GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles.

Note de **Olivier Debarre**, présentée par Henri Cartan.

Reçue le 20 août 1984.

Le contre-exemple présenté est construit avec des variétés symplectiques kählériennes non projectives. L'étude d'un exemple montre ensuite que la validité de ce théorème est liée à la projectivité des variétés considérées.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — A Counter-example to the Torelli Theorem for Irreducible Symplectic Manifolds.

The counter-example given below is constructed from non projective kählerian symplectic manifolds. The study of an example then shows that the validity of this theorem is linked to the projectivity of the manifolds considered.

0. INTRODUCTION. — Le corps de base est le corps des complexes. Une variété est toujours supposée lisse et connexe. Une variété symplectique irréductible, brièvement symplectique, est une variété analytique compacte simplement connexe X admettant une métrique kählérienne et une 2-forme holomorphe, unique à multiplication par un scalaire près, induisant en tout point x de X une forme alternée non dégénérée sur $T_x X$ (*cf.* [1]). En dimension deux, ce sont les surfaces K3.

Le groupe $H^2(X, \mathbb{Z})$ est muni d'une forme quadratique naturelle entière, non divisible et non dégénérée, notée q_X (*cf.* [1], p. 772). Le théorème de Torelli pour les variétés symplectiques est l'énoncé suivant : deux telles variétés X et Y sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme orthogonal entre $(H^2(Y, \mathbb{Z}), q_Y)$ et $(H^2(X, \mathbb{Z}), q_X)$, qui respecte les structures de Hodge. Ce théorème est vrai pour les surfaces K3 (*voir* [3] pour un compte rendu de la démonstration), mais faux sous cette forme en dimension supérieure, comme on le montre dans la partie 3, avec des variétés non projectives. Dans la partie 4, on montre par un exemple que la validité du théorème de Torelli semblerait tenir à des hypothèses de projectivité sur les variétés considérées (comme 3.2.1).

1. L'EXEMPLE DES VARIÉTÉS $S^{[r]}$. — Soit S une surface K3. L'espace de Douady $S^{[r]}$ qui paramètre les sous-espaces analytiques finis de longueur r de S est une variété symplectique de dimension $2r$ (*cf.* [1], [5], [6] et [7], [8] pour l'existence d'une métrique kählérienne). On note E_S le diviseur irréductible $\{Z \in S^{[r]} \mid Z \text{ non réduit}\}$. On a alors ([1], [5]) :

PROPOSITION 1.1. — *Il existe une classe de diviseurs* δ *sur* $S^{[r]}$ *telle que :*

$$H^2(S^{[r]}, \mathbb{Z}) \simeq H^2(S, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}\,\delta,$$
$$\operatorname{Pic} S^{[r]} \simeq \operatorname{Pic} S \oplus \mathbb{Z}\,\delta, \qquad [E_S] = 2\,\delta.$$

La forme quadratique q_S mentionnée dans l'introduction fait de la décomposition ci-dessus une somme orthogonale, induit la forme d'intersection de S sur $H^2(S, \mathbb{Z})$, et $q_S(\delta) = -2(r-1)$ ([1], p. 777).

2. APPLICATIONS MÉROMORPHES ENTRE VARIÉTÉS $S^{[r]}$.

THÉORÈME 2.1. — *Soient* S *et* T *deux surfaces* K3, $u : S^{[r]} \dashrightarrow T^{[r]}$ *une application méromorphe dominante vérifiant :*

$$u^*([E_T]) = [E_S] \quad \textit{dans} \quad H^2(S^{[r]}, \mathbb{Z}).$$

Alors u est induite par une application méromorphe dominante $S \dashrightarrow T$.

COROLLAIRE 2.2 (*cf.* [2], prop. 10). — *Soit* S *une surface* K3. *Alors tout automorphisme biméromorphe de* $S^{[r]}$ *induisant l'identité sur* $H^2(S^{[r]}, \mathbb{Z})$ *est l'identité.*

0249-6321/84/02990681 $ 2.00 © Académie des Sciences

Démonstration du théorème. — Notre application u est définie hors d'un fermé Z de $S^{[r]}$ de codimension au moins 2. Comme $h^0(S^{[r]}, E_S)=1$, u induit par hypothèse un morphisme $u: S^{[r]}-Z-E_S \to T^{[r]}-E_T$. On note π_S l'application naturelle $S^r-\Delta_S \to S^{[r]}-E_S$ ([1], p. 766). Comme $Y=\pi_S^{-1}(Z)\cup\Delta_S$ est de codimension 2, S^r-Y est simplement connexe. Il existe donc un morphisme $\tau: S^r-Y\to T^r-\Delta_T$ vérifiant $\pi_T\circ\tau=u\circ\pi_S$. Le théorème résulte alors de :

