Compositio Mathematica 58 (1986) 3–11

SUR LA DÉMONSTRATION DE A. WEIL DU THÉORÈME DE TORELLI POUR LES COURBES

O. Debarre

Abstract

Let Θ_a be the translate of the theta divisor Θ of the Jacobian JC of a complex curve C, by a non zero element a of JC. If C is not a double cover of an elliptic curve and is of genus at least three, we prove that $\Theta \cdot \Theta_a$ is non-integral if and only if a corresponds to some $\mathcal{O}_C(p-q)$, p, $q \in C$.

Introduction

Dans [4], A. Weil démontrait le théorème de Torelli pour les courbes de la façon suivante. Désignant par Θ_a le translaté du diviseur Θ de la jacobienne JC d'une courbe C par un élément a non nul de JC, il remarquait que $\Theta \cdot \Theta_a$ avait deux composantes lorsque $a = \mathcal{O}_C(p-q)$, pour deux points p et q de C. Il démontrait ensuite que, si C est de genre supérieur ou égal à 5, et sauf dans un cas particulier (cas 2) de notre théorème), c'était le seul cas où $\Theta \cdot \Theta_a$ n'était pas intègre. Ceci lui permettait alors de caractériser la surface $C - C$ dans la jacobienne, puis de démontrer le théorème de Torelli.

On expose dans cet article une démonstration géométrique élémentaire de ces résultats, valable en tout genre supérieur ou égal à 3, qui permet aussi de décrire les composantes de $\Theta \cdot \Theta_a$ dans tous les cas. Cette description permet en particulier de trouver toutes les trisécantes à la variété de Kummer associée à une jacobienne de courbe.

Notations

Dans toute la suite, C désignera une courbe complexe projective lisse, g son genre.

On notera J^dC le groupe des faisceaux inversibles de degré d sur C. Les variétés J^dC sont toutes isomorphes non canoniquement à $JC = J^0C$, qui est une variété abélienne principalement polarisée. Un diviseur Θ associé peut être décrit dans $J^{g-1}C$ comme l'image de l'application:

$$C^{g-1} \to J^{g-1}C$$

$$(x_1, \dots, x_{g-1}) \mapsto \mathcal{O}_C(x_1 + \dots + x_{g-1})$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on notera $C^{(n)}$ le quotient de C^n par l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et par $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ l'image de $(x_1, \dots, x_n)$ dans $C^{(n)}$.

Enfin, pour tous cycles X et Y sur JC se rencontrant proprement, on notera $X \cdot Y$ leur intersection en tant que cycles. Il nous arrivera de confondre une sous-variété réduite de JC avec le cycle associé.

Notre résultat est le suivant:

THÉORÈME: *Soient C une courbe projective lisse de genre g supérieur ou égal à 3, Θ le diviseur thêta canonique de $J^{g-1}C$, a un diviseur de degré 0 sur C, non équivalent à zéro. On note $\Theta_a = \Theta + a$. Alors $\Theta \cdot \Theta_a$ est intègre sauf dans les cas suivants*:

(1) *Il existe deux points p et q de C tels que $a \equiv p - q$.*

(2) *Il existe une courbe elliptique lisse E, un morphisme fini de degré deux π: $C \to E$ et un diviseur e sur E tels que $a \equiv \pi^* e$.*

REMARQUE 1: Dans le premier cas, $\Theta \cdot \Theta_a$ est somme des espaces irréductibles W_p^{g-2} et $(K_C - W^{g-2})_{-q}$, i.e.:

$$\Theta \cdot \Theta_a = \left\{ \mathcal{O}_C(x_1 + \dots + x_{g-2} + p) \mid x_i \in C \right\}$$

$$+ \left\{ \mathcal{O}_C(K_C - x_1 - \dots - x_{g-2} - q) \mid x_i \in C \right\}.$$

En particulier, $\Theta \cdot \Theta_a$ est réduit sauf si C est hyperélliptique et (p, q) est une paire involutive.

