manuscripta math. 89, 407 - 425 (1996)

manuscripta mathematica

Sur un théorème de connexité de Mumford pour les espaces homogènes

Olivier Debarre [1]

IRMA–Mathématique–CNRS URA 001, Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex, France

Reçu le 22 juin 1995;
la version révisée le 11 janvier 1996

We prove some consequences of an old unpublished connectivity result of Mumford. These mostly deal with the fundamental group of some (ramified) coverings of homogeneous spaces; for example, it is shown that the fundamental group of a complex projective irreducible normal variety which is a covering of a simple (in the sense of 2.2) homogeneous space V, of degree $\leq \dim(V)$, is isomorphic to $\pi_1(V)$.

Le but de cet article est d'exposer quelques conséquences d'un théorème de connexité de Mumford (th. 1.1), démontré par ce dernier dans une lettre à Fulton datée du 4 juillet 1978, mais resté non publié, et qu'on verra réapparaître sous des formes similaires dans [22], [23] et [4]. Ces applications concernent le calcul du groupe fondamental de certains revêtements d'espaces

[1] Financé en partie par N.S.F. Grant DMS 94-00636 et le Projet Européen HCM « Algebraic Geometry in Europe » (AGE), Contrat CHRXCT-940557.

homogènes (en suivant les idées de Lazarsfeld) ; on montre par exemple (cor. 2.6) que *le groupe fondamental d'une variété complexe projective irréductible normale qui est revêtement d'une variété homogène* V *simple* (au sens de 2.2), *de degré* $\leq \dim(\mathrm{V})$, *est isomorphe à celui de* V . Je conjecture que si le revêtement est ramifié, son diviseur de ramification est ample sur X . On obtient aussi au § 3 des résultats de connexité pour les grassmanniennes qui complètent ceux de [5].

On travaille sur le corps des complexes. Comme d'habitude, on dira qu'un point d'une variété algébrique irréductible est générique s'il est en dehors d'un fermé de Zariski propre fixé.

Une variété algébrique V sera dite homogène sous un groupe algébrique G si G agit transitivement sur V . Une telle variété est quasi-projective ([2]) ; si elle est complète, elle est isomorphe au produit d'une variété abélienne et d'une variété projective homogène sous un groupe algébrique linéaire semi-simple ([1]).

Je remercie C. Ciliberto (pour la prop. 3.3), J. Harris et P. Littelmann de leurs explications sur les orbites de $\mathrm{GL(P)} \times \mathrm{GL(Q)} \times \mathrm{GL(R)}$ dans $\mathrm{P} \otimes \mathrm{Q} \otimes \mathrm{R}$, et W. Fulton de m'avoir communiqué la lettre de D. Mumford.

1. Le théorème de Mumford

Soit G un groupe algébrique connexe agissant transitivement sur une variété algébrique V ; pour tout $v \in \mathrm{V}$ et toute partie X de V , on pose $\mathrm{G}_{v,\mathrm{X}} = \{\gamma \in \mathrm{G} \mid \gamma v \in \mathrm{X}\}$ et on note $\mathrm{G}_v = \mathrm{G}_{v,v}$ le stabilisateur de v . Pour tout entier $r \geq 0$, on considère la propriété suivante relative à un couple (X,Y) de sous-variétés irréductibles de V :

$\mathcal{P}(r)$: pour $x \in \mathrm{X}$ et $y \in \mathrm{Y}$ génériques,

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{G}_{x,y}}\{\gamma \in \mathrm{G}_{x,y} \mid \mathrm{T}_y(\gamma\mathrm{X}) + \mathrm{T}_y\mathrm{Y} \neq \mathrm{T}_y\mathrm{V}\} \ > \ r \ .$$

Soit M un espace vectoriel; on désigne par $\mathrm{G}(q,\mathrm{M})$ la grassmannienne des q-plans de M et, pour tout $u \in \mathrm{G}(q,\mathrm{M})$, par Λ_u le sous-espace vectoriel de M associé à u. Soit d la dimension de X ; pour x lisse dans X, notons $\mathrm{O}(x)$ l'orbite sous l'action de G_x du point de $\mathrm{G}(d, \mathrm{T}_x\mathrm{V})$ correspondant à $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ revient à dire que pour x et y génériques, et $\gamma \in \mathrm{G}_{y,x}$ fixé, $\mathrm{O}(x)$ n'est pas contenue dans la variété de Schubert $\Sigma_{\mathrm{T}_x(\gamma\mathrm{Y})} = \{u \in \mathrm{G}(d, \mathrm{T}_x\mathrm{V}) \mid \Lambda_u + \mathrm{T}_x(\gamma\mathrm{Y}) \neq \mathrm{T}_x\mathrm{V}\}$. Pour $\mathcal{P}(r)$, on demande $\operatorname{codim}_{\mathrm{O}(x)}\big(\mathrm{O}(x) \cap \Sigma_{\mathrm{T}_x(\gamma\mathrm{Y})}\big) > r$.

Théorème 1.1.– *Soit* G *un groupe algébrique connexe agissant transitivement avec stabilisateurs connexes sur une variété algébrique* V. *Soient* X *et* Y *des variétés complètes irréductibles, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{V}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{V}$ *des morphismes.*

1) *Si* $\big(f(\mathrm{X}), g(\mathrm{Y})\big)$ *vérifie* $\mathcal{P}(0)$, *le schéma* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y}$ *est non vide.*

2) *Si* $\big(f(\mathrm{X}), g(\mathrm{Y})\big)$ *vérifie* $\mathcal{P}(1)$, *que tout translaté de* $f(\mathrm{X})$ *rencontre tout diviseur de* $g(\mathrm{Y})$, *et que tout translaté de* $g(\mathrm{Y})$ *rencontre tout diviseur de* $f(\mathrm{X})$, *il existe un revêtement étale connexe* $\rho : \tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V}$ *et des morphismes* $\tilde{f} : \mathrm{X} \to \tilde{\mathrm{V}}$ *et* $\tilde{g} : \mathrm{Y} \to \tilde{\mathrm{V}}$ *tels que* $f = \rho\tilde{f}$ *et* $g = \rho\tilde{g}$, *vérifiant*

a) $\mathrm{X} \times_{\tilde{\mathrm{V}}} \mathrm{Y}$ *est connexe ;*

b) *si* X *et* Y *sont localement irréductibles, la suite*

$$\pi_1(\mathrm{X} \times_{\tilde{\mathrm{V}}} \mathrm{Y}) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{X}) \times \pi_1(\mathrm{Y}) \xrightarrow{\pi_1(\tilde{f}) - \pi_1(\tilde{g})} \pi_1(\tilde{\mathrm{V}}) \longrightarrow 1$$

est exacte.

