VERS UNE STRATIFICATION DE L'ESPACE DES MODULES DES VARIETES ABELIENNES PRINCIPALEMENT POLARISEES

par Olivier Debarre

A la conférence sur les Fonctions Thêta organisée par l'American Mathematical Society à Bowdoin en 1987, A. Beauville termina son exposé ([B 1]) sur les variétés de Prym par le tableau suivant –que je me suis permis de traduire et de modifier légèrement :

	Jacobiennes	Pryms
dim Sing Θ	$g-4$	$g-6$
Réductibilité de	$\Theta\cap\Theta_a$	$\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$
La variété de Kummer a des	droites trisécantes	plans quadrisécants
Courbes de classe m fois la classe minimale	$m=1$	$m=2$

en posant la question : est-il possible de définir géométriquement une stratification de l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées complexes de dimension g qui compléterait ce tableau ?

Sans répondre complètement à cette question, nous essayons dans cet article de mettre en évidence des relations entre les propriétés suivantes d'une variété abélienne principalement polarisée (X,Θ) de dimension g :

1) Existence d'une "courbe" de m-plans $(m+2)$-sécants à la variété de Kummer $K(X)$ de (X,Θ) (voir Théorème 4.1 pour l'énoncé exact).

2) Existence d'un m-plan $(m+2)$-sécant à $K(X)$.

3) Existence d'une courbe dans X de classe m fois la classe minimale.

4) Le lieu singulier de Θ est de dimension au moins $g-2m-2$.

5) La variété (X,Θ) est la variété de Prym-Tjurin associée à une correspondance D symétrique effective sans point fixe vérifiant $(D-1)(D+m-1)=0$.

Chacune de ces propriétés est vérifiée par les jacobiennes de courbes pour $m=1$ et par les variétés de Prym pour $m=2$. On peut donc espérer les utiliser pour construire la stratification voulue de l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées.

Sous des hypothèses restrictives, pour lesquelles nous renvoyons aux énoncés des théorèmes (en particulier, on suppose la plupart du temps la variété abélienne principalement polarisée X suffisamment générale), nous montrons les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 1) \Rightarrow 2) & \Rightarrow & 4) \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ 3) & \Leftarrow & 5) \end{array}$$

L'implication 5)$\Rightarrow$3) est due à Welters ([W 1]). La démonstration de 1)$\Rightarrow$3) (Théorème 4.1) est une extension de la démonstration de Gunning du cas $m=1$ ([G 1]). Celle de l'implication 2)$\Rightarrow$4) (Corollaire 3.5) emprunte des idées de [B-D] et celle de 5)$\Rightarrow$4) une idée de A. Bertram ([Be]).

Rappelons que dans le cas $m=1$, la propriété 3) caractérise les jacobiennes parmi les variétés abéliennes principalement polarisées indécomposables ("critère de Matsusaka" [M]). C'est aussi pratiquement le cas de la propriété 1) ("critère de Gunning" [G 1]), mais pas de la propriété 4) ([D 1], [Do]). Welters a conjecturé que la propriété 2) caractérise les jacobiennes ("conjecture de la trisécante" [W 2], [D 2]).

En ce qui concerne le cas $m=2$, on sait que les variétés de Prym ne sont pas les seules variétés abéliennes principalement polarisées qui satisfont 2) ([B-D] Remarque 1) page 617) ou 4) ([D 1]). En décrivant complètement dans [W 1] les variétés abéliennes principalement polarisées satisfaisant 3), Welters montre en particulier que cette propriété ne caractérise pas non plus les variétés de Prym.

En nous basant sur cette étude de Welters et suivant les idées de [G 1], nous proposons pour terminer une caractérisation des variétés de Prym de type 1) (Théorème 5.2).

Pour conclure, je voudrais proposer quelques questions proches des problèmes abordés dans cet article (les deux premières sont dues à Welters [W 1]) : quel est le plus petit entier m tel que toute variété abélienne principalement polarisée de dimension g contienne une courbe de classe m fois la classe minimale ? Pour tout entier $m \geq 1$, quel est le genre maximal des courbes de classe m fois la classe minimale sur une variété abélienne principalement polarisée de dimension g ? Quelles sont les variétés de Prym-Tjurin dont la variété de Kummer admet des m-plans $(m+2)$-sécants ?

On se place dans tout cet article sur le corps des nombres complexes.

1. Jacobiennes de courbes

Soit C une courbe projective lisse de genre g et soit JC sa jacobienne. Pour tous points p , p_1 , p_2 et p_3 de C , on a une inclusion schématique :

$$\Theta \cap \Theta_{p_2-p_1} \subset \Theta_{p-p_1} \cup \Theta_{p_2-p_3} ,$$

où Θ est un diviseur thêta sur JC et où, pour tout élément x de JC , Θ_x désigne le translaté de Θ par x . Cette propriété admet l'interprétation géométrique suivante. On peut supposer le diviseur Θ symétrique. Soit $\psi : JC \longrightarrow \mathbb{P}^{2^g-1}$ le morphisme associé au système linéaire $|2\Theta|$. L'image de ψ est la *variété de Kummer* de JC . Soit p_0 un point de C et soit Γ l'image de C dans JC par l'application $p \mapsto \mathcal{O}_C(p-p_0)$. On a :

(1.1) Pour tous points x_1 , x_2 et x_3 de Γ et tout élément ζ de $\frac{1}{2}(\Gamma-x_1-x_2-x_3)$, les points $\psi(\zeta+x_1)$, $\psi(\zeta+x_2)$ et $\psi(\zeta+x_3)$ sont alignés.