Dans le second cas, $\Theta \cdot \Theta_a$ est réduit et a en général deux composantes que l'on peut décrire explicitement (Remarques 2 et 3), sauf dans un cas particulier au genre trois (Remarque 3), où il y a trois composantes.

On peut déduire de ce théorème le théorème de Torelli, de facon analogue à celle employée dans [2].

COROLLAIRE 1: *Soient C et C' deux courbes projectives lisses de même genre g supérieur ou égal à 3. On suppose qu'il existe un isomorphisme de variétés abéliennes principalement polarisées v: $JC \to JC'$. Alors il existe un isomorphisme u: $C' \to C$ tel que $v = \pm u^*$.*

L'ensemble $Z_C = \{a \in JC \mid \Theta \cdot \Theta_a$ n'est pas intègre$\}$ ne dépend pas du diviseur Θ choisi dans JC pour le définir. En particulier:

$$v(Z_C) = \{v(a) \in JC' \mid \Theta \cdot \Theta_a \text{ non intègre}\}$$

$$= \{v(a) \in JC' \mid v(\Theta) \cdot v(\Theta)_{v(a)} \text{ non intègre}\} = Z_{C'}.$$

Or il découle du théorème que Z_C est la réunion de $C - C$ et de, éventuellement, la ou les courbes elliptiques $\pi^* JE \subset JC$. Comme $C - C$ est de dimension 2 dans JC, on en déduit que dans tous les cas, $v(C - C) = C' - C'$. Pour $L \in J^{g-1}C$, on définit le diviseur thêta $\Theta_L \subset JC$ par $\Theta_L = \{x \in JC \mid H^0(x \otimes L) \neq 0\}$. On obtient ainsi, pour $H^0(L) \neq 0$, tous les diviseurs thêta passant par 0. Si $h^0(L) > 1$, on a $h^\circ(L \otimes \mathcal{O}_C(p - q)) \geqslant 1$ pour tous p, q sur C, donc $\Theta_L \supset C - C$. Si par contre $h^0(L) = 1$, alors $h^0(K - L) = 1$, et si on note $|L| = \{x_1 + \ldots + x_{g-1}\}$, $|K - L| = \{y_1 + \ldots + y_{g-1}\}$, on a:

$$\Theta_L \cap (C - C) = \bigcup_{i=1}^{g-1} [(C - x_i) \cup (y_i - C)].$$

On choisit $L \in J^{g-1}C$ avec $h^0(L) = 1$. Alors $v(\Theta_L \cap (C - C)) = \Theta_{L'} \cap (C' - C')$ est réductible donc, par ce qui précède, réunion de $(g-1)$ translatés de C' et de $(g-1)$ translatés de $(-C')$. On en déduit:

$$\exists x \in C, \quad \exists x' \in C', \quad v(C - x) = \pm(C' - x'),$$

ce qui prouve le corollaire.

Une autre conséquence de ce théorème est la suivante. Soit K la variété de Kummer associée à (JC, Θ), c'est-à-dire l'image de JC par le morphisme ψ associé au système linéaire sans point base $|2\Theta|$. Il est facile de vérifier que pour $(p, q, r, s) \in C^4$ et $\zeta \in J^{-1}C$ tel que $2\zeta \equiv s - p - q - r$, les points $\psi(\zeta + p)$, $\psi(\zeta + q)$, $\psi(\zeta + r)$ sont alignés (cf. [3] page 80). Réciproquement, si $\psi(a)$, $\psi(b)$, $\psi(c)$ sont alignés, alors $\Theta \cdot \Theta_{a+b} \leqslant \Theta \cdot \Theta_{a-c} + \Theta \cdot \Theta_{a+c}$, au sens que la différence de ces deux cycles de codimension deux est un cycle effectif. Le corollaire suivant montre donc que les seules trisécantes à K sont celles que l'on vient d'expliciter. Q.E.D.