Remarques 1.2.– 1) Soit H le stabilisateur d'un point de V, de sorte que V s'identifie à G/H ; avec les notations du théorème, il existe un groupe algébrique connexe $\tilde{\mathrm{G}}$, un sous-groupe fermé $\tilde{\mathrm{H}}$ de $\tilde{\mathrm{G}}$ et un homomorphisme de groupes étale $\pi : \tilde{\mathrm{G}} \to \mathrm{G}$ tels que π induise un isomorphisme entre $\tilde{\mathrm{H}}$ et H, et que $\tilde{\mathrm{V}}$ s'identifie à $\tilde{\mathrm{G}}/\tilde{\mathrm{H}}$ et ρ à la surjection canonique $\tilde{\mathrm{G}}/\tilde{\mathrm{H}} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$. Pour $\tilde{\gamma} \in \tilde{\mathrm{G}}$, notons ${}^{\tilde{\gamma}}\mathrm{X}$ le $\tilde{\mathrm{V}}$-schéma $\tilde{\gamma}\tilde{f} : \mathrm{X} \to \tilde{\mathrm{V}}$; la démonstration du théorème montre que pour $\tilde{\gamma}$ générique dans $\tilde{\mathrm{G}}$, le schéma ${}^{\tilde{\gamma}}\mathrm{X} \times_{\tilde{\mathrm{V}}} \mathrm{Y}$ est irréductible.

2) Si X est une sous-variété irréductible de V de dimension d et que, pour x générique dans X, l'orbite $\mathrm{O}(x)$ est dense dans $\mathrm{G}(d, \mathrm{T}_x\mathrm{V})$, tout couple (X, Y) de sous-variétés irréductibles de V, avec $\dim(\mathrm{X}) + \dim(\mathrm{Y}) > \dim(\mathrm{V})$, vérifie $\mathcal{P}(1)$. C'est le cas pour toute sous-variété de $\mathbf{P}^n$; on retrouve le résultat de connexité de [11], dans le cas où le corps de base est de caractéristique nulle.

3) Faltings obtient dans [8] la partie 2)a) du théorème lorsque G est un groupe linéaire, qu'on peut supposer semi-simple, sous l'hypothèse $\dim f(\mathrm{X}) + \dim g(\mathrm{Y}) > 2\dim(\mathrm{V}) - \ell$, où ℓ est le minimum des rangs des facteurs simples de G. Goldstein obtient une borne parfois meilleure dans [14].

Démonstration du théorème. Posons

$$\Gamma = \{(\gamma, x, y) \in \mathrm{G} \times \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \mid \gamma f(x) = g(y)\} .$$

La projection $q : \Gamma \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ est lisse, de sorte que Γ est irréductible de dimension $\dim(\mathrm{X}) + \dim(\mathrm{Y}) + \dim(\mathrm{H})$. Puisque $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ est complète, la projection $p : \Gamma \to \mathrm{G}$ est propre; posons $\mathrm{X}' = f(\mathrm{X})$ et $\mathrm{Y}' = g(\mathrm{Y})$. On notera que p est lisse en (γ, x, y) si f est lisse en x, que X' l'est en $x' = f(x)$, que g l'est en y, que Y' l'est en $y' = g(y)$, et que $\mathrm{T}_{y'}(\gamma\mathrm{X}') + \mathrm{T}_{y'}\mathrm{Y}' = \mathrm{T}_{y'}\mathrm{V}$. Soient x générique dans X et y générique dans Y ; puisque $(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ a la propriété $\mathcal{P}(0)$, il existe $\gamma \in \mathrm{G}_{x', y'}$ tel que $\mathrm{T}_{y'}(\gamma\mathrm{X}')$ soit transverse à $\mathrm{T}_{y'}\mathrm{Y}'$. Alors $(\gamma, x, y) \in \Gamma$, le morphisme p est lisse en (γ, x, y), et la dimension de $p^{-1}(\gamma)$ en (γ, x, y) est $\dim(\mathrm{X}) + \dim(\mathrm{Y}) - \dim(\mathrm{V})$, de sorte que p est surjective. Ceci montre 1).

Pour montrer 2), on peut supposer X et Y normales; q étant lisse, Γ est aussi normale. Considérons la factorisation de Stein $\Gamma \xrightarrow{p'} \tilde{\mathrm{G}} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G}$ de p (où $\tilde{\mathrm{G}}$ est normal, π fini, et où les fibres de p' sont connexes), celle $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathrm{V}$ de f, et celle $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y}_0 \xrightarrow{g_0} \mathrm{V}$ de g, et notons Γ_0 le schéma $\{(\gamma, x, y) \in \mathrm{G} \times \mathrm{X}_0 \times \mathrm{Y}_0 \mid \gamma f_0(x) = g_0(y)\}$. Notons que X_0,

Y_0 et Γ_0 sont normales; les fibres de l'application naturelle $\Gamma \to \Gamma_0$ sont connexes, de sorte que p' se factorise en $\Gamma \xrightarrow{p''} \Gamma_0 \xrightarrow{p'_0} \tilde{G}$.

Si π n'est pas étale, sa ramification contient un diviseur irréductible $\tilde{D}$ de $\tilde{G}$ (théorème de pureté). Choisissons une composante irréductible dominante D_0 de $p_0'^{-1}(\tilde{D})$ et une composante irréductible dominante D de $p''^{-1}(D_0)$. Comme $p''(D)$ est un diviseur de Γ_0 et que la projection $\Gamma_0 \to X_0 \times Y_0$ est lisse, la codimension de l'image de $q(D)$ dans $X_0 \times Y_0$ est ≤ 1. Comme (f_0, g_0) est fini, il en est de même de celle de $D' = (f, g)q(D)$ dans $X' \times Y'$.

Si la projection $D' \to X'$ n'est pas surjective, il existe un diviseur D'_1 de X' tel que $D' = D'_1 \times Y'$. L'hypothèse entraîne alors que $p(D) = \{\gamma \in G \mid \gamma D'_1 \text{ rencontre } Y'\}$ est égal à G, ce qui contredit l'égalité $p(D) = \pi(\tilde{D})$. On obtient une contradiction de la même façon si la projection $D' \to Y'$ n'est pas surjective.