La variété de Kummer de JC admet donc une famille de dimension 4 de droites trisécantes. Une extension moins connue de ce résultat, due à Gunning ([G 2], [G 3]) est qu'il existe, pour tout $m \geq 2$, une famille de dimension $2m+2$ de m-plans $(m+2)$-sécants.

(1.2) Plus exactement, pour tous points $x_1, \ldots, x_{m+2}, y_1, \ldots, y_m$ de Γ , et $2\zeta = \Sigma y_j - \Sigma x_j$, les points $\psi(\zeta+x_1), \ldots, \psi(\zeta+x_{m+2})$ sont sur un m-plan.

Rappelons pour terminer que le lieu singulier de Θ est partout de codimension inférieure ou égale à 4 dans JC et qu'on a :

(1.3) $\qquad \forall x, x' \in \Gamma \qquad \operatorname{Sing}\Theta \subset \Theta_{x-x'}$,

de sorte que $\qquad \dim(\Theta_{x-x'} \cap \operatorname{Sing}\Theta) \geq g-4$.

2. Variétés de Prym

Soit $\tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement étale double de courbes projectives lisses. On note σ l'involution correspondante de $\tilde{C}$ et σ^* l'endomorphisme induit sur $J\tilde{C}$. La variété de Prym associée est la sous-variété abélienne P de $J\tilde{C}$ image de l'endomorphisme $(1-\sigma^*)$. Elle est munie d'une polarisation principale naturelle ([Mu]). Pour tous points p et q de $\tilde{C}$, on notera $[p,q]$ l'élément $p+q-\sigma p-\sigma q=(1-\sigma^*)(p-\sigma q)$ de P.

On rappelle que si C est suffisamment générale ([B-D] Proposition 1) et si p, p_1, p_2, et p_3 sont 4 points de $\tilde{C}$, on a une inclusion schématique :

(2.1) $$\Theta \cap \Theta_{[p,p_1]} \cap \Theta_{[p,p_2]} \subset \Theta_{[p,p_3]} \cup \Theta_{[p_1,p_2]}$$

où Θ est un diviseur thêta de P.

Cela entraîne que pour tout élément ζ de P tel que $2\zeta=[p,p_3]+[p_1,p_2]$, les 4 points $\psi(\zeta)$, $\psi(\zeta-[p,p_1])$, $\psi(\zeta-[p,p_2])$ et $\psi(\zeta-[p,p_3])$ de la variété de Kummer de P sont coplanaires. Il y a donc une famille de dimension 4 de plans quadrisécants.

Il est utile d'exprimer cette propriété sous une forme légérement différente. Le choix d'un point p_0 de $\tilde{C}$ permet de définir un morphisme $p \mapsto [p,p_0]$ qui envoie $\tilde{C}$ sur une courbe Γ dans P. Pour tous points p_1, p_2, p_3 et p de $\tilde{C}$, on choisit un point ζ de $J\tilde{C}$ tel que :

$$2\zeta = ([p,p_0]-[p_1,p_0]-[p_2,p_0]-[p_3,p_0]).$$

Un petit calcul montre que les 4 points coplanaires précédents sont :

$$\psi(\zeta+[p_1,p_0]),\ \psi(\zeta+[p_2,p_0]),\ \psi(\zeta+[p_3,p_0]) \text{ et}$$
$$\psi(\zeta+[p_1,p_0]+[p_2,p_0]+[p_3,p_0]-[p_0,p_0]).$$

(2.2) Il existe donc une courbe $\Gamma\subset P$ et un point x_0 de Γ tels que, pour tous points x_1, x_2 et x_3 de Γ et tout élément ζ de $\frac{1}{2}(\Gamma-x_1-x_2-x_3)$, les 4 points $\psi(\zeta+x_1)$, $\psi(\zeta+x_2)$, $\psi(\zeta+x_3)$ et $\psi(\zeta+x_1+x_2+x_3-x_0)$ sont coplanaires.

Remarquons que la classe de Γ est deux fois la classe minimale et que $x_0-\Gamma=\Gamma$. On utilisera plus loin la propriété (2.2) pour donner une caractérisation des variétés de Prym.

Comme dans le cas des jacobiennes, on peut généraliser cette propriété des variétés de Prym en montrant qu'il existe une famille de dimension $(2m+2)$ de $2m$-plans $(2m+2)$-sécants, pour tout entier m. Il semble que tous les $(2m+1)$-plans $(2m+3)$-sécants soient dégénérés (i.e. contiennent un $2m$-plan $(2m+2)$-sécant).

