \hookrightarrow \mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{F} \simeq \mathrm{F}^* \otimes \mathrm{L}$ par une matrice antisymétrique dont le pfaffien définit le diviseur de Cartier O^2. Sur O^{2s}, on a $\det(\mathrm{K}) \simeq \mathrm{L}^{\otimes s} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{O}^{2s}}(-\mathrm{O}^2)$.

Enfin, je sais montrer l'analogue du th. 4.1 dans le cas très particulier des lieux O^r pour $r \leq 4$, mais seulement pour la cohomologie de degré $p < \dim(\mathrm{X}) - (r-1)^2$ (alors qu'on attend $p < \dim(\mathrm{X}) - \binom{r}{2}$).

IV. Cohomologie des grassmanniennes isotropes

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n muni d'une forme antisymétrique de rang $2r$. On note $\mathrm{LG}(d, \mathrm{V}; 2r)$, ou simplement LG, la grassmannienne des sous-espaces vectoriels isotropes de V de dimension d et S le sous-fibré tautologique de rang d sur LG.

7. Cas où la forme antisymétrique est non dégénérée ($n = 2r$)

L'anneau de cohomologie de LG est décrit dans [PR1], th. 1.4 : si $x_1, \ldots, x_d$ sont les racines de Chern de S et $h_0, h_1, h_2, \ldots$ les fonctions symétriques homogènes complètes définies par la série génératrice

$$\sum_{j\geq 0} h_j t^j = \prod_{i=1}^{d} (1 - tx_i)^{-1} ,$$

on a

$$\mathrm{H}^{2\bullet}(\mathrm{LG}(d,\mathrm{V}), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_d]^{\mathfrak{S}_d} / (h_j(x_1^2, \ldots, x_d^2),\ j > r - d) .$$

Cela signifie que $\mathrm{H}^{2\bullet}(\mathrm{LG}(d,\mathrm{V}), \mathbf{Z})$ est l'algèbre engendrée par $c_1(\mathrm{S}), \ldots, c_d(\mathrm{S})$, avec la relation

$$\frac{1}{c(\mathrm{S})c(\mathrm{S}^*)} = 0 \qquad \text{en degré} \quad \geq 2(r - d + 1) ,$$

qui provient du fait que le fibré $\mathrm{S}^\perp/\mathrm{S}$ est de rang $2(r - d)$.

(7.1) On a d'autre part

$$\mathrm{H}^{2\bullet}(\mathrm{G}(d,\mathrm{V}), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_d]^{\mathfrak{S}_d} / (h_j(x_1, \ldots, x_d),\ j > 2r - d) ,$$

de sorte que *la restriction*

$$\mathrm{H}^{2p}(\mathrm{G}(d,\mathrm{V}), \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^{2p}(\mathrm{LG}(d,\mathrm{V}), \mathbf{Z})$$

est surjective pour tout p et bijective pour $p \leq 2(r - d) + 1$ (et pour tout p si $d \leq 1$!), tandis que les groupes de cohomologie d'ordre impair sont tous nuls.

8. Cas général

On note $k = n - 2r$ la dimension du noyau K de la forme antisymétrique. On choisit un drapeau

$$0 = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{V}_n = \mathrm{V}$$

de façon que $\mathrm{V}_k = \mathrm{K}$ et $\mathrm{V}_{n-j} = \mathrm{V}_{k+j}^\perp$ pour $0 \leq j \leq r$, auquel est associé un groupe unipotent Γ qui agit sur LG de façon que les orbites soient ceux des sous-ensembles suivants qui ne sont pas vides :

$$\mathrm{O}_{\mathbf{c}} = \{\Lambda \in \mathrm{LG} \mid \dim(\Lambda \cap \mathrm{V}_j) = c_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, n\} ,$$

où $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ est une suite croissante d'entiers positifs. On a une surjection

$$\begin{array}{rcl} \pi_{\mathbf{c}} : \mathrm{O}_{c_1,\ldots,c_n} & \longrightarrow & \mathrm{O}_{c_{k+1}-c_k,\ldots,c_n-c_k} \\ \Lambda & \longmapsto & (\Lambda + \mathrm{K})/\mathrm{K} \end{array}$$

où l'orbite de droite est dans $\mathrm{LG}(d - c_k, \mathrm{V}/\mathrm{K})$, et de nouveau une surjection de $\pi_{\mathbf{c}}^{-1}(\Lambda_0)$ sur l'orbite $\mathrm{O}_{c_1,\ldots,c_k}$ dans la grassmannienne usuelle $\mathrm{G}(c_k, \mathrm{K})$, dont la fibre en Λ_1 s'identifie à $\mathrm{Hom}(\mathrm{K}/\Lambda_1, \Lambda_0)$. On en déduit

(8.1) $$\dim \mathrm{O}_{\mathbf{c}} = \dim \mathrm{O}_{c_{k+1}-c_k,\ldots,c_n-c_k} + \dim \mathrm{O}_{c_1,\ldots,c_k} + (k - c_k)(d - c_k) .$$