COROLLAIRE 2: *Soit C une courbe projective lisse de genre supérieur ou égal à 3. On suppose qu'il existe trois éléments non nuls a, x, et y de JC vérifiant*:

$$\{0, a\} \cap \{x, y\} = \emptyset, \quad \Theta \cdot \Theta_a \leqslant \Theta \cdot \Theta_x + \Theta \cdot \Theta_y.$$

Alors il existe p, q, r, s sur C tels que:

$$a \equiv p - q, \quad x \equiv p - r, \quad y \equiv s - q.$$

Les intersections $\Theta \cdot \Theta_a$, $\Theta \cdot \Theta_x$, $\Theta \cdot \Theta_y$ sont toutes réductibles. On va comparer, à l'aide des remarques 1, 2 et 3, les composantes possibles, et montrer que le cas 2) du théorème ne peut se produire pour aucun des éléments a, x, y de JC.

On suppose d'abord $g \geqslant 4$. Si on est dans le cas 2) du théorème, on note σ l'involution de C associée à π et Z_σ^a, Z_σ les deux composantes de $\Theta \cap \Theta_a$, pour $a \in \pi^*$ Pic E (cf. Remarque 2). On note "$-$" l'involution canonique $L \to K_C \otimes L^{-1}$ de $J^{g-1}C$.

Par le lemme 1, un élément générique L de Z_σ ou Z_σ^a vérifie $h^0(L) = 1$, donc Z_σ et Z_σ^a sont distincts de tous les W_p^{g-2}, $p \in C$. On a $-Z_\sigma = Z_\sigma$, d'où $-Z_\sigma^a = Z_\sigma^{-a}$, donc Z_σ et Z_σ^a sont aussi distincts de tous les $-W_{-q}^{g-2}$, $q \in C$.

D'autre part, si on avait $Z_\tau = Z_\sigma^a$ pour une autre involution τ, on aurait pour $(x_1, \ldots, x_{g-2})$ générique dans C^{g-2}, $\mathcal{O}_C(x_1 + \ldots x_{g-2} + \sigma\tau x_{g-2}) \in Z_\tau$, ce qui est impossible. De même, Z_σ est distinct de Z_τ si σ l'est de τ. On a montré que les W_p^{g-2}, $-W_{-q}^{g-2}$, Z_σ, Z_τ, Z_σ^a, Z_σ^b sont distincts pour $\sigma \neq \tau$, $a \not\equiv b$, $g \geqslant 3$. Ceci permet de conclure pour $g \geqslant 4$.

Le cas $g = 3$ se traite de facon similaire: les composantes sont du type Z_σ (cas 1 et 2 de la Remarque 3) ou Z_σ^a (cas 3). Si a relève du cas 1 de la remarque, de sorte que $\Theta \cdot \Theta_a = Z_{\sigma_1} \cup Z_{\sigma_2} \cup Z_{\sigma_3}$, deux de ces composantes sont par exemple dans $\Theta \cdot \Theta_x$. Donc x relève aussi du cas 1 et $\Theta \cdot \Theta_x = Z_{\sigma_1} \cup Z_{\sigma_2} \cup Z_\tau$. Les groupes de Galois de $\phi_{|K+a|}$ et $\phi_{|K+x|}$, tous deux engendrés par σ_1 et σ_2, sont alors égaux et $K + a \equiv K + x$. Le cas 2 se traite de facon identique. Si a relève du cas 3 de la remarque, Z_σ^a est composante de $\Theta \cdot \Theta_x$, donc x relève aussi de ce cas, pour la même involution σ, et $a \equiv x$. Q.E.D.

Démonstration du théorème: L'idée de base, due à Weil, est de considérer le système linéaire $|K + a|$. Sa dimension projective est $g - 2$ si a est non équivalent à 0, par Riemann-Roch. Weil remarque alors que si $|K + a|$ a un point base p, on a $h^0(K + a - p) = g - 1$ et, par Riemann-Roch, $h^0(p - a) = 1$, soit $a \equiv p - q$, où p, q sont deux points de C. On supposera par la suite que $|K + a|$ est sans point base. Il définit donc un morphisme ϕ: $C \to |K + a|^v \simeq \mathbb{P}^{g-2}$.