LEMME 2.3. — *Soient* S *et* T *deux surfaces* K3, $\tau: S^r \dashrightarrow T^r$ *une application méromorphe dominante. Alors il existe des applications* $\tau_i: S\dashrightarrow T$, $i=1, \ldots, r$ *et une permutation* σ *telles que :*

$$\tau(s_1, \ldots, s_r)=\sigma(\tau_1(s_1), \ldots, \tau_r(s_r)).$$

On procède par récurrence sur r. Pour $s=(s_2, \ldots, s_r)\in S^{r-1}$ générique, l'une des applications $\tau_j^s: S \overset{i_s}{\hookrightarrow} S^r \dashrightarrow T^r \overset{pr_j}{\to} T$ est dominante. Quitte à permuter les facteurs de T^r, on peut supposer que c'est τ_1^s. Les applications $\tau_1^{s*}: H^2(T, \mathbb{Z})\to H^2(S, \mathbb{Z})$ sont indépendantes de s. On applique le résultat suivant, dont la démonstration est élémentaire.

LEMME 2.4. — *Soient* S *et* T *deux surfaces* K3, τ_1, *et* τ_2 *deux applications méromorphes dominantes* $S\dashrightarrow T$. *On suppose que les morphismes induits* $\tau_1^*, \tau_2^*: H^2(T, \mathbb{Z})\to H^2(S, \mathbb{Z})$ *ont même noyau. Alors il existe un automorphisme* σ *de* S *tel que* $\tau_2=\sigma\tau_1$.

Comme le groupe Aut S est discret, on en déduit que les τ_1^s sont égales entre elles.

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence puis de nouveau le lemme 2.4 pour terminer la démonstration. ■

3. CONTRE LE THÉORÈME DE TORELLI. — Soit X une variété symplectique contenant un espace projectif P, $\varepsilon: \hat{X}\to X$ l'éclatement de P. Le diviseur exceptionnel est isomorphe à la variété d'incidence $\{(x, \check{x})\in P\times\check{P} \mid x\in\check{x}\}$ et peut se contracter sur $\check{P}$ par $\check{\varepsilon}: X\to\check{X}$. On vérifie que $\check{X}$ est naturellement une variété symplectique, *si elle admet une métrique kählérienne.* L'application biméromorphe $m=\check{\varepsilon}\,\varepsilon^{-1}: X\dashrightarrow\check{X}$ est appelée transformation élémentaire de X le long de P [6]. L'application m^* induite en cohomologie est une isométrie de Hodge entre $H^2(\check{X}, \mathbb{Z})$ et $H^2(X, \mathbb{Z})$.

On montre dans le reste du paragraphe qu'il existe une variété symplectique X contenant un espace projectif, telle que sa transformée élémentaire admette une métrique kählérienne et ne soit pas isomorphe à X.

3.1. Si S est une surface K3 contenant une courbe rationnelle lisse L de classe l telle que Pic $S\simeq\mathbb{Z}\,l$, la variété $X=S^{[r]}$ n'est pas isomorphe à sa transformée élémentaire le long de $P=L^{[r]}$.

En effet, s'il existe un isomorphisme $u: \check{X}\xrightarrow{\sim} X$, l'application $\sigma=u\,m$ induit un automorphisme orthogonal de Pic $X\simeq\mathbb{Z}\,l\oplus\mathbb{Z}\,\delta$ (*cf.* 1.1). On vérifie facilement que la seule possibilité numérique est $\sigma^* l=\pm l$, $\sigma^*\delta=\pm\delta$. Comme $\sigma^* 2\delta$ est la classe du diviseur effectif $\sigma^{-1}E$, on a $\sigma^*\delta=\delta$. Le théorème 2.1 permet de conclure que σ est un automorphisme, ce qui contredit le fait que m n'est pas définie sur tout X.

3.2. Si S est une surface K3 contenue dans $\mathbb{P}^N$ et contenant une droite L, la transformée élémentaire de $S^{[r]}$ le long de $L^{[r]}$ est projective.

De façon générale, si X est une variété symplectique contenant un projectif P, le fibré conormal à P dans X est isomorphe au fibré tangent de P donc est ample. On peut contracter P par $c : X \to Y$, où Y est un espace analytique singulier. On montre que :

3.2.1. Si X et Y sont projectives, $X^{\vee}$ est projective.

Soient maintenant S une surface K3 dans $\mathbb{P}^N$, H le faisceau $\mathcal{O}_S(1)$, r un entier positif fixé. On définit, pour tout $n \geqq 1$, l'application rationnelle :

$$\Phi_n : \quad S^{[r]} \dashrightarrow \mathrm{Grass}(r, h^0(nH)).$$
$$p_1 + \ldots + p_r \mapsto (r-1) \text{ plan engendré dans } \mathbb{P}|nH|^{\vee}.$$

Soient $L_1, \ldots, L_t$ les droites contenues dans S, $c : S^{[r]} \to Y$ la contraction de $\bigcup L_i^{[r]}$. On montre que :

3.2.2. Φ_n est un morphisme pour $n \geqq r-1$, injectif pour $n \geqq r$. Le morphisme Φ_{r-1} induit un morphisme fini $Y \to \mathrm{Grass}(r, h^0((r-1)H))$. En particulier, Y est projectif.