Posons, pour tout entier $p \geq 0$,

$$\mathrm{LG}_p = \bigcup_{\dim \mathrm{O}_{\mathbf{c}} \leq p} \mathrm{O}_{\mathbf{c}} \ .$$

Chaque $\overline{\mathrm{O}}_{\mathbf{c}}$ est stable par Γ ; c'est donc une réunion d'orbites qui est contenue dans $\mathrm{O}_{\mathbf{c}} \cup \mathrm{LG}_{\dim \mathrm{O}_{\mathbf{c}}-1}$. Il s'ensuit que chaque LG_p est fermé; d'autre part, le groupe Γ étant unipotent, les orbites sont des espaces affines. On obtient ainsi une décomposition cellulaire de LG au sens de [RX], p. 223. Les groupes d'homologie de LG d'ordre impair sont donc nuls, l'application classe de cycles $\mathrm{A}_\bullet(\mathrm{LG}) \to \mathrm{H}_{2\bullet}(\mathrm{LG}, \mathbf{Z})$ est un isomorphisme et le groupe de Chow de LG est abélien libre engendré par les classes des adhérences des orbites (*loc.cit.*, cor., p. 223). Cela entraîne, grâce à la formule (8.1),

$$\mathrm{A}_p(\mathrm{LG}) = \bigoplus_{c=\max(0,d-r)}^{c=\min(d,k)} \ \bigoplus_{p'+p''=p-(k-c)(d-c)} \big(\mathrm{A}_{p'}(\mathrm{G}(c,\mathrm{K})) \oplus \mathrm{A}_{p''}(\mathrm{LG}(d-c,\mathrm{V}/\mathrm{K}))\big) \ .$$

On peut décrire le groupe de Chow de $\mathrm{G} = \mathrm{G}(d,\mathrm{V})$ de façon analogue. Il découle de (7.1) que l'application

$$\rho : \mathrm{A}_\bullet(\mathrm{LG}) \longrightarrow \mathrm{A}_\bullet(\mathrm{G})$$

est surjective; elle est injective en degré p si

$$\mathrm{A}_{p''}(\mathrm{LG}(d-c,\mathrm{V}/\mathrm{K};2r)) \to \mathrm{A}_{p''}(\mathrm{G}(d-c,\mathrm{V}/\mathrm{K}))$$

l'est pour tout c compris entre $\max(0,d-r)$ et $\min(d,k)$ et tout $p'' \leq p-(k-c)(d-c)$ c'est-à-dire, toujours par (7.1), pour

$$p \leq \min_{\max(0,d-r) \leq c \leq \min(d-2,k)} ((k-c)(d-c) + 2(r-d+c)+1) \ .$$

Après un petit calcul, on obtient le résultat suivant.

Proposition 8.2.– *La restriction* $\mathrm{H}^{2p}(\mathrm{G}(d,\mathrm{V}),\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^{2p}(\mathrm{LG}(d,\mathrm{V};2r),\mathbf{Z})$ *est surjective pour tout* p, *injective pour* $p \leq 2(\dim \mathrm{V} - d - r) + 1$.

9. Cas relatif

On a vu que la cohomologie de $\mathrm{LG}(d,\mathrm{V};2r)$ est le groupe abélien libre dont les générateurs sont les adhérences des orbites non vides de Γ. Pour chaque suite $\mathbf{c}$, posons $\lambda_j = \min\{i \mid c_i = j\}$. Par [P2], pp. 173–175, l'orbite $\mathrm{O}_{\mathbf{c}}$ n'est pas vide si et seulement si

$$1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{c_k} \leq k < \lambda_{c_k+1} < \cdots < \lambda_d \leq n$$

et $\lambda_i - k + \lambda_j - k \neq 2r+1$ pour $c_k < i \leq j \leq d$.

Dans le cas $d = r = n/2$, on obtient une bijection en associant à chaque générateur $[\overline{\mathrm{O}}_{\mathbf{c}}]$ la suite $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_s \leq r$ (où $s = \max\{j \mid \lambda_j \leq r\}$), ou encore la partition stricte $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ de r, où $\mu_j = r + 1 - \lambda_j$; la codimension de $\overline{\mathrm{O}}_{\mathbf{c}}$ dans LG est $|\mu|$ ([P2], p. 177). Lorsque $s = 1$, on obtient la variété de Schubert spéciale

$$\{\Lambda \in \mathrm{LG} \mid \Lambda \cap \mathrm{V}_{2r+1-\mu_1} \neq 0\}$$

dont la classe est $c_{\mu_1}(\mathrm{S}^*)$. Pour chaque partition stricte μ de r, il existe un polynôme $\widetilde{\mathrm{Q}}_\mu$ à coefficients entiers (défini p. 21 de [PR2]), tel que $[\overline{\mathrm{O}}_{\mathbf{c}}] = \widetilde{\mathrm{Q}}_\mu(c(\mathrm{S}^*))$.