Soit p: $\Theta \cap \Theta_a \dashrightarrow |K + a|$ l'application rationnelle définie de la façon suivante: pour tout L de $\Theta \cap \Theta_a$ tel que $h^0(L) = h^0(L - a) = 1$, on a $h^0(K - L + a) = 1$ et on pose, si $|L| = \{D\}$ et $|K - L + a| = \{D'\}$, $p(L) = D + D'$.

Lemme 1: *L'application p est définie sur un ouvert dense de $\Theta \cap \Theta_a$ et sa restriction à chaque composante est dominante. Le cycle $\Theta \cdot \Theta_a$ est réduit.*

Comme $\Theta \cap \Theta_a$ est défini localement par deux équations dans $J^{g-1}C$, chacune de ses composantes est de dimension $g-2$. Or on a $\dim(\Theta_{\mathrm{sing}} \cup \Theta_{a,\,\mathrm{sing}}) \leqslant g-3$, donc, pour toute composante Z de $\Theta \cap \Theta_a$ et L générique dans Z, L est lisse sur Θ et sur Θ_a, i.e. $h^0(L) = h^0(L - a) = 1$. L'application p est génériquement finie, donc $p_{|Z}$ est dominante. Il existe donc $L \in Z$ tel que $p(L)$ se compose de $2g-2$ points distincts. L'espace tangent $T_L\Theta$ correspond au point $D + D^*$ de $|K| \simeq \mathbb{P}T_L^*(JC)$, où $D^* \in |K - L|$, et l'espace $T_L\Theta_a$ à $D' + D'^*$, où $D'^* \in |L - a|$. Comme a est non nul, D n'est pas égal à D'^* et, par construction, D et D' sont sans point commun. Les espaces $T_L\Theta$ et $T_L\Theta_a$ sont distincts et Z est réduit. Q.E.D.

On se restreint donc à l'étude de l'ensemble $\Theta \cap \Theta_a$, que l'on va décrire de façon géométrique. Son image réciproque par l'application:

$$C^{(g-1)} \twoheadrightarrow \Theta \subset J^{g-1}C$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{g-1} \mapsto \mathcal{O}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{g-1})$$

est le diviseur:

$$\overline{W} = \{ x_1 + x_2 + \ldots + x_{g-1} \in C^{(g-1)} \mid H^0(x_1 + x_2 + \ldots + x_{g-1} - a) \neq 0 \}$$

égal par Riemann-Roch à:

$$\overline{W} = \{ x_1 + \ldots + x_{g-1} \in C^{(g-1)} \mid H^0(K + a - x_1 - x_2 - \ldots - x_{g-1}) \neq 0 \}.$$

L'espace $\overline{W}$ est donc l'ensemble des $x_1 + \ldots + x_{g-1}$ dans $C^{(g-1)}$ tels que les $(g-1)$ points $\phi x_1, \ldots, \phi x_{g-1}$ soient "sur" un même hyperplan. Plus précisément, soit U l'ouvert de $|K + a|$ des hyperplans de $|K + a|^{\vee}$ coupant la courbe $\phi(C) = C'$ tranversalement, en des points au-dessus desquels ϕ est étale. Grâce au lemme précédent, l'étude des composantes de $\Theta \cap \Theta_a$ se ramène à celle de:

$W = \{ x_1 + \ldots + x_{g-1} \in C^{(g-1)} \mid$ Les x_i sont deux à deux distincts, ϕ est lisse au-dessus des ϕx_i et il existe un élément H de U tel que $\phi x_i \in H$ pour tout $i \}$.

On note encore ϕ: $C \to C'$ le morphisme induit par ϕ de C sur son image. A cause des formules $2g - 2 = \deg \phi \cdot \deg C'$, $\deg C' \geqslant g-2$, on est dans l'un des cas suivants:

- ϕ est birationnelle
- ϕ est de degré 2
- ϕ est de degré 3 et $g = 4$
- $g = 3$

que l'on analyse dans cet ordre.