Il suffit alors de remarquer que si S est une surface K3 dans $\mathbb{P}^N$ contenant une droite L, le faisceau $\mathcal{O}_S(3) \otimes \mathcal{O}_S(L)$ est très ample, et que le morphisme associé ψ envoie S sur une surface contenant comme seule droite $\psi(L)$.

3.3. Soit S une surface K3 dans $\mathbb{P}^N$, contenant une droite L. Il existe une déformation $\pi : (\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{S}) \to \Delta = \{ t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1 \}$ de l'inclusion $L \subsetneq S$ telle que, pour tout t, $L_t = \pi^{-1}(t) \cap \mathcal{L}$ soit une courbe rationnelle lisse sur la surface $S_t = \pi^{-1}(t)$, et que $\mathrm{Pic}\, S_t \simeq \mathbb{Z}[L_t]$ pour $t \neq 0$. On a alors une famille de variétés symplectiques $\mathcal{S}^{[r]} \to \Delta$, contenant la famille de projectifs $\mathcal{L}^{[r]} \to \Delta$. On définit comme pour une seule variété la transformation élémentaire $\mathcal{X} \to \Delta$, de sorte que $\mathcal{X}_t$ est la transformée élémentaire de $S_t^{[r]}$ le long de $L_t^{[r]}$. Par 3.2, $\mathcal{X}_0$ est projective, donc $\mathcal{X}_t$ est kählérienne pour t proche de 0, mais non isomorphe à $S_t^{[r]}$ pour $t \neq 0$ par 3.1.

Remarque 3.4. — L'image par m^* de la classe d'un diviseur ample n'est jamais la classe d'un diviseur ample. Les transformations élémentaires ne peuvent fournir de contre-exemple à un théorème de Torelli avec polarisation, c'est-à-dire entre variétés projectives pour lesquelles on a choisi une classe de diviseur ample.

4. Pour le théorème de Torelli. — On étudie ici un exemple dû à Beauville de variétés symplectiques X *projectives* de type $S^{[r]}$, isomorphes à leur transformée élémentaire le long d'un espace projectif P. Il apparaît que les variétés symplectiques correspondant à des déformations du triplet (P, X, H), où H provient d'un diviseur ample sur la contraction Y de P dans X (*cf.* 3.2), sont isomorphes à leur transformée élémentaire.

L'exemple en question est le suivant. Soit S une surface K3 plongée dans $\mathbb{P}^{r+1}$, de degré $2r$; à un élément générique Z de $S^{[r]}$, composé de r points distincts engendrant un espace projectif $l(Z)$ de dimension $r-1$ coupant S transversalement en $2r$ points, on associe l'intersection résiduelle $\sigma(Z) = l(Z).\ S - Z$. L'involution birationnelle $\sigma : S^{[r]} \dashrightarrow S^{[r]}$ est isomorphe, dans certains cas, à une transformation élémentaire ([2], § 6).

Théorème 4.1. — *L'application* $\sigma^* : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ *est l'opposée de la symétrie orthogonale par rapport à* $h - \delta$, *où* h *est la classe d'une section hyperplane de* S.

Premier pas. — $\sigma^* = \varepsilon . \mathrm{id}$ sur $h^{\perp} \cap \delta^{\perp}$, avec $\varepsilon \in \{ -1, +1 \}$.

Soit $\mathcal{S} \to \mathcal{M}$ la déformation locale universelle de la paire (S, $\mathcal{O}_s(1)$), $f : \mathcal{X} = \mathcal{S}^{[r]} \to \mathcal{M}$ la déformation de X associée. L'application des périodes $p : \mathcal{M} \to \mathbb{P} H^2(X, \mathbb{C})$ est un isomorphisme local sur un ouvert de la quadrique projective :

$$h^{\perp} \cap \delta^{\perp} \cap \{ q_X = 0 \} \quad ([1], \text{ p. } 772).$$