Rappelons pour terminer que le lieu singulier de Θ contient une sous-variété notée $\mathrm{Sing}_{st}\Theta$ qui est partout de codimension ≤ 6 dans P ([Be], [D 1]). Elle vérifie de plus :

(2.3) $\qquad \forall x, x' \in \Gamma \qquad \mathrm{Sing}_{st}\Theta \subset \Theta_{x-x'}$

de sorte que $\qquad \dim(\Theta_{x-x'} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta) \geq g-6$.

3. Plans sécants et singularités du diviseur thêta

Soit (X,Θ) une variété abélienne principalement polarisée indécomposable de dimension g , où Θ est un diviseur thêta symétrique, et soit $\{\theta_1,\ldots,\theta_{2^g}\}$ une base de l'espace des sections de $\mathcal{O}_X(2\Theta)$. L'image du morphisme associé $\psi : X \longrightarrow \mathbb{P}^{2^g-1}$ est la variété de Kummer $K(X)$ de X .

Soit m un entier strictement inférieur à g . On suppose qu'il existe des points $x_1,\ldots,x_{m+2}$ de X non d'ordre 2 tels que leurs images par ψ soient distinctes et situées sur un espace linéaire de dimension m . En choisissant m minimal, on peut toujours supposer que ces images sont en position générale sur ce m-plan. Il existe alors des constantes $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+2}$ non nulles telles que :

$$(3.1) \qquad \forall n \in \{1,\ldots,2^g\} \qquad \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i\, \theta_n(x_i) = 0 \ .$$

La formule d'addition de Riemann permet de transformer cette égalité en :

$$\forall x \in X \qquad \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i\, \theta(x+x_i)\,\theta(x-x_i) = 0 \ ,$$

où θ désigne un générateur de $H^0(X,\mathcal{O}_X(\Theta))$. On en déduit l'inclusion schématique :

$$(3.2) \qquad \Theta_{x_1} \cap \Theta_{x_2} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}} \subset \Theta_{x_{m+2}} \cup \Theta_{-x_{m+2}} \ .$$

Choisissons une base $D_1,\ldots,D_g$ de champs de vecteurs sur X et, pour tout $j=1,\ldots,m+1$, un générateur θ_{x_j} de $H^0(\mathcal{O}_X(\Theta_{x_j}))$. On définit le *lieu jacobien* $\mathrm{Jac}(\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_k})$ comme le schéma des zéros sur $\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_k}$ des mineurs maximaux de la matrice jacobienne $(D_j\theta_{x_i})_{1\le i\le k, 1\le j\le g}$. Ensemblistement, c'est le lieu où $\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_k}$ n'est pas lisse de codimension k.

Supposons l'inclusion (3.2) vérifiée. On distingue deux cas :

i) Si $Z = \Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}}$ n'est pas de codimension $(m+1)$, on a alors :

$$\dim \mathrm{Jac}(\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}}) \ge g-m .$$

ii) Si par contre Z est de codimension $(m+1)$, le même argument que celui employé dans [B-D] Proposition 2, basé sur la résolution de Koszul de l'idéal de cette intersection, montre que Z n'est pas contenu dans $\Theta_{x_{m+2}}$ ni dans $\Theta_{-x_{m+2}}$. Ceci prouve que $Z \cap \Theta_{x_{m+2}} \cap \Theta_{-x_{m+2}}$ est contenu dans $\mathrm{Jac}(\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}})$, donc que :

$$\dim \mathrm{Jac}(\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}}) \ge g-m-2 . \tag{3.3}$$

L'inclusion (3.2) entraîne donc toujours l'inégalité (3.3). Il apparaît que cette inégalité force l'existence de points singuliers sur le diviseur Θ :

Théorème 3.4. *Soit* X *une variété abélienne et soient* $x_1, \ldots, x_{m+1}$ *des points de* X *tels que, pour tous* $j \ne k$, $(x_j - x_k)$ *engendre* X. *Alors :*

$$\dim \mathrm{Sing}\,\Theta \ge \dim \mathrm{Jac}(\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}}) - m .$$

Corollaire 3.5. *Sous les hypothèses du théorème précédent, on suppose de plus que les images des points* $x_1, \ldots, x_{m+1}$ *et d'un autre point* x_{m+2} *de* X *sur la variété de Kummer sont distinctes et situées sur un* m-plan. *Alors :*

$$\dim \mathrm{Sing}\,\Theta \ge g - 2m - 2 .$$

Remarques 3.6. 1) Il ressort de la démonstration du théorème qu'on a en fait des résultats un peu plus précis. Dans le théorème et le corollaire, il existe un indice j tel que, respectivement :

$$\dim(\mathrm{Jac}(\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}}) \cap \mathrm{Sing}\,\Theta_{x_j}) \ge \dim \mathrm{Jac}(\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}}) - m$$

et :

$$\dim(\Theta_{x_1} \cap \ldots \cap \Theta_{x_{m+1}} \cap \Theta_{x_{m+2}} \cap \Theta_{-x_{m+2}} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta_{x_j}) \ge g-2m-2 .$$

2) L'hypothèse que les points $(x_j - x_k)$ engendrent X est essentielle : si (X,Θ) est une variété abélienne principalement polarisée qui contient une courbe elliptique E telle que $\Theta.E = 2$, l'image de E dans la variété de Kummer de X est une conique, alors que Θ est lisse en général ([B-D] Remarque 1) page 617) !