Les deux projections $D' \to X'$ et $D' \to Y'$ sont donc surjectives; en un point générique (γ, x, y) de D, le morphisme p n'est pas lisse, mais f est lisse en x, le schéma X' en $x' = f(x)$, le morphisme g en y, et le schéma Y' en $y' = g(y)$, de sorte que $T_{y'}(\gamma X')$ n'est pas transverse à $T_{y'}Y'$. La fibre de la projection $D' \to X' \times Y'$ au-dessus de (x', y') étant de codimension ≤ 1 dans $G_{x',y'}$, cela contredit la propriété $\mathcal{P}(1)$.

Le morphisme π est donc étale. Soit e l'élément neutre de G ; comme p est surjective, on peut choisir un point (e, x_0, y_0) dans Γ. Munissons $\tilde{G}$ de la structure de groupe algébrique d'élément neutre $\tilde{e} = p'(e, x_0, y_0)$ faisant de π un homomorphisme de groupes. L'ensemble $G_{f(x_0)} \times \{x_0, y_0\}$ est contenu dans Γ, et son image $\tilde{H}$ dans $\tilde{G}$ est isomorphe à $G_{f(x_0)}$ via π. Notons $\tilde{V}$ le schéma $\tilde{G}/\tilde{H}$, et $\alpha : \tilde{G} \to \tilde{V}$ la projection canonique. Posons $\Gamma' = \Gamma \cap (G \times \{x_0\} \times Y)$; on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \xrightarrow{\alpha p'} & \tilde{\mathrm{V}} \\ {\scriptstyle pr_3}\big\downarrow & & {\scriptstyle \rho}\big\downarrow \\ \mathrm{Y} & \xrightarrow{g} & \mathrm{V}\,, \end{array}$$

où ρ le morphisme étale induit par $\tilde{\gamma} \mapsto \pi(\tilde{\gamma}) f(x_0)$. Comme d'une part Y est normal et que les fibres de pr_3 sont connexes, et que d'autre part ρ est fini, Y domine la factorisation de Stein de $g\, pr_3 : \Gamma' \to \mathrm{V}$, et celle-ci domine $\tilde{\mathrm{V}}$, de sorte que g se factorise à travers ρ. On montre de la même façon que f se factorise à travers ρ.

Posons $\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{\gamma}, x, y) \in \tilde{\mathrm{G}} \times \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \mid \tilde{\gamma}\tilde{f}(x) = \tilde{g}(y)\}$; le morphisme $\tilde{\Gamma} \to \Gamma$ défini par $(\tilde{\gamma}, x, y) \mapsto (\pi(\tilde{\gamma}), x, y)$ est étale. On vérifie que la fibre de (e, x_0, y_0) est réduite au seul point $(\tilde{e}, x_0, y_0)$; c'est donc un isomorphisme. La première projection $\tilde{p} : \tilde{\Gamma} \to \tilde{\mathrm{G}}$ s'identifie alors à p' et ses fibres sont connexes. Cela montre en particulier 2)a), puisque $\mathrm{X} \times_{\tilde{\mathrm{V}}} \mathrm{Y}$ s'identifie à $\tilde{p}^{-1}(e)$.

Pour alléger les notations, on remplacera dans la suite G par $\tilde{\mathrm{G}}$, V par $\tilde{\mathrm{V}}$, f par $\tilde{f}$, g par $\tilde{g}$, et Γ par $\tilde{\Gamma}$. Les fibres de p sont alors connexes. Soit γ un élément générique de G ; le schéma ${}^{\gamma}\mathrm{X} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y}$ est connexe (c'est une fibre de p) et normal (remark 7 de [19]), donc irréductible, ce qui montre la remarque 1.2.1). Enfin, ce qui précède montre que le lieu des points $\gamma \in \mathrm{G}$ tels que p ne soit lisse en aucun point de $p^{-1}(\gamma)$ est de codimension ≥ 2. On applique le lemme 1.5 de [22] : il existe un ouvert de Zariski dense U_1 de G tel que, pour $\gamma \in \mathrm{U}_1$, la suite

$$\pi_1\big(p^{-1}(\gamma) \cap \Gamma_{\text{lisse}}\big) \to \pi_1(\Gamma_{\text{lisse}}) \to \pi_1(\mathrm{G}) \to 1$$

soit exacte. Comme Γ est normale, on a une surjection $\pi_1(\Gamma_{\text{lisse}}) \twoheadrightarrow \pi_1(\Gamma)$ ([12], p. 33) donc, pour tout $\gamma \in \mathrm{U}_1$, une suite exacte

$$(*) \qquad \pi_1\big(p^{-1}(\gamma)\big) \longrightarrow \pi_1(\Gamma) \xrightarrow{\pi_1(p)} \pi_1(\mathrm{G}) \to 1\,.$$

Soit U_2 un voisinage (pour la topologie usuelle) contractile de e dans G, et soit Ω un voisinage de $p^{-1}(e)$ dans $p^{-1}(\mathrm{U}_2)$ dont $p^{-1}(e)$ est un rétracte par déformation; p étant propre, il existe un voisinage U_3 de e dans G tel que $p^{-1}(\mathrm{U}_3) \subset \Omega$. L'ouvert de Zariski dense U_1 rencontre U_3. Soit $\gamma \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_3$; l'application $\pi_1\big(p^{-1}(\gamma)\big) \to \pi_1(\Gamma)$ a pour image le noyau de $\pi_1(p)$, et elle se factorise en $\pi_1\big(p^{-1}(\gamma)\big) \to \pi_1(\Omega) \to \pi_1\big(p^{-1}(\mathrm{U}_2)\big) \to \pi_1(\Gamma)$. Comme U_2 est contractile, l'image de $\pi_1\big(p^{-1}(\mathrm{U}_2)\big) \to \pi_1(\Gamma)$ est contenue dans $\mathrm{Ker}\big(\pi_1(p)\big)$; il s'ensuit que l'image de la composée $\pi_1\big(p^{-1}(e)\big) \simeq \pi_1(\Omega) \to \pi_1(\Gamma)$ est $\mathrm{Ker}\big(\pi_1(p)\big)$. En d'autres termes, la suite $(*)$ ci-dessus reste exacte pour $\gamma = e$. On termine la démonstration du théorème en utilisant les suites exactes $\pi_1(\mathrm{H}) \to \pi_1(\Gamma) \to \pi_1(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \to 1$ et $\pi_1(\mathrm{H}) \to \pi_1(\mathrm{G}) \to \pi_1(\mathrm{V}) \to 1$ attachées aux fibrations $q : \Gamma \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ et $\mathrm{G} \to \mathrm{V}$: comme q induit un isomorphisme de $p^{-1}(e)$ sur $\mathrm{X} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y}$, cela prouve b). ∎

2. Sous-variétés génératrices et revêtements des espaces homogènes

Soient G un groupe algébrique agissant transitivement sur une variété V, et X une sous-variété irréductible de V. Pour $x \in \mathrm{X}$, le sous-groupe engendré par $\mathrm{G}_{x,\mathrm{X}}$ est fermé dans G et indépendant du choix de x ; on le note G_{X}. A la suite de Chow ([3]), on dira que X engendre V si $\mathrm{G}_{\mathrm{X}} = \mathrm{G}$.

