Polarisations sur les variétés abéliennes produits

Olivier Debarre [1]

Résumé – *On montre qu'une variété abélienne polarisée définie sur un corps algébriquement clos se décompose de façon unique en produit de variétés abéliennes polarisées indécomposables. On donne aussi un critère pour qu'une polarisation sur une variété abélienne produit se décompose en produit de polarisations.*

Polarizations on products of abelian varieties

Abstract – *We show that a polarized abelian variety defined over an algebraically closed field splits uniquely as a product of indecomposable polarized abelian varieties. We also give a necessary and sufficient condition for a polarization on a product of abelian varieties to split as a product of polarizations.*

Soient X une variété abélienne définie sur un corps algébriquement clos et $\widehat{\mathrm{X}}$ sa variété abélienne duale ([M], § 13) ; une *polarisation* sur X est une classe d'équivalence algébrique de fibrés en droites amples sur X. Etant donné un tel fibré L, on note $[\mathrm{L}]$ la polarisation associée, et $\phi_{\mathrm{L}} : \mathrm{X} \to \widehat{\mathrm{X}}$ le morphisme construit dans [M], cor. 5, p. 131, défini ensemblistement par $\phi_{\mathrm{L}}(x) = \tau_x^*\mathrm{L} \otimes \mathrm{L}^{-1}$, où τ_x est la translation par x. Il ne dépend que de $[\mathrm{L}]$, et on le notera aussi $\phi_{[\mathrm{L}]}$. Si $(\mathrm{X}_1, [\mathrm{L}_1])$ et $(\mathrm{X}_2, [\mathrm{L}_2])$ sont des variétés abéliennes polarisées, on note $(\mathrm{X}_1, [\mathrm{L}_1]) \times (\mathrm{X}_2, [\mathrm{L}_2])$ la variété abélienne $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ munie de la polarisation $[\mathrm{L}_1 \boxtimes \mathrm{L}_2]$. On dit qu'une variété abélienne polarisée est *indécomposable* si elle n'est ni nulle, ni isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles. Toute variété abélienne polarisée non nulle se décompose en produit de sous-variétés abéliennes polarisées indécomposables. Le but de cette note est de montrer que cette décomposition est unique. Ce résultat pourtant bien naturel semble nouveau, bien qu'il soit déjà connu lorsqu'on considère une variété abélienne principalement polarisée $(\mathrm{X}, [\mathcal{O}(\Theta)])$ (c'est-à-dire telle que $h^0\big(\mathrm{X}, \mathcal{O}(\Theta)\big) = 1$) : les facteurs indécomposables de X sont les sous-variétés abéliennes engendrées par les composantes irréductibles de Θ. Plus généralement, si l'on part d'une variété abélienne polarisée quelconque $(\mathrm{X}, [\mathrm{L}])$, on sait que les facteurs indécomposables principalement polarisés sont les sous-variétés abéliennes engendrées par les composantes irréductibles de la partie fixe du système linéaire $|\mathrm{L}|$ (th. 3.1, p. 78 de [LB]). Nous n'obtenons pas de caractérisation géométrique des facteurs indécomposables dans le cas général.

Dans une deuxième partie, nous démontrons un critère pour qu'une polarisation sur une variété abélienne produit se décompose en produit de polarisations.

J.-P. Serre, que je remercie d'avoir posé la question de l'unicité de la décomposition d'une variété abélienne polarisée en facteurs indécomposables, a indépendamment obtenu une démonstration différente du théorème 1, qui est publiée à la suite de cette Note.

[1] Financé en partie par N.S.F. Grant DMS 94-00636 et le Projet Européen HCM « Algebraic Geometry in Europe » (AGE), Contrat CHRXCT-940557.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE

1. Décomposition d'une variété abélienne polarisée

Théorème 1.– *Soit* (X,λ) *une variété abélienne polarisée contenant des sous-variétés abéliennes* X_1 , X_2 , Y_1 *et* Y_2 *telles que*

$$(\mathrm{X},\lambda)=(\mathrm{X}_1,\lambda|_{\mathrm{X}_1})\times(\mathrm{X}_2,\lambda|_{\mathrm{X}_2})=(\mathrm{Y}_1,\lambda|_{\mathrm{Y}_1})\times(\mathrm{Y}_2,\lambda|_{\mathrm{Y}_2})\ .$$