Avant de démontrer le théorème, énonçons un lemme élémentaire qui nous servira à deux reprises. Sa démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 3.7. *Soient* Y *un schéma réduit et* $L_1,\dots,L_r$ *des faisceaux inversibles sur* Y. *On suppose que pour chaque* $j=1,\dots,r$, *il existe* n *sections* $s_1^j,\dots,s_n^j$ *de* L_j $(n \geq r)$ *telles que, pour tout* y *générique dans* Y, *on ait :*

$$\mathrm{Rang}\,(s_i^j(y)) = r-1 .$$

Alors il existe, pour $j=1,\dots,r$, *des sections* λ_j *de* $L_1 \otimes \dots \otimes \hat{L}_j \otimes \dots \otimes L_r$ *non toutes identiquement nulles telles que :*

$$\forall i \qquad \forall y \in Y \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(y)\, s_i^j(y) = 0 .$$

Démonstration du théorème 3.4.

On procède par récurrence sur m, le résultat étant évident lorsque m est nul. Soit Z une composante de dimension maximale de $\mathrm{Jac}(\Theta_{x_1} \cap \dots \cap \Theta_{x_{m+1}})_{\mathrm{red}}$. Supposons tout d'abord que la variété :

$$B = \bigcup_{j=1}^{m+1} \mathrm{Jac}\,(\Theta_{x_1} \cap \dots \cap \hat{\Theta}_{x_j} \cap \dots \cap \Theta_{x_{m+1}}) \cap Z ,$$

soit de codimension au moins 2 dans Z. On choisit une courbe générique C dans $Z-B$. Chaque $D_1\theta_{x_j}$ peut être considéré comme une section de $\mathcal{O}_C(\Theta_{x_j})$. Par définition du lieu jacobien, il résulte du lemme 3.7 qu'il existe des sections non toutes nulles λ_j de $\mathcal{O}_C(\Theta_{x_1} + \dots + \hat{\Theta}_{x_j} + \dots + \Theta_{x_{m+1}})$ telles que :

$$\forall z \in C \qquad \sum_j \lambda_j D_1\theta_{x_j}(z) = 0 \ .$$

Soit $n : N \longrightarrow C$ la normalisation de C. Par construction, les sections $n^*\lambda_j$ ne peuvent être nulles que simultanément. Il en résulte qu'elles ont même diviseur F sur N, et que :

$$\forall j \qquad n^*\mathcal{O}_C(\Theta_{x_1}+\ldots+\hat{\Theta}_{x_j}+\ldots+\Theta_{x_{m+1}}) \simeq \mathcal{O}_N(F) \ .$$

On déduit alors du théorème du carré que :

$$\forall j,k \qquad n^*\mathcal{O}_C(\Theta_{x_j-x_k}-\Theta) \quad \text{est trivial .}$$

Comme dans [B-D] Proposition 3, cela contredit l'hypothèse que (x_j-x_k) engendre X.

La variété B est donc de codimension au plus 1 dans Z. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui termine la démonstration du théorème.■

4. Courbes de plans sécants et courbes de classe minimale

On ne sait pas déduire plus que le corollaire 3.5 de l'existence d'*un* m-plan $(m+2)$-sécant, même dans le cas très étudié d'une droite trisécante ([D 2]).

Cependant, si on suppose qu'il existe une famille à un paramètre de tels plans, les méthodes de [G 1] permettent de construire une courbe dans la variété abélienne de classe de cohomologie m fois la classe minimale $[\Theta]^{g-1}/(g-1)!$.

Notre résultat, qui n'est valable que sous des hypothèses restrictives (que l'on pourrait sans doute améliorer), est le suivant :

Théorème 4.1. *Soit X une variété abélienne principalement polarisée dont l'anneau des endomorphismes est $\mathbb{Z}$. Soient $x_1,\ldots,x_{m+2}$ des points de X tels que les $(x_k-x_1)_{k>1}$ soient indépendants sur $\mathbb{Z}$. On définit :*

$$V = \{\ \zeta \in X \mid \psi(\zeta+x_1),\ldots,\psi(\zeta+x_{m+2}) \text{ sont sur un } m\text{-plan}\ \}$$

et on suppose que :

(i) *$2V$ contient une courbe irréductible complète Γ ,*

(ii) *si $\zeta \in V$ et $2\zeta \in \Gamma$, les $(m+2)$ points $\psi(\zeta+x_j)$ engendrent un m-plan Π_ζ tel que le schéma $\Pi_\zeta.K(X)$ soit de longueur $(m+2)$ et en position générale.*

Alors la classe de Γ est m fois la classe minimale.