Proposition 2.1.– *Soit* G *un groupe algébrique connexe agissant transitivement sur une variété complète* V, *soit* H *le stabilisateur d'un point de* V, *et soit* X *une sous-variété irréductible de* V. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) X *engendre* V ;

(ii) X *rencontre tout diviseur de* V ;

(iii) *si* H′ *est un sous-groupe fermé de* G *contenant* H *tel que la surjection* $G/H \to G/H'$ *contracte* X *en un point,* $H' = G$.

Démonstration. L'équivalence de (i) et (iii), ainsi que l'implication (ii) ⇒ (iii), sont évidentes. Montrons (i) ⇒ (ii). Soit D une hypersurface irréductible de V ; posons

$$\Gamma = \{(\gamma, x, d) \in G \times X \times D \mid \gamma x = d\} .$$

En considérant la projection $\Gamma \to X \times D$, on voit que Γ est irréductible de dimension $\dim(X) + \dim(G) - 1$. La projection $p : \Gamma \to G$ est propre, et son image E est une sous-variété fermée de G. Supposons que X ne rencontre pas D ; alors p n'est pas surjective, et comme les fibres de p sont de dimension $\leq \dim(X)$, il s'ensuit que E est un diviseur irréductible de G et que $\gamma X \subset D$ pour tout $\gamma \in E$. Soient x_0 un point de X et $\alpha : G \to V$ l'application $\gamma \mapsto \gamma x_0$; pour tout $\gamma \in E$, on a $\gamma \cdot \alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(\gamma X) \subset \alpha^{-1}(D)$, de sorte que $E \cdot \alpha^{-1}(X) \subset \alpha^{-1}(D)$. Comme E et $\alpha^{-1}(D)$ sont tous deux des diviseurs de G, on a en fait $E \cdot \alpha^{-1}(X) = E$. Mais $\alpha^{-1}(X)$ n'est autre que l'ensemble $G_{x_0,X}$, de sorte que $G_X \subset \{\gamma \in G \mid E \cdot \gamma = E\}$; cela entraîne que X n'engendre pas V et démontre la proposition. ∎

Corollaire 2.2.– *Soient* G *un groupe algébrique connexe agissant transitivement sur une variété algébrique complète* V *et* H *le stabilisateur d'un point de* V. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *toute sous-variété irréductible de* V *de dimension* > 0 *engendre* V ;

(ii) *tout diviseur effectif de* V *est ample ;*

(iii) *tout sous-groupe fermé de* G *contenant* H *de dimension* $> \dim(H)$ *est égal à* G.

Toute variété algébrique complète homogène vérifiant ces propriétés sera dite simple.

Remarque 2.3.– Le théorème de Borel-Remmert ([1]) entraîne que toute variété homogène simple est soit homogène sous un groupe linéaire, donc simplement connexe, soit une variété abélienne simple.

Démonstration. L'équivalence de (i) et (iii), ainsi que l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i), découlent de la proposition 2.1. Supposons (i) vérifiée. Soient D un diviseur effectif de V, Z un sous-schéma intègre de V de codimension $r > 0$, et $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ des éléments génériques de G ; corollary 4 de [19] et la proposition 2.1 entraînent que $Z \cap \gamma_1 D \cap \cdots \cap \gamma_r D$ est fini non vide. On a donc $Z \cdot D^r > 0$, de sorte que D est ample (critère de Nakai-Moishezon). ∎

Le théorème de Mumford entraîne le résultat suivant :

Théorème 2.4.– *Dans la situation du théorème* 1.1, *on suppose que f est surjective et que $g(Y)$ engendre* V. *Il existe un revêtement étale connexe $\rho : \tilde{V} \to V$ et des morphismes $\tilde{f} : X \to \tilde{V}$ et $\tilde{g} : Y \to \tilde{V}$ tels que $f = \rho\tilde{f}$ et $g = \rho\tilde{g}$, vérifiant*

a) $X \times_{\tilde{V}} Y$ *est connexe*;

b) *si* X *et* Y *sont localement irréductibles, la suite*

$$\pi_1(X \times_{\tilde{V}} Y) \longrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \xrightarrow{\pi_1(\tilde{f})-\pi_1(\tilde{g})} \pi_1(\tilde{V}) \longrightarrow 1$$

est exacte.

Comme dans [12] et [9], on déduit de ce théorème les conséquences suivantes.

Corollaire 2.5.– *Soient* V *une variété algébrique homogène,* X *une variété complète irréductible normale et $f : X \to V$ un morphisme surjectif. On suppose qu'il existe une sous-variété* *irréductible localement fermée* R *de* V *dont l'adhérence engendre* V, *telle que la restriction* $f^{-1}(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$ *soit une bijection (ensembliste), et que* f *soit fini ou* R *fermée. L'homomorphisme* $\pi_1(f) : \pi_1(\mathrm{X}) \to \pi_1(\mathrm{V})$ *est bijectif.*

Démonstration. Comme V est complète irréductible, elle est isomorphe au produit d'une variété abélienne et d'une variété projective homogène sous un groupe algébrique linéaire semi-simple ([1]); en particulier, elle est homogène sous un groupe algébrique connexe qui agit avec stabilisateurs connexes. Soient $\overline{\mathrm{R}}$ l'adhérence de R dans V et $g : \mathrm{R}^* \to \overline{\mathrm{R}} \subset \mathrm{V}$ sa normalisation. Comme $\overline{\mathrm{R}}$ engendre V, on peut appliquer le théorème 2.4. Puisque f est une bijection sur $f^{-1}(\mathrm{R})$, ρ est un isomorphisme; il s'ensuit que $\mathrm{R}' = (\mathrm{X} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{R}^*)_{\mathrm{red}}$ est connexe et que la suite

$$\pi_1(\mathrm{R}') \longrightarrow \pi_1(\mathrm{X}) \times \pi_1(\mathrm{R}^*) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{V}) \longrightarrow 1$$

est exacte. Si R est fermée, la projection $p : \mathrm{R}' \to \mathrm{R}^*$ est bijective; si f est fini, p est finie birationnelle. Comme R^* est normale, p est un homéomorphisme dans tous les cas, et $\pi_1(f)$ est bijective. ∎