Pour $i=1\,,\ 2$, *on a*

$$(\mathrm{X}_i,\lambda|_{\mathrm{X}_i})\simeq(\mathrm{X}_i\cap\mathrm{Y}_1,\lambda|_{\mathrm{X}_i\cap\mathrm{Y}_1})\times(\mathrm{X}_i\cap\mathrm{Y}_2,\lambda|_{\mathrm{X}_i\cap\mathrm{Y}_2})\ .$$

Posons $\mathrm{Z}_{ij}=(\mathrm{X}_i\cap\mathrm{Y}_j)^0$ et $\mathrm{Z}=\mathrm{Z}_{11}\times\mathrm{Z}_{12}\times\mathrm{Z}_{21}\times\mathrm{Z}_{22}$. Soit K le noyau de l'application $\widehat{\mathrm{X}}\to\widehat{\mathrm{Z}}$; la composante neutre X' de $\phi_\lambda^{-1}(\mathrm{K})$ est un complément de Z dans X ([M], th. 1, p. 173). Or, si K_i est le noyau de l'application $\widehat{\mathrm{X}}_i\to\widehat{\mathrm{Z}}_{i1}\times\widehat{\mathrm{Z}}_{i2}$, on a $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1\times\mathrm{K}_2$. Comme $\phi_\lambda:\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\to\widehat{\mathrm{X}}_1\times\widehat{\mathrm{X}}_2$ n'est autre que $\phi_{\lambda|_{\mathrm{X}_1}}\times\phi_{\lambda|_{\mathrm{X}_2}}$, on a $(\mathrm{X}',\lambda|_{\mathrm{X}'})=(\mathrm{X}_1',\lambda|_{\mathrm{X}_1'})\times(\mathrm{X}_2',\lambda|_{\mathrm{X}_2'})$, où X_i' est la sous-variété abélienne $\left(\phi_{\lambda|_{\mathrm{X}_i}}^{-1}(\mathrm{K}_i)\right)^0$ de X_i . On montre de façon analogue que l'on a une décomposition $(\mathrm{X}',\lambda|_{\mathrm{X}'})=(\mathrm{Y}_1',\lambda|_{\mathrm{Y}_1'})\times(\mathrm{Y}_2',\lambda|_{\mathrm{Y}_2'})$, où Y_j' est une sous-variété abélienne de Y_j telle que $\mathrm{X}_i'\cap\mathrm{Y}_j'$ soit *fini*.

Ceci nous ramène au cas où $\mathrm{X}_i\cap\mathrm{Y}_j$ est fini pour tous $i\,,\ j\in\{1,2\}$, ce qui entraîne en particulier que X_1 , X_2 , Y_1 et Y_2 ont même dimension m . Il s'agit de montrer que m est nul. Soit N un fibré en droites ample sur X représentant la polarisation λ . Notons $\mathrm{L}_i=\mathrm{N}|_{\mathrm{X}_i}$ et $\mathrm{M}_j=\mathrm{N}|_{\mathrm{Y}_j}$; on a

$$(\mathrm{X}_i,[\mathrm{L}_i])\simeq(\mathrm{X}_i,[\mathrm{M}_{i1}\otimes\mathrm{M}_{i2}])\ ,$$

où M_{ij} est l'image inverse de M_j par l'application composée $p_{ij}:\mathrm{X}_i\subset\mathrm{X}=\mathrm{Y}_1\times\mathrm{Y}_2\xrightarrow{\mathrm{pr}_j}\mathrm{Y}_j$. Comme le noyau de celle-ci est fini, M_{ij} est ample sur X_i . *Supposons* m *non nul;* on a ([M], § 16)

$$h^0(\mathrm{X}_i,\mathrm{L}_i)=\frac{[\mathrm{L}_i]^m}{m!}=\frac{([\mathrm{M}_{i1}]+[\mathrm{M}_{i2}])^m}{m!}\geq\frac{[\mathrm{M}_{i1}]^m}{m!}+\frac{[\mathrm{M}_{i2}]^m}{m!}=h^0(\mathrm{X}_i,\mathrm{M}_{i1})+h^0(\mathrm{X}_i,\mathrm{M}_{i2})\ ,$$

de sorte que

$$(\star)\qquad h^0(\mathrm{X},\mathrm{N})=h^0(\mathrm{X}_1,\mathrm{L}_1)h^0(\mathrm{X}_2,\mathrm{L}_2)\geq\left(h^0(\mathrm{M}_{11})+h^0(\mathrm{M}_{12})\right)\left(h^0(\mathrm{M}_{21})+h^0(\mathrm{M}_{22})\right)\ .$$