Remarques 4.2. 1) Les points $(-x_j-x_k)$, pour $1 \leq j < k \leq m+2$, sont toujours dans $2V$. On montre au cours de la démonstration que sous nos hypothèses, ils sont aussi forcément sur Γ et que Γ est *lisse* en ces points. Si on suppose seulement X indécomposable et les $(-x_j-x_k)$ distincts deux à deux pour $j<k$, mais qu'on suppose a priori que Γ contient tous les $(-x_j-x_k)$ et satisfait au reste des hypothèses, on arrive à la conclusion suivante, dans l'esprit de Theorem 2 de [G 1], qui traite le cas $m=1$:

- soit X admet une multiplication complexe F non nulle telle que $F(x_j-x_k)=0$ pour tous j et k,
- soit Γ est de classe m fois la classe minimale.

2) L'exemple des jacobiennes montre que l'hypothèse que les m-plans $(m+2)$-sécants sont non-dégénérés est nécessaire (dans (1.2), faire varier le point y_1 sur la courbe Γ : le m-plan $(m+2)$-sécant contient un $(m-1)$-plan $(m+1)$-sécant lorsque y_1 est égal à l'un des points x_j).

3) Il résulte de la remarque 3.6.1) et du fait que $(-x_j-x_k) \in \Gamma$ pour tous $j \neq k$ que :

$$\exists x_0 \in \Gamma \quad \forall x \in \Gamma \quad \dim(\Theta_{x-x_0} \cap \operatorname{Sing}\Theta) \geq g-2m-2 .$$

Il faut comparer ce résultat aux propriétés (1.3) des jacobiennes et (2.3) des variétés de Prym.

Démonstration du théorème 4.1.

Analysons tout d'abord l'espace tangent à $2V$ en un point $(-x_j-x_k)$, pour $j \neq k$. Prenons par exemple $j=1$, $k=2$ et $2\zeta = -x_1-x_2$. On a alors $\zeta+x_1 = -(\zeta+x_2)$, de sorte que $\zeta \in V$. En différentiant la relation $\psi(\zeta+x_1)\wedge\ldots\wedge\psi(\zeta+x_{m+2})=0$, on vérifie que :

$$\begin{aligned} T_{-x_1-x_2}(2V) &\simeq \{D \in T_{\zeta+x_1}X \mid D\psi(\zeta+x_1)\wedge\psi(\zeta+x_2)\wedge\ldots\wedge\psi(\zeta+x_{m+2})=0\} \\ &\simeq \Pi_\zeta . T_{\zeta+x_1}K(X) . \end{aligned}$$

Mais $\Pi_\zeta . K(X)$ contient déjà les $(m+1)$ points distincts $\psi(\zeta+x_1)=\psi(\zeta+x_2)$ et $\psi(\zeta+x_j)$ pour $j>2$. Nos hypothèses forcent donc :

$$\dim T_{-x_1-x_2}(2V) \leq 1 \qquad \text{lorsque} \qquad (-x_1-x_2) \in \Gamma .$$

En particulier, la courbe Γ est lisse en les points $(-x_j-x_k)$ par lesquels elle passe.

Du lemme 3.7, on déduit que pour $j=1,\ldots,m+2$, il existe des sections λ_j de $\mathcal{O}_{\frac{1}{2}\Gamma}((2\Theta)_{-x_1}+\ldots+(2\hat{\Theta})_{-x_j}+\ldots+(2\Theta)_{-x_{m+2}})$ telles que, avec les notations de (3.1) :

$$\forall \zeta \in \tfrac{1}{2}\Gamma \quad \forall n \in (\mathbb{Z}/2)^g \qquad \sum_{j=1}^{m+2} \lambda_j(\zeta)\, \theta_n(\zeta + x_j) = 0 .$$

Le diviseur de λ_j est stable par translation par tout point d'ordre 2 de X. On peut donc écrire $\mathrm{Div}(\lambda_j) = 2_X^* D_j$, où 2_X est la multiplication par 2 sur X et où D_j est un diviseur sur Γ. La section λ_j est nulle si et seulement si les $(m+1)$ points $\psi(\zeta+x_p)$, $p \neq j$; sont sur un $(m-1)$-plan. Par hypothèse, cela ne peut se produire que si deux d'entre eux sont confondus, c'est-à-dire lorsque :

$$\begin{array}{ll} \exists\, p, q \neq j & \zeta + x_p = -(\zeta + x_q) \\ \text{soit} & 2\zeta = -x_p - x_q . \end{array}$$

Rappelons que Γ est lisse en un tel point. Un calcul local montre que si λ_j s'annule à l'ordre au moins deux en un tel point, les $(m-1)$ points $\psi(\zeta+x_r)$ pour $r \neq j, p, q$ et la droite $\psi_*(T_{-x_p-x_q}\Gamma)$ sont sur un $(m-1)$-plan, ce qui est interdit par nos hypothèses. Le diviseur D_j est donc contenu dans le lieu lisse de Γ et vaut :

$$\sum_{\substack{p,q \neq j\,;\, p<q \\ -x_p - x_q \in \Gamma}} (-x_p - x_q) .$$

Remarquons tout de suite que le fait que $\mathcal{O}_\Gamma(D_j - D_k) \simeq \mathcal{O}_\Gamma(\Theta_{x_j - x_k} - \Theta)$ est de degré 0 entraîne que l'entier :

$$\mathrm{Card}\,\{\, p \neq j \mid (-x_j - x_p) \in \Gamma \,\}$$

est indépendant de j. On le note M.