On peut définir une involution birationnelle Σ de $\mathcal{X}$ au-dessus de $\mathcal{M}$ coïncidant avec l'involution de Beauville sur les fibres. On désigne par i_t l'injection $\mathcal{X}_t = f^{-1}(t) \subsetneq \mathcal{X}$, pour $t \in \mathcal{M}$, par σ_t la restriction de Σ à $\mathcal{X}_t$ et par $[\varphi_t]$ un générateur de $H^{2,0}(\mathcal{X}_t)$. On a :

$$\forall t \in \mathcal{M}, \quad \sigma_0^* p(t) = \sigma_0^* i_0^* i_t^{*-1} [\varphi_t] = i_0^* \Sigma^* i_t^{*-1} [\varphi_t] = i_0^* i_t^{*-1} \sigma_t^* [\varphi_t] = i_0^* i_t^{*-1} [\varphi_t] = p(t).$$

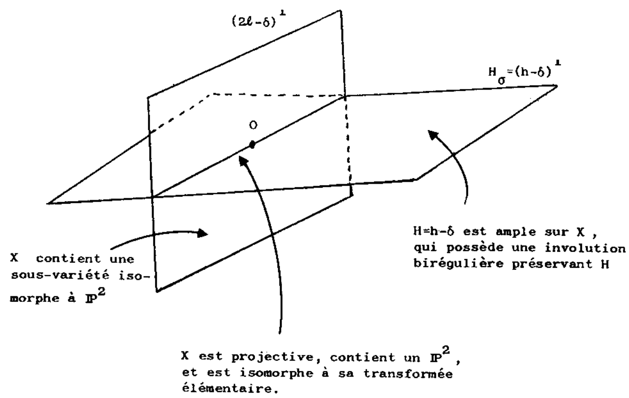
Le morphisme $\sigma^* = \sigma_0^*$ induit donc l'identité sur un ouvert de la quadrique irréductible $h^\perp \cap \delta^\perp \cap \{ q_X = 0 \}$, donc aussi sur l'espace projectif engendré $\mathbb{P}(h^\perp \cap \delta^\perp)$.

Deuxième pas. — On vérifie que $h - \delta$ est l'image inverse par l'application $l : S^{[r]} - - \to G = G(r, r+2)$ d'un générateur de $H^2(G, \mathbb{Z})$. Il est donc invariant par σ^*.

Conclusion. — La restriction de σ^* à $\mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}\delta$ est alors bien déterminée puisque $\sigma^* \delta \neq \delta$ (2.1). L'unimodularité de q_X sur $H^2(S, \mathbb{Z})$ impose $\varepsilon = -1$. ■

Soit φ une 2-forme holomorphe non nulle sur X. Le produit intérieur par φ induit un isomorphisme de $H^1(X, TX)$ sur $H^1(X, \Omega^1 X)$ ([1], p. 774). Comme $\sigma^* \varphi = -\varphi$ (4.1), σ^* agit sur $H^1(X, TX)$ comme une symétrie par rapport à un hyperplan H_σ.

Dans le cas où S est une quartique lisse dans $\mathbb{P}^3$ contenant une seule droite L de classe l, σ est isomorphe à la transformation élémentaire le long de $L^{[2]}$. Elle se prolonge en une involution biméromorphe de la famille de Kuranishi de X au-dessus de H_σ. La situation locale est la suivante :



Les variétés construites pour le contre-exemple du paragraphe 3 forment un ensemble dense dans $\delta^\perp \cap l^\perp$.

Je remercie A. Beauville de l'aide qu'il m'a apportée pour la réalisation de ce travail.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. Beauville, Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle, *J. Diff. Geom.*, 18, 1983, p. 755-782.

[2] A. Beauville, Some Remarks on Kähler Manifolds with $c_1 = 0$. Classification of Algebraic and Analytic Manifolds, *Progress in Math.*, n° 39, *Birkhäuser*, Boston, 1983.

[3] A. Beauville, Surface K3, *Séminaire Bourbaki*, n° 609, 1982/1983.

[4] F. Bogomolov, Hamiltonian Kähler Manifolds, *Soviet Math. Dokl.*, 19, 1978, p. 1462-1465.

[5] J. Fogarty, Algebraic Families on an Algebraic Surface, II : the Picard Scheme of the Punctual Hilbert Scheme, *Amer. J. Math.*, 95, 1973, p. 660-687.

[6] S. Mukai, Symplectic Structure on the Moduli Space of Sheaves on an Abelian or K3 Surface, *Inv. Math.*, 77, 1984, p. 101-116.

[7] Y. T. Siu, Every K3 Surface is Kähler, *Inv. Math.*, 73, 1983, p. 139-150.

[8] J. Varouchas, Stabilité de la classe des variétés kählériennes par certains morphismes propres, *Inv. Math.*, 77, 1984, p. 117-127.

Centre de Mathématiques, U.A. du C.N.R.S. n° 169, *École Polytechnique*, 91128 *Palaiseau*.