Comme M_{ij} est l'image inverse de M_j par l'isogénie p_{ij} , on a d'autre part $h^0(\mathrm{Y}_j,\mathrm{M}_j)\leq h^0(\mathrm{X}_i,\mathrm{M}_{ij})$, pour tous $i\,,\ j$, de sorte que

$$h^0(\mathrm{X},\mathrm{N})=h^0(\mathrm{Y}_1,\mathrm{M}_1)h^0(\mathrm{Y}_2,\mathrm{M}_2)\leq h^0(\mathrm{M}_{11})h^0(\mathrm{M}_{22})\ .$$

Comme les $h^0(\mathrm{M}_{ij})$ sont tous strictement positifs, on arrive à une contradiction avec $(\star)$, ce qui termine la démonstration du théorème. ∎

Corollaire 2.– *Soit* (X,λ) *une variété abélienne polarisée contenant des sous-variétés abéliennes* $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_r$ *et* $\mathrm{Y}_1,\ldots,\mathrm{Y}_s$ *telles que*

$$(\mathrm{X},\lambda)=\prod_{i=1}^{r}(\mathrm{Y}_j,\lambda|_{\mathrm{Y}_j})=\prod_{j=1}^{s}(\mathrm{Y}_j,\lambda|_{\mathrm{Y}_j})\ .$$

a) *Si* $(X_1, \lambda|_{X_1}), \dots, (X_r, \lambda|_{X_r})$ *sont indécomposables, il existe une partition* $I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_s$ *de* $\{1, \dots, r\}$ *telle que* $(Y_j, \lambda|_{Y_j}) = \prod_{i \in I_j} (X_i, \lambda|_{X_i})$ *, pour tout* $j = 1, \dots, s$ *.*

b) *Si* $(X_1, \lambda|_{X_1}), \dots, (X_r, \lambda|_{X_r})$ *et* $(Y_1, \lambda|_{Y_1}), \dots, (Y_s, \lambda|_{Y_s})$ *sont indécomposables, on a* $r = s$ *et il existe une permutation* σ *de* $\{1, \dots, s\}$ *telle que* $Y_j = X_{\sigma(j)}$ *pour tout* j *.*

2. Polarisations sur un produit de variétés abéliennes

Théorème 3.– *Soit* L *un fibré en droites ample sur une variété abélienne produit* $X = \prod_{i=1}^r X_i$ *. On a* $h^0(X, L) \le \prod_{i=1}^r h^0(X_i, L|_{X_i})$ *. Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que* L *soit isomorphe à* $L|_{X_1} \boxtimes \cdots \boxtimes L|_{X_r}$ *.*

Il suffit de traiter le cas $r = 2$. Pour $k = 1,\ 2$, notons L_k la restriction de L à X_k. On définit des endomorphismes p_1, p_2 et u de X par

$$p_1(x_1, x_2) = (x_1, 0) \quad , \qquad p_2(x_1, x_2) = (0, x_2) \qquad \text{et} \qquad u(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \ ,$$

pour tous $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$. Le morphisme $\phi_L : X_1 \times X_2 \to \widehat{X}_1 \times \widehat{X}_2$ s'écrit

$$\phi_L = \begin{pmatrix} \phi_{L_1} & \widehat{v} \\ v & \phi_{L_2} \end{pmatrix} \ ,$$

où v est un morphisme de X_1 dans $\widehat{X}_2$. On a alors

$$\phi_{u^*L} = \begin{pmatrix} \phi_{L_1} & -\widehat{v} \\ -v & \phi_{L_2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \phi_{u^*L \otimes L} = \begin{pmatrix} 2\phi_{L_1} & 0 \\ 0 & 2\phi_{L_2} \end{pmatrix} \ ,$$