Corollaire 2.6.– *Soient* V *une variété algébrique homogène simple au sens de* (2.2), X *une variété complète irréductible localement irréductible et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{V}$ *un morphisme fini surjectif de degré* $\leq \dim(\mathrm{V})$. *L'homomorphisme* $\pi_1(f) : \pi_1(\mathrm{X}) \to \pi_1(\mathrm{V})$ *est injectif de conoyau fini.*

Sous les hypothèses du corollaire, il résulte de la remarque 2.3 que V est soit simplement connexe, soit une variété abélienne simple, de sorte que $\pi_1(\mathrm{X})$ est soit nul, soit abélien libre de rang $2\dim(\mathrm{X})$.

Démonstration. Le théorème appliqué avec $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$ et $g = f$ fournit une surjection $\pi_1(\tilde{f}) : \pi_1(\mathrm{X}) \to \pi_1(\tilde{\mathrm{V}})$. Comme le morphisme $\pi_1(\rho) : \pi_1(\tilde{\mathrm{V}}) \to \pi_1(\mathrm{V})$ est injectif de conoyau fini, on peut, quitte à remplacer V par $\tilde{V}$ et f par $\tilde{f}$, supposer $\pi_1(f)$ surjectif, de sorte que f ne se factorise pas à travers un revêtement étale connexe non trivial de V. On peut supposer X normale.

Montrons que $\pi_1(f)$ est injectif. Pour tout $x \in X$, notons $e_f(x)$ le degré local de f en x, qui compte le nombre de feuillets de f qui se rejoignent en x (pour une définition précise, voir [13]). Comme X est normale et V lisse, le théorème 2.2 de [20] (*cf.* aussi [13], p. 58), entraîne que l'ensemble

$$R_l = \{x \in X \mid e_f(x) > l\}$$

est fermé de codimension $\leq l$ dans X, ou vide. Montrons par récurrence sur l que R_l est non vide pour $l < d$. On a $R_0 = X$; soit $l < d$ tel que R_{l-1} soit non vide. On en choisit une composante irréductible R de dimension maximale. La projection $X \times_V R \to R$ est finie, de sorte que la diagonale Δ_R est une composante irréductible de $X \times_V R$. Comme $\dim(R) \geq \dim(X) - (l-1) > 0$ et que V est simple, R engendre V et le théorème 2.4 (appliqué à f et à la normalisation $R^* \to R \subset V$) entraîne que $X \times_V R$ est connexe. Si $X \times_V R = \Delta_R$, alors $R \subset R_{d-1} \subset R_l$, et R_l est non vide. Sinon, il existe une composante irréductible T de $X \times_V R$ distincte de Δ_R, qui rencontre Δ_R. Comme dans [13], p. 57, on conclut que pour tout point (x, x) de $T \cap \Delta_R$, on a $e_f(x) > l$, c'est-à-dire $x \in R_l$.

En particulier, R_{d-1} contient une courbe irréductible R ; cela signifie que f induit une *bijection* ensembliste de $f^{-1}(R)$ sur R. De nouveau, R engendre V ; il suffit d'appliquer le corollaire 2.5 pour terminer la démonstration. ∎

On suppose toujours V simple. Soient X une variété complète irréductible lisse et $f : X \to V$ un morphisme fini surjectif ramifié. *Toute courbe* C *dans* X *rencontre le diviseur de ramification* R_1 *de* f. En effet, on peut supposer que f

ne se factorise pas. Comme dans la démonstration du corollaire 2.6, $X \times_V C$ est connexe et contient Δ_C. Soit $X \times_V C = \Delta_C$ et $C \subset R_{d-1} \subset R_1$ (où d est le degré de f), soit C rencontre R_1.

Conjecture 2.7.– *Le diviseur de ramification de f est ample sur X.*

Remarquons que $\mathcal{O}(R_1) \simeq K_X \otimes f^*(K_V^*)$. La conjecture est vérifée lorsque V est un espace projectif ([6]) ou une variété abélienne simple, par un théorème de Kawamata (*cf.* [4]). Suivant [21], on note E_f le faisceau localement libre sur V défini comme le dual du noyau de la trace $\mathrm{Tr}_{X/V} : f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_V$.

Conjecture 2.8.– *Le fibré E_f est ample.*

C'est le cas lorsque V est un espace projectif (*loc.cit.*) ou une courbe elliptique ([4]). Kim a montré que lorsque V est la grassmannienne des q-plans dans un espace vectoriel de dimension m, le fibré E_f est $q(m-q-1)$-ample lorsque $2q \leq m$ ([17]); lorsque V est une quadrique lisse de dimension n, il est $[\frac{n+1}{2}]$-ample ([18]).

Nous terminerons avec une dernière conjecture en géométrie formelle. Soient X un sous-schéma d'un schéma V, et $\widehat{V}$ le complété formel de V le long de X ; on dit ([16], p. 64) que X est G2 dans V si $K(\widehat{V})$ est un $K(V)$-module de type fini, et G3 si $K(V) = K(\widehat{V})$. Si $f : V' \to V$ est un morphisme dominant entre schémas intègres, et que X est G3 dans V, alors $f^{-1}(X)$ est G3 dans V′ (*loc.cit.*); il est en particulier connexe. Le théorème 2.4 suggère la conjecture suivante :

Conjecture 2.9.– *Soit V une variété algébrique homogène (sur un corps algébriquement clos) ; toute sous-variété irréductible X de V qui engendre V est G2 dans V ; il existe un revêtement étale connexe $\rho : \tilde{V} \to V$ à travers lequel l'inclusion $X \subset V$ se factorise, et tel que X soit G3 dans $\tilde{V}$.*

Cette conjecture est vérifiée lorsque V est un espace projectif ou une variété abélienne (*loc.cit.*). D'autre part, la version analytique de cette conjecture a été démontrée par Chow dans [3]. Enfin, lorsque V est homogène sous un groupe linéaire semi-simple G, Faltings démontre la conjecture dans [8] sous l'hypothèse que X est de codimension strictement inférieure au minimum des rangs des facteurs simples de G (ce qui entraîne que X engendre V).

