Erratum pour “Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes”

Olivier Debarre

19 janvier 2012

S. Grushevsky et R. Salvati Manni m’ont fait remarquer une erreur dans l’article [D].

Je rappelle quelques notations :

- $\mathscr{A}_g$ est l’espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées complexes de dimension g ;
- $\mathscr{N}_g \subset \mathscr{A}_g$ est le diviseur de celles dont le diviseur thêta est singulier ;
- $\theta_{\text{null},g} \subset \mathscr{A}_g$ est le diviseur de celles dont le diviseur thêta est de multiplicité paire non nulle en un point d’ordre 2 ;
- $\mathscr{N}'_g \subset \mathscr{A}_g$ est la réunion des composantes irréductibles de $\mathscr{N}_g$ non contenues dans $\theta_{\text{null},g}$.

La structure de diviseur de $\mathscr{N}_g$ est définie dans [M]. Freitag a montré dans [F] que $\theta_{\text{null},g}$ est irréductible, mais il est affirmé à tort à plusieurs reprises dans [D] qu’un résultat de Teixidor ([T]) entraîne que le diviseur thêta d’une variété abélienne correspondant à un point général de $\theta_{\text{null},g}$ a un seul point singulier, qui est double ordinaire (cette référence est inappropriée, puisque [T] considère la restriction de $\theta_{\text{null},g}$ à l’espace des modules des courbes de genre g ; mais pour $g \geq 4$, on sait que les points doubles n’y sont jamais ordinaires).

Cependant, tous les ingrédients nécessaires à la démonstration de ce fait se trouvent dans [D]. Expliquons rapidement comment procéder.

On procède par récurrence sur g, en supposant que

- $\theta_{\text{null},g-1}$ est irréductible et le diviseur thêta d’une variété abélienne correspondant à un point général a un seul point singulier, qui est double ordinaire ;

- $\mathscr{N}'_{g-1}$ est irréductible et un diviseur thêta d'une variété abélienne correspondant à un point général a deux points singuliers, qui sont doubles ordinaires.

On considére pour cela la compactification partielle $\mathscr{A}_g^\star$ de $\mathscr{A}_g$ obtenue en lui ajoutant un diviseur $\partial\mathscr{A}_g$. Il existe un morphisme $p : \partial\mathscr{A}_g \to \mathscr{A}_{g-1}$, de fibre $A/\{\pm 1\}$ pour (A, Θ) général dans $\mathscr{A}_{g-1}$. La frontière de $\mathscr{N}_g$ dans $\mathscr{A}_g^\star$ se décompose en :

- $\overline{\theta}_{\mathrm{null},g} \cap \partial\mathscr{A}_g = \partial'\theta_{\mathrm{null},g} \cup p^{-1}(\theta_{\mathrm{null},g-1})$
- et $\overline{\mathscr{N}'}_g \cap \partial\mathscr{A}_g = \partial'\mathscr{N}'_g \cup p^{-1}(\mathscr{N}'_{g-1})$.

Chacun de ces morceaux est irréductible. Un calcul local montre ensuite que $\mathscr{N}_g$ est localement irréductible en un point général de $\partial'\theta_{\mathrm{null},g}$ (Lemme 2.2), puis de $p^{-1}(\theta_{\mathrm{null},g-1})$ (il suffit de remplacer la référence à [T] de la ligne 18 de la page 701 par l'hypothèse de récurrence), puis de $\partial'\mathscr{N}'_g \cap p^{-1}(\mathscr{N}'_{g-1})$ (« Cinquième pas », p. 703) [1].

L'argument du « Sixième et dernier pas », p. 706, qui explique pourquoi le diviseur thêta d'une variété abélienne correspondant à un point général de $\mathscr{N}'_g$ a deux points singuliers, qui sont doubles ordinaires, s'applique de la même façon pour montrer que le diviseur thêta d'une variété abélienne correspondant à un point général de $\theta_{\mathrm{null},g}$ a un point singulier, qui est double ordinaire.

Une autre démonstration, indépendante et plus courte, est donnée dans [GSM] (Theorem 3).

Références

[D] Debarre, O., Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **25** (1992), 687–707.

[F] Freitag, E., Holomorphic tensors on subvarieties of the Siegel modular variety. *Automorphic forms of several variables (Katata, 1983),* 93–113, Progr. Math. **46**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984.

[GSM] Grushevsky, S., Salvati Manni, R., Singularities of the theta divisor at points of order two, *Int. Math. Res. Not.* **15** (2007), Art. ID rnm045, 15 pp.

1. Notons au passage qu'il y a une faute de frappe dans l'énoncé de la proposition 2.5, qui doit se lire : « Le morphisme $q : \mathscr{S} \to \mathscr{N}'_g \cap U$ est de degré 2. ».

[M] Mumford, D., On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety. *Algebraic geometry—open problems (Ravello, 1982),* 348–375, Lecture Notes in Math. **997**, Springer, Berlin, 1983.

[T] Teixidor i Bigas, M., Half-canonical series on algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.* **302** (1987), 99–115.