(a) ϕ birationnelle

L'espace W, donc aussi l'espace $\Theta \cap \Theta_a$, est irréductible grâce au théorème suivant, tiré de [1], dont on reproduit ici la démonstration.

THÉORÈME DE POSITION UNIFORME: *Soient C une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^r$, U l'ouvert de $(\mathbb{P}^r)^\vee$ formé des hyperplans coupant C transversalement. Alors, pour tout entier positif m,*

$$I(m) = \{(x_1, \ldots, x_m, H) \in C^m \times U \mid$$

$$x_i \text{ deux à deux distincts et } x_i \in H\}$$

est irréductible.

La projection pr^m: $I(m) \to U$ est un revêtement étale. On choisit un point base H_0 de U, et on note F_m sa fibre $(\mathrm{pr}^m)^{-1}(H_0)$. L'irréductibilité de $I(m)$ est alors équivalente au fait que $\pi_1(U, H_0)$ opère transitivement sur F_m par monodromie, c'est-à-dire que $\pi_1(U, H_0)$ opère m fois transitivement sur F_1 par la monodromie de pr^1: $I(1) \to U$. Le théorème sera démontré si on montre que le groupe de Galois G de pr^1 est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$, où d est le degré de C. Or cela résulte des deux remarques suivantes:

G est 2 fois transitif: c'est équivalent par ce qui précède à l'irréductibilité de $I(2)$. Or la projection pr_1: $I(2) \to C \times C$ est dominante et les fibres sont des ouverts denses d'espaces projectifs de dimension $r-2$, donc $I(2)$ est irréductible.

G contient une transposition: si H_1 est un hyperplan simplement tangent à C en un point et si $\{H\}_{t \in \mathbb{C}, |t-1| < \epsilon}$ est une famille à un paramètre d'hyperplans avec $H_t \in U$ si $t \neq 1$, on voit que $H_t \cap C$ contient deux points qui se confondent en le point de tangence de H_1 avec C quand t tend vers 1. Ces deux points sont interchangés quant t tourne autour de 1. Q.E.D.

Il suffit alors de remarquer que $W \simeq \mathrm{pr}(I(g-1))$, où

$$\mathrm{pr}\colon C^{g-1} \times U \to C^{g-1} \to C^{(g-1)}.$$

(b) ϕ est de degré 2

LEMME 2: *Si ϕ est de degré 2, ou plus généralement s'il existe une involution σ sur C telle que ϕ se factorise par π: $C \to C/\sigma$, alors C/σ est une courbe elliptique lisse E et il existe un diviseur e sur E tel que $a \equiv \pi^* e$.*

Le revêtement ramifié π: $C \to C/\sigma = E$ est associé à un élément δ de

Pic E défini par $\pi_*\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E(-\delta)$. Le morphisme ϕ se factorise par π si et seulement si il existe un diviseur e sur E, de degré 0, et tel que:

$$a \equiv \pi^* e \text{ et } \big(H^0(E, K_E + e) = 0 \text{ ou } H^0(E, K_E + \delta + e) = 0\big).$$

Comme δ est de degré positif ou nul, le théorème de Riemann-Roch donne $g(E)$ égal à 0 ou 1. Comme a n'est pas équivalent à 0, il en est de même pour e et E n'est pas rationnelle. Q.E.D.

REMARQUE 2: Dans le cas où ϕ est de degré 2, les composantes de $\Theta \cap \Theta_a$ sont:

$$\big\{ \mathcal{O}_C(x_1 + \ldots + x_{g-1}) \,|\, \phi x_1, \ldots, \phi x_{g-1}$$

$$\text{sont distincts et sur un hyperplan élément de } U \big\}^-$$

et

$$\big\{ \mathcal{O}_C(x_1 + \ldots + x_{g-2} + \sigma x_{g-2}) \,|\, x_i \in C \text{ quelconques} \big\}.$$

