Compositio Mathematica 73: 161–187, 1990.

Sur le théorème de Torelli pour les solides doubles quartiques

OLIVIER DEBARRE

Received 12 December 1988; final version accepted 19 June 1989

A la suite de Clemens, on appellera *solides doubles quartiques*, ou plus simplement *solides doubles*, les revêtements doubles $X \to \mathbb{P}^3$ ramifiés le long d'une *quartique* F avec des points doubles ordinaires comme seules singularités. La jacobienne intermédiaire de X est par convention celle d'une désingularisation minimale $\tilde{X}$, c'est-à-dire:

$$JX = H^2(\tilde{X}, \Omega^1_{\tilde{X}})/H^3(\tilde{X}, \mathbb{Z}).$$

C'est une variété abélienne principalement polarisée de dimension $(10 - s)$, où s est le nombre de points singuliers de F.

Le travail fondamental de Clemens ([C]) est à l'origine de nombreux articles consacrés à la géométrie de ces jacobiennes intermédiaires. Il faut citer les noms de Welters ([W1]), Griffiths ([C-G]), Tikhomirov, qui décrit dans [T] une paramétrisation du diviseur thêta, et Voisin, qui montre dans [V] l'irrationalité des solides doubles. Signalons que dans un travail en préparation, Clemens utilise la paramétrisation de Tikhomirov pour interpréter les résultats de cet article et ceux de [V] dans un cadre unifié.

On s'intéresse ici aux deux questions suivantes, considérées par Voisin ([V]) dans le cas lisse:

(i) description des singularités d'un diviseur thêta Θ de JX

(ii) problème de Torelli.

On part du fait que, lorsque F est singulière, le solide double X admet une ou plusieurs structures de fibré en coniques ([C]). La théorie générale ([B1], [C–G]) nous dit alors que JX est une variété de Prym et c'est par ce biais-là qu'on attaque la question (i). Notre résultat principal est que *le lieu singulier de* Θ *est de codimension* 5 *dans* JX (pour $s = 0$, 1 ou 5, il faut supposer X *générique*). Pour $s = 2$, 3 ou 4, on obtient une description complète de $\operatorname{Sing}\Theta$. Pour $s = 5$, on retrouve un résultat de Smith et Varley ([S-V]): le diviseur thêta a (génériquement) deux points singuliers opposés.

En ce qui concerne la question (ii), on suit les idées de [V]. L'espace cotangent à JX en 0 est isomorphe à l'espace des quadriques de $\mathbb{P}^3$ passant par le lieu singulier de F et on note $\Psi\colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}T_0JX$ l'application rationnelle induite par ce système linéaire de quadriques. On construit une sous-variété distinguée U de dimension maximale de $\operatorname{Sing}\Theta$ telle que, *pour* $s \leqslant 4$, *l'intersection des cônes tangents à* Θ *en les points de* U *de multiplicité* 2 *sur* Θ *est la surface* $\Psi(F)$. Ceci entraîne le théorème de Torelli lorsqu'on sait distinguer a priori la sous-variété U de $\operatorname{Sing}\Theta$. C'est le cas pour $0 \leqslant s \leqslant 1$, X générique, ou pour $2 \leqslant s \leqslant 4$: U est égal à la réunion des composantes de dimension maximale de $\operatorname{Sing}\Theta$.

Signalons enfin qu'afin d'éviter des détails techniques inutiles, nous n'avons traité ici que le cas des solides doubles *ordinaires* (cf. Définition (2.3)), nous bornant à mentionner les modifications à apporter dans le cas général.

L'organisation de cet article est la suivante. Les deux premières parties sont consacrées à des définitions et à des rappels sur des propriétés des solides doubles montrées dans [C]. Dans les Chapitres 3, 4, 5 et 6 on donne des descriptions du lieu singulier du diviseur thêta des jacobiennes intermédiaires des solides doubles avec 2, 3, 4 ou 5 points singuliers. On étend dans le chapitre suivant ces descriptions au cas des solides doubles génériques avec un point singulier. Dans le Chapitre 8, on fait le lien avec les travaux de Voisin sur les solides doubles lisses. Le Chapitre 9 est consacré au problème de Torelli. Enfin, on a regroupé dans un appendice quelques résultats techniques utilisés dans cet article.

On travaille uniquement sur le corps des nombres complexes.

1. Variétés de Prym

Soit P la variété de Prym attachée à un revêtement double étale $\pi\colon \tilde{N} \to N$ de courbes lisses. Si g est le genre de N, la dimension de P est $p = g - 1$. Dans la translatée:

$$P^* = \{\tilde{L} \in J^{2g-2}\tilde{N} \mid Nm\,\tilde{L} = \omega_N \text{ et } h^0(\tilde{N}, \tilde{L}) \text{ pair}\},$$

de P, le diviseur:

$$\Xi = \{\tilde{L} \in P^* \mid h^0(\tilde{N}, \tilde{L}) \geqslant 2\}$$

représente la polarisation principale de P.