3. Le cas des grassmanniennes

Nous considérons ici le cas où V est la grassmannienne des q-plans dans un espace vectoriel M de dimension m, avec $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{M})$. Soient X une sous-variété irréductible de V de dimension d, x un point de X et $\Lambda = \Lambda_x$. L'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{V}$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathrm{M}/\Lambda)$. Tout élément φ du stabilisateur $\mathrm{G}_x = \{\gamma \in \mathrm{G} \mid \gamma(\Lambda) = \Lambda\}$ induit des isomorphismes $\gamma_1 : \Lambda \to \Lambda$ et $\gamma_2 : \mathrm{M}/\Lambda \to \mathrm{M}/\Lambda$, et agit sur $u \in \mathrm{T}_x\mathrm{V}$ par $\varphi \cdot u = \gamma_2 u \gamma_1^{-1}$. On s'intéresse donc au $\big(\mathrm{GL}(\Lambda^*) \times \mathrm{GL}(\mathrm{M}/\Lambda)\big)$-espace $\mathrm{G}(d, \Lambda^* \otimes \mathrm{M}/\Lambda)$; étudier l'orbite $\mathrm{O}(x)$ dans cet espace revient essentiellement à décrire les orbites de $\mathrm{P} \otimes \mathrm{Q} \otimes \mathrm{R}$ sous l'action du groupe $\big(\mathrm{GL}(\mathrm{P}) \times \mathrm{GL}(\mathrm{Q}) \times \mathrm{GL}(\mathrm{R})\big)$, où P, Q et R sont des espaces vectoriels de dimension d, q et $m - q$, ce qui est malheureusement une question très difficile. Nous nous contenterons donc de quelques cas particuliers.

On dira qu'*un diviseur irréductible* X *de* $\mathrm{G}(q, \mathrm{M})$ *est de rang* $k > 0$ *si, pour* $x \in \mathrm{X}$ *générique,* $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ *définit un point de* $\mathbf{P}\mathrm{T}_x^*\mathrm{V} = \mathbf{P}\,\mathrm{Hom}(\mathrm{M}/\Lambda, \Lambda)$ *qui correspond à un homomorphisme de rang* k. L'orbite $\mathrm{O}(x)$ est l'ensemble des homomorphismes de rang fixé k. Celle-ci n'est pas contenue dans un hyperplan, de sorte que tout couple (X, Y), avec Y irréductible de dimension > 0, vérifie $\mathcal{P}(0)$. Soient L un sous-espace vectoriel de $\mathrm{T}_x\mathrm{V} = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathrm{M}/\Lambda)$, et $\mathrm{L}^\perp$ l'orthogonal de L dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}/\Lambda, \Lambda)$; l'intersection $\mathrm{O}(x) \cap \Sigma_\mathrm{L}$ s'identifie à l'ensemble des points $\mathrm{L}_k^\perp$ de $\mathrm{L}^\perp$ correspondant aux homomorphismes de rang k. Le théorème 2.3 de [7] donne

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_{O(x)} L_k^{\perp} &\geq \dim(L) - \max_{0\leq \ell \leq q-k}\bigl(\dim(L_\ell) - k\ell\bigr)\\ &\geq \dim(L) - \max\bigl(0, \dim(L_1) - k, \dim(L) - 2k\bigr)\\ &= \min\bigl(\dim(L), \dim(L) - \dim(L_1) + k, 2k\bigr) ,\end{aligned}$$

de sorte que si un couple (X, Y), avec Y irréductible de dimension ≥ 2, ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}(1)$, on a $k = 1$ (X est de rang 1) et, pour $y \in Y$ générique, $T_yY = (T_yY)_1$. Il existe des sous-espaces vectoriels $\{M_i\}_{1\leq i\leq m}$ de M, avec $\dim(M_i) = i$, tels que, soit $\dim(Y) = e < q$ et

$$T_yY = \operatorname{Hom}(\Lambda_y/M_{q-e-1}, M_{q+1}/\Lambda_y) \subset \operatorname{Hom}(\Lambda_y, M/\Lambda_y) ,$$

soit $\dim(Y) = e < m - q$ et

$$T_yY = \operatorname{Hom}(\Lambda_y/M_{q-1}, M_{q+e+1}/\Lambda_y) \subset \operatorname{Hom}(\Lambda_y, M/\Lambda_y) .$$

Lemme 3.1.– *Soit* Y *une sous-variété irréductible de* V *; on suppose que pour* y *générique dans* Y, *correspondant à un sous-espace* Λ *de* M, *il existe une chaîne de sous-espaces* $M_a \subset \Lambda \subset M_b \subset M$ *(dépendant de* y*) telle que* $\dim(M_i) = i$ *et* $T_yY \subset \operatorname{Hom}(\Lambda/M_a, M_b/\Lambda)$. *On a alors*

$$[Y] \cdot \sigma_{b-q+1} = [Y] \cdot \sigma_{\underbrace{1,\ldots,1}_{q-a+1 \text{ fois}}} = 0 .$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $a = 0$, le cas général s'en déduisant par dualité. Soient N un sous-espace générique de M de dimension $m - b$ et Σ la variété de Schubert $\{v \in V \mid \dim(\Lambda_v \cap N) = 1\}$ (dont l'adhérence est de classe σ_{b-q+1}). Par [19], soit $Y \cap \Sigma$ est vide, auquel cas on a $[Y] \cdot \sigma_{b-q+1} = 0$, soit $\dim(Y) + \dim(\Sigma) \geq \dim(V)$ et l'intersection est transverse en tout point y de $Y \cap \Sigma$. Mais

$$T_y\Sigma = \{u : \Lambda \to M/\Lambda \mid u(\Lambda \cap N) \subset (\Lambda + N)/\Lambda\}$$

et

$$T_yY + T_y\Sigma \subset \{u : \Lambda \to M/\Lambda \mid u(\Lambda \cap N) \subset (M_b + N)/\Lambda\} \; ;$$

comme M_b et N ont la droite $\Lambda \cap N$ en commun, $M_b + N$ est différent de M donc $T_yY + T_y\Sigma$ de T_yV. Seule la première possibilité peut se produire, ce qui montre le lemme. ■

Il ressort du lemme et de la discussion le précédant que si un couple (X, Y), avec X diviseur et Y de dimension ≥ 2, ne satisfait pas la propriété $\mathcal{P}(1)$, le diviseur X est de rang 1, et on a soit $[Y] \cdot \sigma_2 = 0$, soit $[Y] \cdot \sigma_{1,1} = 0$. On déduit du théorème 1.1 le résultat suivant.