Il suffit de montrer que le premier ensemble est irréductible. On considère:

$$\text{pr: } I = \{(x, H) \in C \times U \,|\, \phi x \in H\} \to U.$$

On choisit un point base H_0 de U, de fibre $\{a_1^1, \ldots, a_{g-1}^1, a_1^2, \ldots, a_{g-1}^2\}$, où $a_i^2 = \sigma a_i^1$. Il suffit alors de montrer que le groupe de Galois G de pr opére transitivement sur les $(g-1)$-uples ordonnés $(a_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, a_{i_{g-1}}^{\alpha_{g-1}})$, où $(i_1, \ldots, i_{g-1})$ est une permutation de $(1, \ldots, g-1)$ et $\alpha_j \in \{1, 2\}$.

Un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème de position uniforme montre que G est transitif sur les quadruplets $(a_i^\alpha, a_j^\beta, \sigma a_i^\alpha, \sigma a_j^\beta)$ $i \neq j$; $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, et qu'il contient une double transposition $(a_i^1, a_j^1)(a_i^2, a_j^2)$. Le groupe G contient donc toutes les permutations du type $a_i^\alpha \to a_{\tau(i)}^\alpha$, pour $\tau \in \mathfrak{S}_{g-1}$.

On considère alors une famille d'hyperplans $(H_t)_{t \in \mathbb{C}, |t-1| < \epsilon}$ vérifiant $H_t \in U$ si $t \neq 1$, H_1 passe par un point de C' au-dessus duquel ϕ est ramifié. Lorsque $t \neq 1$, $\phi^{-1}(H_t \cap C')$ contient deux points que se confondent en le point de ramification lorsque t tend vers 1. Ceci montre que G contient une transposition (a_i^1, a_i^2), et termine la démonstration de la remarque.

(c) Cas $g = 4$ et ϕ de degré 3

L'image de ϕ est une conique Q dans $\mathbb{P}^2$. On rappelle que:

$$W = \big\{ x_1 + x_2 + x_3 \in C^{(3)} \,|\, \text{Les } x_i \text{ sont deux à deux distincts, } \phi \text{ est}$$

$$\text{étale sur } \phi^{-1}\phi x_i, \text{ et } \phi x_1, \phi x_2, \phi x_3 \text{ sont alignés} \big\}.$$

Le morphisme f: $C \times C \to C^{(3)}$ qui à (x, y) associe $(\phi^{-1}\phi x - x) + y$ induit une surjection d'un sous-ensemble dense irréductible de $C \times C$ sur W, ce qui prouve l'irréductibilité de W donc celle de $\Theta \cap \Theta_a$.

(d) Cas $g = 3$

Le morphisme ϕ est de degré 4 sur $\mathbb{P}^1$, avec ramification Δ sur $\mathbb{P}^1$. On choisit un point base $p_0 \in \mathbb{P}^1 - \Delta$, de fibre $F = \phi^{-1}p_0$.

Le groupe de Galois G de ϕ, qui est un sous-groupe de Aut $F \simeq \mathfrak{S}_4$, opère transitivement sur F puisque $C - \phi^{-1}(\Delta)$ est connexe. On rappelle que:

$$W = \left\{ x_1 + x_2 \in C^{(2)} \,|\, x_1 \neq x_2,\ \phi x_1 = \phi x_2 \notin \Delta \right\}.$$

Les composantes irréductibles de W sont en bijection avec les orbites dans ($F^{(2)}$-diag) sous l'action de G. En particulier, W est irréductible si G est 2 fois transitif.

Passons en revue rapidement les sous-groupes G de $\mathfrak{S}_4$ opérant transitivement. On remarque que Card G est alors divisible par 4:

(1) $G \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$. On voit facilement que G ne peut contenir de transposition (sans quoi il ne serait pas transitif); donc G est nécessairement le groupe de Klein {id; (1, 2)(3, 4); (1, 3)(2, 4); (1, 4)(2, 3)}.

(2) $G \simeq \mathbb{Z}/4$. Alors G est conjugué au sous-groupe engendré par (1, 2, 3, 4).