A la courbe Γ est associé un endomorphisme $\alpha_{\Gamma,\Theta}$ défini par :

$$\forall x \in X \qquad \alpha_{\Gamma,\Theta}(x) = \text{somme dans } X \text{ des points du diviseur } \mathcal{O}_\Gamma(\Theta_x - \Theta) .$$

Il s'ensuit que :

$$(4.3)\quad \alpha_{\Gamma,\Theta}(x_j-x_k) = \sum_{\substack{p,q\neq j\,;\,p<q \\ -x_p-x_q\in\Gamma}} (-x_p-x_q) - \sum_{\substack{p,q\neq k\,;\,p<q \\ -x_p-x_q\in\Gamma}} (-x_p-x_q)$$

$$= - \sum_{\substack{p\neq j,k \\ -x_k-x_p\in\Gamma}} (x_k+x_p) + \sum_{\substack{q\neq j,k \\ -x_j-x_p\in\Gamma}} (x_j+x_q)$$

L'endomorphisme $\alpha_{\Gamma,\Theta}$ est par hypothèse la multiplication par un entier N. On a donc :

$$N(x_j-x_k) = M(x_j-x_k) + \sum_{\substack{p\neq j,k \\ -x_j-x_p\in\Gamma}} x_p - \sum_{\substack{q\neq j,k \\ -x_k-x_q\in\Gamma}} x_q \qquad \text{si} \quad -x_j-x_k \notin \Gamma$$

$$= (M-1)(x_j-x_k) + \sum_{\substack{p\neq j,k \\ -x_j-x_p\in\Gamma}} x_p - \sum_{\substack{q\neq j,k \\ -x_k-x_q\in\Gamma}} x_q \qquad \text{si} \quad -x_j-x_k \in \Gamma .$$

L'hypothèse que les combinaisons linéaires non triviales des (x_p-x_q) sont non nulles entraîne alors que :

- soit $N=M$ et aucun (x_j-x_k) n'est sur Γ, ce qui est absurde car M serait alors nul, donc aussi $\alpha_{\Gamma,\Theta}$,
- soit $N=M-1$ et tous les (x_j-x_k) sont sur Γ. On a alors $M=m+1$ et $\alpha_{\Gamma,\Theta}=m_X$. Ceci est équivalent au fait que la classe de Γ est m fois la classe minimale et le théorème est démontré.∎

5. Courbes de plans quadrisécants et variétés de Prym

Les variétés de Prym fournissent des exemples de variétés abéliennes principalement polarisées dont la variété de Kummer admet des 2-plans quadrisécants (2.2). Un raffinement du théorème 4.1. dans le cas $m=2$ va nous permettre d'utiliser cette propriété pour donner une caractérisation des variétés de Prym.

Théorème 5.1. *Soit* X *une variété abélienne principalement polarisée indécomposable et soient* x_1 , x_2 , x_3 *et* x_4 *des points de* X *tels que chacun des points* x_1-x_2 , x_1-x_3 *et* x_1-x_4 *engendre* X . *On suppose de plus que les points* $(-x_i-x_j)$ *sont non nuls et distincts 2 à 2 pour* $i<j$. *On définit :*

$$V = \{ \zeta \in X \mid \psi(\zeta+x_1),\ldots,\psi(\zeta+x_4) \text{ sont sur un 2-plan} \}$$

et on suppose que :

(i) $2V$ *contient une courbe irréductible complète* Γ ,

(ii) *si* $\zeta \in V$ *et* $2\zeta \in \Gamma$, *les 4 points* $\psi(\zeta+x_j)$ *engendrent un 2-plan* Π_ζ *tel que le schéma* $\Pi_\zeta.K(X)$ *soit de longueur 4 et en position générale.*

Alors la classe de Γ *est 2 fois la classe minimale.*

■ La formule (4.3) exprimant les images des points (x_j-x_k) par l'endomorphisme $\alpha_{\Gamma,\Theta}$ est toujours valable. Passons en revue les différentes valeurs possibles de M :

i) $M=0$. Tous les $\alpha_{\Gamma,\Theta}(x_j-x_k)$ sont nuls, ce qui est incompatible avec le fait que (x_1-x_2) engendre X .

ii) $M=1$. Quitte à renuméroter x_2 , x_3 et x_4 , on peut supposer que seuls $(-x_1-x_2)$ et $(-x_3-x_4)$ sont sur Γ . La formule (4.3) donne alors $\alpha_{\Gamma,\Theta}(x_1-x_2)=0$, ce qui est de nouveau incompatible avec nos hypotèses.