(9.1) On se donne maintenant un schéma X, un fibré en droites L sur X et un fibré vectoriel E de rang $2r$ sur X muni une forme antisymétrique non dégénérée sur E à valeurs dans L. On note $\mathrm{LG}(r, \mathrm{E})$ la grassmannienne relative des sous-espaces vectoriels isotropes maximaux des fibres de E et S le sous-fibré tautologique de rang r sur $\mathrm{LG}(r, \mathrm{E})$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus\limits_{\substack{\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_s)\\ m\geq\mu_1>\cdots>\mu_s>0}} \mathrm{H}^{p-2|\mu|}(\mathrm{X}, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{LG}(r, \mathrm{E}), \mathbf{Z}) \\ \sum_\mu \alpha_\mu & \longmapsto & \sum_\mu \widetilde{\mathrm{Q}}_\mu(c(\mathrm{S}^*)) \cdot \pi^* \alpha_\mu \end{array}$$

est bijective ([P2], dernier paragraphe de la p. 22, ou [F2], pp. 255–256).

Bibliographie

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, Geometry of algebraic curves. I. Grundlehren 267, Springer-Verlag, New York, 1985.

[B] A. Bertram, *An existence theorem for Prym special divisors*, Invent. Math. **90** (1987), 669–671.

[De] P. Deligne, *Théorie de Hodge, III*, Publ. Math. I.H.E.S. **44** (1974), 5–77.

[dB] Ph. du Bois, *Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière*, Bull. Soc. math. France **109** (1981), 41–81.

[EG] D. Edidin, W. Graham, *Characteristic Classes and Quadric Bundles*, Duke Math. J. **78** (1995), 277–299.

[E] L. Ein, *An Analogue of Max Noether's Theorem*, Duke Math. J. **52** (1985), 689–706.

[EP] G. Ellingsrud, C. Peskine, *Équivalence numérique pour les surfaces génériques d'une famille lisse de surfaces projectives*, in Problems in the theory of surfaces and their classification (Cortona, 1988), 99–109, Sympos. Math., XXXII, Academic Press, London, 1991.

[F1] W. Fulton, Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **2**, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[F2] W. Fulton, *Schubert varieties in flag bundles for the classical groups*, Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), 241–262, Israel Math. Conf. Proc., 9, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1996.

[FL] W. Fulton, R. Lazarsfeld, *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors*, Acta Math. **146** (1981), 271–283.

[G1] A. Grothendieck, *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique VI. Les schémas de Picard : propriétés générales*, Séminaire Bourbaki, Exp. 236, 1961/62.

[G2] A. Grothendieck, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2), Masson et North Holland, Paris Amsterdam, 1968.

[H1] H. Hamm, Lefschetz theorems for singular varieties, in *Singularities, Part 1* (Arcata, Calif., 1981), 547–557, Proc. Sympos. Pure Math. **40**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983.

[H2] H. Hamm, *Zur Homotopietyp Steinscher Räume*, J. Reine Angew. Math. **338** (1983), 121–135.

[Ha] J. Harris, *Theta-characteristics on algebraic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982), 611–638.

[K] J. Kollár, Shafarevich maps and automorphic forms, M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[L] F. Laytimi, *On Degeneracy Loci*, Int. J. Math. **7** (1996), 745–754.

[Lo] A. López, Noether-Lefschetz theory and the Picard group of projective surfaces, Mem. Amer. Math. Soc. **89** (1991).

[M] I. Macdonald, *Symmetric Products of an Algebraic Curve*, Topology, **1** (1962), 319–343.

[Ma] L. Manivel, *Vanishing theorems for ample vector bundles*, Invent. Math. **127** (1997), 401–416.

[Mu] D. Mumford, *Theta characteristics of an algebraic curve*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **4** (1971), 181–192.

[P1] P. Pragacz, *Cycles of isotropic subspaces and formulas for symmetric degeneracy loci*, Banach Center Publications **26** (2) (1990), 189–199.

[P2] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials, in *Topics in invariant theory (Paris, 1989/1990)*, Lecture Notes in Math. **1478**, Springer, Berlin, 1991, 130–191.

[PR1] P. Pragacz, J. Ratajski, *A Pieri-type theorem for Lagrangian and odd Orthogonal Grassmannians*, J. reine angew. Math. **476** (1996), 143–189.

[PR2] P. Pragacz, J. Ratajski, *Formulas for Lagrangian and orthogonal degeneracy loci; $\widetilde{Q}$-polynomial approach*, Comp. Math. **107** (1997), 11–87.

[RX] F. Rosselló Lompart, S. Xambó Descamps, Computing Chow Groups, in *Algebraic Geometry (Sundance, UT, 1986)*, A. Holme, R. Speiser ed., Lecture Notes in Math.

1311, Springer, Berlin-New York, 1988, 220–234.

[S] F. Steffen, *Eine Verallgemeinerung des Krullschen Hauptidealsatzes mit einer Anwendung auf die Brill-Noether-Theorie*, Dissertation, Bochum (1996).

[T] L. Tu, *The Connectedness of Symmetric and Skew-Symmetric Degeneracy Loci : Even Ranks*, Trans. A.M.S. **313** (1989), 381–392.

[W] G. Welters, *A theorem of Gieseker-Petri type for Prym varieties*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **18** (1985), 671–683.