(3) G est d'ordre 8. Ces sous-groupes sont les 2-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$ donc sont conjugués par example au sous-groupe D_4 engendré par (1, 2, 3, 4) et (1, 3).

(4) G est d'ordre 12. Alors G est d'indice 2, donc distingué et égal à $\mathscr{A}_4$.

On rappelle enfin que si $x \in F$ et si G_x est le stabilisateur de x dans G, on a:

$$\text{Aut } C/\mathbb{P}^1 \simeq \text{Norm}_G G_x / G_x.$$

Les résultats dont on a besoin sont résumés dans le tableau page suivante. Il en ressort que soit W est irréductible, soit le groupe Aut $C/\mathbb{P}^1$ contient un élément d'ordre 2. Ceci, joint au lemme 2, achève la démonstration du théorème.

Remarque 3: L'étude ci-dessus permet de préciser les composantes irréductibles de $\Theta \cdot \Theta_a$ lorsqu'on est dans le cas 2 du théorème et que $g = 3$. Le revêtement double π: $C \to C/\sigma = E$ est associé à la donnée de $\delta \in \text{Pic}^2 E$ et de $\Delta \in |2\delta|$, sans point multiple. On note σ' l'involution de E associée au morphisme de degré deux $\phi_{|\delta+e|}$: $E \to \mathbb{P}^1$, où $a = \pi^* e$, et R la ramification de $\phi_{|\delta+e|}$ sur E. On rappelle que $\phi = \phi_{|\delta+e|} \circ \pi$ (Lemme 2). On est alors dans un seul des cas suivants:

TABLE 1

G	Stabilisateur de 1	Aut $C/\mathbb{P}^1$	Nombre d'orbites dans $F^{(2)}$-diag.
$(\mathbb{Z}/2)^2$	id	$(\mathbb{Z}/2)^2$	3
$\mathbb{Z}/4$	id	$\mathbb{Z}/4$	2
D_4	(2, 4)	$\mathbb{Z}/2$	2
$\mathscr{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$	2-transitifs		1

(1) $\Delta = x + y + \sigma'x + \sigma'y$, où x, $y \notin \operatorname{Supp} R$. Alors a est d'ordre 2, le groupe de Galois G de ϕ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$. Si on note $G = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, les trois composantes de $\Theta \cdot \Theta_a$ sont:

$$\{\mathscr{O}_C(x + \sigma_i x) \mid x \in C\} \qquad i = 1, 2, 3.$$

(2) $\Delta = R$. Alors a est d'ordre 2, le groupe de Galois G de ϕ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4$. Les deux composantes de $\Theta \cdot \Theta_a$ sont $\{\mathscr{O}_C(x + \sigma x) \mid x \in C\}$ et $\{\mathscr{O}_C(x + \sigma^2 x) \mid x \in C\}$, où σ engendre G.

(3) Si Δ n'est pas de l'un des types ci-dessus, le groupe de Galois de ϕ est isomorphe à D_4. Le groupe des automorphismes de C sur $\mathbb{P}^1$ est engendré par une involution σ et:

$$\Theta \cdot \Theta_a = \{\mathscr{O}_C(x + \sigma x) \mid x \in C\} + \{\mathscr{O}_C(x_1 + x_2) \mid \pi x_2 = \sigma' \pi x_1\}.$$

Références

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris: The geometry of algebraic curves, 1 (à paraître).
[2] C. Ciliberto: On a proof of Torelli's Theorem, Ravello, *Springer Lecture notes* no. 997 (1983) 113–123.
[3] D. Mumford: Curves an their Jacobians, Ann. Arbor, The University of Michigan Press, 1978.
[4] A. Weil: Zum Beweis des Torellischen Satzes, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen *Math. Phys. Kl.* 2 (1957) 33–53.

(Oblatum 12-VII-1984 & 1-X-1984)

Université de Paris-sud
Centre d'Orsay
F-91405 Orsay Cédex
France