iii) $M=2$. On peut supposer $(-x_1-x_2)$ et $(-x_1-x_3)$ sur Γ . La seule situation compatible avec la définition de M est alors : $(-x_1-x_2)$ et $(-x_2-x_3) \notin \Gamma$ et $(-x_4-x_2)$ et $(-x_4-x_3) \in \Gamma$. La formule (4.3) donne alors $\alpha_{\Gamma,\Theta}(x_1-x_4)=2(x_1-x_4)$. Comme (x_1-x_4) engendre X , ceci entraîne $\alpha_{\Gamma,\Theta}=2_X$. La formule (4.3) donne alors $2(x_1-x_2) = \alpha_{\Gamma,\Theta}(x_1-x_2) = x_1-x_2+x_3-x_4$, soit $-x_2-x_3=-x_1-x_4$, ce qui contredit nos hypothèses.

iv) On a donc $M=3$, de sorte que $\alpha_{\Gamma,\Theta}(x_j-x_k)=2(x_j-x_k)$ pour tous j et k , ce qui termine la démonstration du théorème.■

Welters a fait dans [W 1] une étude exhaustive des courbes dans une variété abélienne principalement polarisée dont la classe est 2 fois la classe minimale. Nous nous appuyons sur ses résultats pour énoncer la caractérisation suivante des variétés de Prym, analogue à la caractérisation des jacobiennes qu'il donne dans [W 3] Corollary 1.8.

Théorème 5.2. *Soit* X *une variété abélienne principalement polarisée indécomposable et soit* Γ *une courbe irréductible complète contenue dans* X *, qui engendre* X *. On suppose qu'il existe des points* x_0 , x_2 *et* x_3 *sur* Γ *, avec* x_0 , $2x_2$, x_2+x_3 *et* $2x_3$ *distincts deux à deux tels que, pour tout point* x_1 *général sur* Γ *, les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(i) Pour tout $\zeta \in \frac{1}{2}(\Gamma - x_1 - x_2 - x_3)$ *, les points* $\psi(\zeta+x_1),\ldots,\psi(\zeta+x_4)$ *engendrent un 2-plan* Π_ζ *tel que le schéma* $\Pi_\zeta.K(X)$ *soit de longueur 4 et en position générale.*

(ii) Tout point x *sur* Γ *vérifiant* $2x=x_0$ *est singulier sur* Γ *.*

Alors Γ *est une courbe stable de genre arithmétique* $2\dim X+1$ *, elle admet un translaté symétrique* $\Gamma_0 = \Gamma - \frac{1}{2}x_0$ *, le revêtement* $\Gamma_0 \to \Gamma_0/\pm 1$ *est admissible au sens de Beauville ([B 2]) et sa variété de Prym est isomorphe à* X *.*

■ On reprend les notations précédentes. Nos hypothèses entraînent que pour x_1 assez général sur Γ , les hypothèses du théorème 5.1 sont satisfaites avec $x_4 = x_1+x_2+x_3-x_0$. On fixe un tel x_1 et on note $\Gamma' = \Gamma - x_1 - x_2 - x_3$. Par hypothèse, Γ' engendre X et les points $(-x_2-x_3)$, $(-x_1-x_3)$ et $(-x_1-x_2)$ sont sur Γ' . Il ressort de la démonstration du théorème 5.1. qu'on a $M=3$. En particulier :

$$-x_1 - (x_1+x_2+x_3-x_0) \in \Gamma' ,$$

de sorte que $x_0 - x_1 \in \Gamma$ et $x_0 - \Gamma = \Gamma$. Tout translaté $\Gamma_0 = \Gamma - \frac{1}{2}x_0$ de Γ est donc symétrique. On est dans le cas II^+ de Welters (Theorem 3.1.4) de [W 1]) et c'est là qu'intervient l'hypothèse (ii). Elle assure que tout point d'ordre 2 sur Γ_0 est singulier, donc ([W 1], (3.1), (3.12), (3.20)) que Γ_0 est stable de genre arithmétique $2\dim X+1$ et qu'on est dans la situation de Prym-Beauville.■

6. Variétés de Prym-Tjurin.

Ces variétés, introduites par Tjurin dans [T] et étudiées par la suite par Bloch et Murre, Puts et Kanev, sont définies de la façon suivante. Soit C une courbe lisse et soit $D \in \mathrm{Div}(C\times C)$ une correspondance *symétrique, effective et sans point fixe,* telle que l'endomorphisme associé i de JC satisfasse l'égalité :

$$(i-1)(i+m-1) = 0 ,$$

où m est un entier supérieur ou égal à 2. La variété de Prym–Tjurin associée au couple (C,D) est la sous-variété abélienne $P = \mathrm{Im}(1-i)$ de JC. Les variétés de Prym usuelles correspondent au cas $m=2$.