Théorème 3.2.– *Plaçons-nous dans la situation du théorème* (1.1), *avec* $V = G(q, M)$; *supposons que* $f(X)$ *soit un diviseur, et que* $\dim g(Y) \geq 2$. *On est dans l'un des cas suivants :*

1) $X \times_V Y$ *est connexe et, si* X *et* Y *sont localement irréductibles,* $\pi_1(X \times_V Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ *est surjective.*

2) *Il existe un diviseur* D *de* $f(X)$ *tel que* $[D] \cdot [g(Y)] = 0$.

3) $[g(Y)] \cdot \sigma_2 = 0$ *ou* $[g(Y)] \cdot \sigma_{1,1} = 0$, *et le diviseur* $f(X)$ *est de rang* 1.

On peut caractériser géométriquement les diviseurs irréductibles de rang 1. Je remercie Ciliberto de m'avoir communiqué la démonstration qui suit.

Proposition 3.3.– *Soit* X *un diviseur irréductible de rang* 1 *dans* $G(q, M)$; *il existe une sous-variété irréductible* S *de* $\mathbf{P}M$ *de codimension* $c \in \{1, \dots, q\}$ *telle que* X *soit l'adhérence de*

$$\{\ x \in G(q, M) \mid \exists s \in \mathbf{P}\Lambda_x \cap S_{\text{lisse}} \quad \dim(\mathbf{P}\Lambda_x \cap T_sS) \geq q - c\ \}\,.$$

En particulier, lorsque $q = 2$, l'ensemble X est soit celui des droites qui rencontrent une sous-variété donnée irréductible de codimension 2, soit celui des droites tangentes à une hypersurface.

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{X}$ générique, il existe un point $p(x)$ de $\mathbf{P}\Lambda_x$ et un hyperplan $\mathrm{H}(x)$ de M/Λ_x tels que $\mathrm{T}_x\mathrm{X} = \{u : \Lambda_x \to \mathrm{M}/\Lambda_x \mid u(\Lambda_{p(x)}) \subset \mathrm{H}(x)\}$. Soient Σ l'adhérence dans $\mathrm{X} \times \mathbf{P}\mathrm{M}$ du lieu des paires $(x, p(x))$, et S la projection de Σ dans $\mathbf{P}\mathrm{M}$. On a

$$\dim(\mathrm{S}) \geq \dim(\Sigma) - \dim \mathrm{G}(q-1, m-1) = m - q - 1 .$$

Pour $x \in \mathrm{X}$ générique, $\mathrm{T}_{p(x)}\mathrm{S}$ est la projection de $\mathrm{T}_{(x,p(x))}\Sigma$. Or ce dernier espace s'identifie à l'ensemble des paires (u, v), où v est un morphisme $\Lambda_{p(x)} \to \mathrm{M}/\Lambda_{p(x)}$, et u un morphisme $\Lambda_x \to \mathrm{M}/\Lambda_x$ qui est dans $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$, telles que $u(a) = \pi v(a)$ pour tout a dans la droite $\Lambda_{p(x)}$ (où π est la surjection canonique $\mathrm{M}/\Lambda_{p(x)} \to \mathrm{M}/\Lambda_x$). Cela entraîne $v(\Lambda_{p(x)}) \subset \pi^{-1}(\mathrm{H}(x))$, de sorte que $\mathrm{T}_{p(x)}\mathrm{S} \subset \mathbf{P}(\pi^{-1}(\mathrm{H}(x)))$. En particulier $\mathrm{S} \neq \mathbf{P}\mathrm{M}$, et $\dim(\mathbf{P}\Lambda_x \cap \mathrm{T}_{p(x)}\mathrm{S}) \geq \dim(\mathrm{S}) - m + q + 1$. Un calcul de dimension montre que l'ensemble des $x \in \mathrm{G}(q, \mathrm{M})$ vérifiant cette propriété est au plus un diviseur, d'où la proposition. ∎

Il est bon de rappeler ici la construction de Hansen ([15]), qui montre que le cas 3) du théorème 3.2 peut se produire. Soient S une sous-variété irréductible de $\mathbf{P}\mathrm{M}$ de dimension l, et $\mathbf{P}\mathrm{L}$ un sous-espace linéaire de codimension l la rencontrant transversalement. Soit X la variété $\{ (s, v) \in \mathrm{S} \times \mathrm{G}(q, \mathrm{M}) \mid s \in \mathbf{P}\Lambda_v\}$; elle est projective irréductible. Posons $\mathrm{Y} = \mathrm{G}(q, \mathrm{L})$ et notons $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}(q, \mathrm{M})$ la seconde projection. Lorsque $q < m - l$, l'image inverse $f^{-1}(\mathrm{Y})$ a $\deg(\mathrm{S})$ composantes connexes. On a d'autre part (*cf.* [10], ex. 14.7.6)

$$[f(\mathrm{X})] = \deg(\mathrm{S})\, \sigma_{m-q-l} \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{Y}] = \sigma_{l,\dots,l} .$$

Lorsque $l = m - q - 1$, l'image $f(\mathrm{X})$ est un diviseur de rang 1 (*cf.* prop. 3.3), et $[\mathrm{Y}] \cdot \sigma_2 = 0$.

Le cas de la codimension 2 pourrait se traiter par les mêmes méthodes, mais le volume des calculs rend l'exposition pénible; nous nous contenterons d'un exemple simple. Pour tout $p \in \mathbf{P}\mathrm{M}$, on note $\Pi_p = \{x \in \mathrm{G}(q,\mathrm{M}) \mid p \in \Lambda_x\}$; sa classe est σ_{m-q}.