de sorte que $\phi_{u^*L\otimes L} = \phi_{p_1^*L^2 \otimes p_2^*L^2}$: les fibrés en droites $u^*L \otimes L$ et $p_1^*L^2 \otimes p_2^*L^2$ sont algébriquement équivalents. Pour tout rationnel t, posons

$$P(t) = n!\, \chi\big(X, (p_1^*L^2 \otimes p_2^*L^2)^{\otimes t} \otimes L^{-1}\big) = \big((p_1^*L^2 \otimes p_2^*L^2)^{\otimes t} \otimes L^{-1}\big)^n \ ,$$

où n est la dimension de X. On a

$$\begin{aligned} P(t) &= u^*\big((p_1^*L \otimes p_2^*L)^{\otimes t} \otimes L^{-1}\big)^n = \big((p_1^*L \otimes p_2^*L)^{\otimes t} \otimes u^*L^{-1}\big)^n \\ &= \big((p_1^*L \otimes p_2^*L)^{\otimes (t-2)} \otimes L\big)^n = (-1)^n \big((p_1^*L \otimes p_2^*L)^{\otimes (2-t)} \otimes L^{-1}\big)^n = (-1)^n P(2-t) \ . \end{aligned}$$

Par [K], th. 2, les racines de P sont réelles positives; comme $\alpha(2-\alpha) \le 1$ pour tout réel α, le produit des racines de P, c'est-à-dire $\chi(X, L)/\chi(X, p_1^*L \otimes p_2^*L)$, est plus petit que 1. Comme L et $p_1^*L \otimes p_2^*L$ sont amples, on a $\chi(X, L) = h^0(X, L)$ et $\chi(X, p_1^*L \otimes p_2^*L) = h^0(X, p_1^*L \otimes p_2^*L)$; ceci prouve l'inégalité du théorème. S'il y a égalité, les racines du polynôme $P(t+1)$ sont toutes nulles, de sorte que L et $p_1^*L \otimes p_2^*L$ sont algébriquement équivalents (*loc.cit.*). Comme ils ont mêmes images inverses par p_1 et p_2, ils sont isomorphes ([M], (ii) p. 75). ∎

Si X_1 et X_2 sont des sous-variétés abéliennes d'une variété abélienne X, on définit $X_1 \cdot X_2$ comme le degré de l'application $X_1 \times X_2 \to X$ qui à (x_1, x_2) associe $x_1 - x_2$. C'est aussi le degré du produit d'intersection des classes de X_1 et X_2 dans l'anneau de Chow de X.

Corollaire 4.– *Soient* X *une variété abélienne, et* X_1 *et* X_2 *des sous-variétés abéliennes de* X *. Si* L *est un fibré en droites ample sur* X *, on a*

$$(\mathrm{X}_1 \cdot \mathrm{X}_2)\ h^0(\mathrm{X},\mathrm{L}) \ \leq\ h^0(\mathrm{X}_1,\mathrm{L}|_{\mathrm{X}_1})\ h^0(\mathrm{X}_2,\mathrm{L}|_{\mathrm{X}_2})\ .$$

On peut supposer $d = \mathrm{X}_1 \cdot \mathrm{X}_2$ non nul, de sorte que l'application $\pi : \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}$ est une isogénie de degré d. Le théorème donne

$$h^0(\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2, \pi^*\mathrm{L}) \leq\ h^0(\mathrm{X}_1,\mathrm{L}|_{\mathrm{X}_1})\ h^0(\mathrm{X}_2,\mathrm{L}|_{\mathrm{X}_2})\ .$$

Ceci montre le corollaire puisque $h^0(\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2, \pi^*\mathrm{L}) = dh^0(\mathrm{X},\mathrm{L})$. ■

Références

[K] Kempf, G., appendice à Mumford., D., *Varieties Defined by Quadratic Equations*, in "Questions On Algebraic Varieties", C.I.M.E., Varenna, 1970.

[LB] Lange, H., Birkenhake, Ch., Complex Abelian Varieties, Grundl. math. Wiss., Springer Verlag, Berlin, 1992.

[M] Mumford, D., Abelian Varieties, 2ème édition, Oxford University Press, 1974.