Kanev montre dans [K] les généralisations suivantes de propriétés classiques des variétés de Prym :

- Il existe un diviseur symétrique Θ_C induisant la polarisation principale naturelle sur JC tel que $\Theta_C.P = m\Theta$, où Θ est un diviseur sur P qui induit une *polarisation principale* sur P.

- Soit κ la thêtacaractéristique sur C associée à Θ_C. On a, pour tout point x de P :

$$h^0(C,\kappa+x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \Theta$$

(6.1) $$h^0(C,\kappa+x) \geq m \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Theta$$

(6.2) $$h^0(C,\kappa+x) \geq m+1 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{Sing}\,\Theta .$$

Ces résultats entraînent :

Proposition 6.3. *Soit* (P,Θ) *la variété de Prym–Tjurin associée à une correspondance symétrique, effective et sans point fixe sur une courbe lisse* C *telle que l'endomorphisme* i *de* JC *associé vérifie* $(i-1)(i+m-1)=0$. *Alors :*

$$\dim \mathrm{Sing}\,\Theta \quad \geq \quad \dim P - 2m - 2 .$$

■ Nous utilisons la même version améliorée de Corollary 3 de [F-H-L] que A. Bertram dans [Be] : notons g le genre de C et, pour tout entier naturel r, $W^r = \{ L\in \mathrm{Pic}^{g-1}C \mid h^0(C,L)>r\}$; pour toute sous-variété Σ de W^r, on a alors :

$$\dim(\Sigma \cap W^{r+1}) \geq \dim\Sigma - 2r - 3 .$$

On applique ce résultat à $\Sigma = \kappa + \Theta$, qui est contenu dans W^{m-1} (6.1). Par (6.2), l'intersection $(\Sigma \cap W^m)$ est contenue dans $\mathrm{Sing}\,\Theta$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Sing}\,\Theta &\geq \dim(\Sigma \cap W^m) \\ &\geq \dim\Sigma - 2m - 1 \\ &= \dim P - 2m - 2 . \blacksquare \end{aligned}$$

D'autre part, le choix d'un point x_0 de C permet de définir un morphisme $x \mapsto (1-i)(x-x_0)$ de C sur une courbe Γ dans P. Welters prouve dans [W 1] que *la classe de* Γ *est* m *fois la classe minimale.*

Comme mentionné dans l'introduction, il serait donc très intéressant de pouvoir compléter ce tableau en étudiant les variétés de Prym-Tjurin dont les variétés de Kummer admettent des m-plans $(m+2)$-sécants.

REFERENCES

[B 1] A. BEAUVILLE : Prym Varieties : A Survey, in "Theta functions, Bowdoin 1987", Proc. of Symposia in Pure Mathematics 49, Part 1 (1989), 607-520.

[B 2] A. BEAUVILLE : Prym varieties and the Schottky problem. Invent. Math. 41 (1977), 149-196.

[B-D] A. BEAUVILLE, O. DEBARRE : Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym. Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa, Serie IV, 14 (1987), 613-623.

[Be] A. BERTRAM : An existence theorem for Prym special divisors. Invent. Math. 90 (1987), 669-671.

[D 1] O. DEBARRE : Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3. Duke Math. J. 56 (1988), 221-273.

[D 2] O. DEBARRE : The trisecant conjecture for Pryms, in "Theta functions, Bowdoin 1987", Proc. of Symposia in Pure Mathematics 49, Part 1 (1989), 621-626.

[Do] R. DONAGI : The tetragonal construction. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 4 (1981), 181-185.

[F-H-L] W. FULTON, J. HARRIS, R. LAZARSFELD : Excess linear series on an algebraic curve. Proc. Am. Math. Soc. 92 (1984), 320-322.

[G 1] R.C. GUNNING : Some curves in abelian varieties. Invent. Math. 66 (1982), 377-389.

[G 2] R.C. GUNNING : Analytic identities for theta functions, in "Theta functions, Bowdoin 1987", Proc. of Symposia in Pure Mathematics 49, Part 1 (1989), 503-515.

[G 3] R.C. GUNNING : On generalized theta functions. Amer. J. Math. 103 (1981), 411-435.

[K] V. KANEV : Principal polarizations of Prym-Tjurin varieties. Comp. Math. 64 (1987), 243-270.

[M] T. MATSUSAKA : On a characterization of a Jacobian variety. Mem. Coll. of Sci. Kyoto, Ser. A, 32 (1959), 1-19.

[Mu] D. MUMFORD : Prym varieties I. Contributions to analysis. Academic Press, New-York (1974).

[T] A.N. TJURIN : Five lectures on three dimensional varieties. Russ. Math. Surveys 27 (1972), 1-53.

[W 1] G. WELTERS : Curves of twice the minimal class on principally polarized varieties. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetenschappen, Indagationes Math. 49 (1987), 87-109.

[W 2] G. WELTERS : A criterion for Jacobi varieties. Ann. of Math. 120 (1984), 497-504.

[W 3] G. WELTERS : On flexes of the Kummer variety. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetenschappen, Indagationes Math. 45 (1983), 501-520.