Théorème 3.4.– *Plaçons-nous dans la situation du théorème* (1.1), *avec* $\mathrm{V} = \mathrm{G}(q,\mathrm{M})$. *On suppose que* $g(\mathrm{Y}) = \Pi_p$, *où* p *est un point de* $\mathbf{P}\mathrm{M}$, *et que*

a) $[f(\mathrm{X})] \cdot \sigma_{m-q,1} \neq 0$;

b) *pour tout diviseur* D *de* $f(\mathrm{X})$, *on a* $[\mathrm{D}] \cdot \sigma_{m-q} \neq 0$;

c) *pour* x *générique dans* $f(\mathrm{X})$, *il existe un* 2*-plan* $\mathrm{P} \subset \Lambda_x$ *tel que, pour tout* $a \in \mathrm{P}$ *non nul, le morphisme* $\mathrm{T}_x f(\mathrm{X}) \to \mathrm{M}/\Lambda_x$, $u \mapsto u(a)$, *soit surjectif.*

Alors $\mathrm{X} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y}$ *est connexe et, si* X *et* Y *sont localement irréductibles,* $\pi_1(\mathrm{X} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y}) \to \pi_1(\mathrm{X}) \times \pi_1(\mathrm{Y})$ *est surjective.*

Démonstration. L'hypothèse a) assure que $f(\mathrm{X})$ rencontre tout diviseur de tout Π_q ; l'hypothèse b) assure que tout diviseur de $f(\mathrm{X})$ rencontre tout Π_q. Si $x \in f(\mathrm{X}) \cap \Pi_p$, l'espace tangent $\mathrm{T}_x\Pi_p$ s'identife à $\mathrm{Hom}(\Lambda_x/\Lambda_p, \mathrm{M}/\Lambda_x)$ et l'orbite $\mathrm{O}(x)$ dans $\mathrm{G}(\dim(\Pi_p), \mathrm{Hom}(\Lambda_x, \mathrm{M}/\Lambda_x))$ est l'ensemble des $\mathrm{Hom}(\Lambda_x/\Lambda_q, \mathrm{M}/\Lambda_x)$, pour q parcourant $\mathbf{P}\Lambda_x$. Pour que $\mathrm{T}_x f(\mathrm{X}) + \mathrm{Hom}(\Lambda_x/\Lambda_q, \mathrm{M}/\Lambda_x) = \mathrm{T}_x\mathrm{V}$, il faut et il suffit que l'application $\mathrm{T}_x f(\mathrm{X}) \to \mathrm{M}/\Lambda_x$, $u \mapsto u(a)$, où a engendre la droite Λ_q, soit surjective. Pour que $(f(\mathrm{X}), \Pi_p)$ satisfasse $\mathcal{P}(1)$, il faut et il suffit que l'ensemble des $q \in \mathbf{P}\Lambda_x$ tels que cette propriété soit mise en échec, soit de codimension ≥ 2. Par d), ce fermé ne rencontre pas la droite $\mathbf{P}\mathrm{P}$, d'où le théorème. ∎

On a aussi une version duale.

Théorème 3.5.– *Plaçons-nous dans la situation du théorème* (1.1), *avec* $\mathrm{V} = \mathrm{G}(q,\mathrm{M})$. *On suppose que* $g(\mathrm{Y}) = \mathrm{G}(q,\mathrm{H})$, *où* H *est un hyperplan de* M, *et que*

a) $[f(\mathrm{X})] \cdot \sigma_{2,1,\ldots,1} \neq 0$;

b) *pour tout diviseur* D *de* $f(\mathrm{X})$, *on a* $[\mathrm{D}] \cdot \sigma_{1,\ldots,1} \neq 0$;

c) *pour* $x \in f(\mathrm{X})$ *générique, il existe un sous-espace vectoriel* L *de* M/Λ_x *de codimension* 2 *tel que le morphisme* $\mathrm{T}_x f(\mathrm{X}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda_x, \mathrm{L}')$ *soit surjectif pour tout hyperplan* L′ *de* M/Λ_x *contenant* L.

Alors $\mathrm{X} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y}$ *est connexe et, si* X *et* Y *sont localement irréductibles,* $\pi_1(\mathrm{X} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{Y}) \to \pi_1(\mathrm{X}) \times \pi_1(\mathrm{Y})$ *est surjective.*

Références

[1] Borel, A., Remmert, R., *Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **145** (1962), 429–439

[2] Chow, W.-L., *On the Projective Embedding of Homogeneous Varieties*, in "Algebraic Geometry and Topology", a Symposium in honor of S. Lefschetz, R.H. Fox, D.C. Spencer, A.W. Tucker editors, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957, 122–128

[3] Chow, W.-L., *On meromorphic maps of algebraic varieties*, Ann. of Math. **89** (1969), 391–403

[4] Debarre, O., *Théorèmes de connexité et variétés abéliennes*, Am. J. of Math. **117** (1995), 787–805

[5] Debarre, O., *Théorèmes de connexité pour les produits d'espaces projectifs et les grassmanniennes*, à paraître

[6] Ein, L., *The Ramification Divisors for Branched Coverings of* $\mathbf{P}_k^n$, Math. Ann. **261** (1982), 483–485

[7] Eisenbud, D., *Linear sections of determinantal varieties*, Am. J. of Math. **110** (1988), 541–575

[8] Faltings, G., *Formal Geometrie und homogene Räume*, Invent. Math. **64** (1981), 123–165

[9] Fulton, W., On Nodal Curves, in *Algebraic Geometry – Open Problems*, Proceedings, Ravello 1982, Springer Lecture Notes in Mathematics 977

[10] Fulton, W., Intersection Theory, Springer Verlag, Berlin, 1984

[11] Fulton, W., Hansen, J., *A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings*, Ann. of Math. **110** (1979), 159–166

[12] Fulton, W., Lazarsfeld, R., *Connectivity and its Applications in Algebraic Geometry,* in Algebraic Geometry, Proceedings of the Midwest Algebraic Geometry Conference, Chicago 1980, Springer Lecture Notes 862

[13] Gaffney, T., Lazarsfeld, R., *On the Ramification of Branched Coverings of* $\mathbf{P}^n$, Invent. Math. **59** (1980), 53–58

[14] Goldstein, N., *Ampleness and connectedness in complex* G/P, Trans. A.M.S. **274** (1982), 361–373

[15] Hansen, J., *A connectedness theorem for flagmanifolds and Grassmannians,* Am. J. Math. **105** (1983), 633–639

[16] Hironaka, H., Matsumura, H., *Formal functions and formal embeddings*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 52–82

[17] Kim, M., *A Barth-Lefschetz type theorem for branched coverings of Grassmannians,* à paraître dans J. reine angew. Math.

[18] Kim, M., *On Branched Coverings of Quadrics,* à paraître

[19] Kleiman, S., *The transversality of a general translate,* Comp. Math. **28** (1978), 287–297

[20] Lazarsfeld, R., Thesis, Brown University, 1980

[21] Lazarsfeld, R. *A Barth-Type Theorem for Branched Coverings of Projective Space*, Math. Ann. **249** (1980), 153–162

[22] Nori, M., *Zariski's conjecture and related problems,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **16** (1983), 305–344

[23] Paranjape, K.H., Srinivas, V., *Self maps of homogeneous spaces*, Inv. Math. **98** (1989), 425–444