Les points singuliers de Ξ sont de deux types; les points singuliers *exceptionnels*:

$$\operatorname{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex}}\,\Xi = \{\tilde{L} = (\pi^*L)(\tilde{M}) \in P^* \mid h^0(N, L) \geqslant 2 \text{ et } \tilde{M} \geqslant 0\}$$

et les points singuliers *stables*:

$$\operatorname{Sing}^{\pi}_{\mathrm{st}}\,\Xi = \{\tilde{L} \in P^* \mid h^0(\tilde{N}, \tilde{L}) \geqslant 4\}.$$

Un point singulier peut bien sûr être à la fois stable et exceptionnel. On notera:

$$\mathrm{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex,ns}}\,\Xi = \text{adhérence de } \{\mathrm{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex}}\,\Xi - \mathrm{Sing}^{\pi}_{\mathrm{st}}\,\Xi\}.$$

Rappelons aussi qu'il existe sur $\mathrm{Sing}^{\pi}_{\mathrm{st}}\,\Xi$ une structure de schéma naturelle ([W2]).

L'involution de $\tilde{N}$ associée à π sera notée σ, ainsi que le morphisme qu'elle induit sur P (qui est l'opposé de l'identité). On aura aussi à utiliser la surface suivante, contenue dans P:

$$\textstyle\sum(\tilde{N}) = \{\mathcal{O}_{\tilde{N}}(\tilde{x} + \tilde{y} - \sigma\tilde{x} - \sigma\tilde{y}) \mid \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{N}\},$$

dont la propriété principale est l'inclusion:

$$\textstyle\sum(\tilde{N}) + \mathrm{Sing}^{\pi}_{\mathrm{st}}\,\Xi \subset \Xi.$$

Toutes ces notions s'étendent avec des modifications mineures au cas des revêtements admissibles des courbes stables ([B2]).

2. Structures de fibré en coniques sur les solides doubles

Les constructions suivantes sont dues à Clemens ([C]).

Soit $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^3$ le revêtement double ramifié le long d'une quartique $F \subset \mathbb{P}^3$ ayant comme seules singularités s points doubles ordinaires $p_1, \dots, p_s$ (avec $1 \leqslant s \leqslant 5$), dont *trois quelconques ne sont pas alignés*.

(2.1) A chaque point singulier p_i de F est associée une structure (birationnelle) de fibré en coniques sur X, à savoir la composition $\varphi_i\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ de φ avec la projection $\pi'_i\colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ depuis p_i.

La courbe discriminante C_i de φ_i est une *sextique plane* et l'image par π'_i du cône tangent à F en p_i est une conique lisse Q_i partout tangente à C_i.

(2.2) Les $(s-1)$ points $\pi'_i(p_j)$ pour $j \neq i$ sont singuliers sur la courbe C_i. On note N_i la normalisée de C_i en ces points; c'est une courbe stable de genre $11 - s$. A la structure de fibré en coniques φ_i est associé un revêtement double admissible $\pi_i\colon \tilde{N}_i \to N_i$ dont la variété de Prym est isomorphe à la jacobienne intermédiaire JX de X (leur dimension commune est $10 - s$).

(2.3) Dans la situation générique, les propriétés suivantes sont vérifiées (on dira alors que X est *ordinaire*):

(i) la courbe N_i est lisse

(ii) l'intersection $Q_i . C_i$ s'écrit $2D_i$, où D_i est un diviseur dont le support est contenu dans le lieu lisse de C_i. La demi-période de N_i correspondant alors au revêtement double étale π_i est $D_i - H_i$, où H_i est un diviseur hyperplan sur N_i ([C] page 223).

(iii) aucune droite du plan tangente (resp. bitangente) à C_i ne passe par deux points singuliers (resp. un point singulier) de C_i.

(2.4) Lorsque $s \geqslant 2$, on peut associer à chaque couple (p_i, p_j), $i \neq j$, une autre structure (birationnelle) de fibré en coniques $\varphi_{ij}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, donc aussi un revêtement admissible $\pi_{ij}: \tilde{N}_{ij} \to N_{ij}$ de variété de Prym isomorphe à JX ([$D - S$] 4.3 page 97).

Rappellons d'autre part que Donagi a défini dans [Do] la *transformation tétragonale* qui, à toute paire $(\pi: \tilde{N} \to N, f: N \to \mathbb{P}^1)$ avec π admissible et f fini de degré 4, associe deux autres telles paires (π', f') et (π'', f'') telles que les variétés de Prym des revêtements π, π' et π'' soient isomorphes.

On laisse au lecteur le soin de vérifier le résultat suivant:

PROPOSITION (2.5). *Les deux transformées tétragonales du revêtement $\pi_i: \tilde{N}_i \to N_i$ associées au morphisme de degré quatre $N_i \to \mathbb{P}^1$ induit par la projection depuis le point double $\pi_i'(p_j)$ de la sextique C_i sont les revêtements $\pi_j: \tilde{N}_j \to N_j$ et $\pi_{ij}: \tilde{N}_{ij} \to N_{ij}$.*

REMARQUES (2.6). (1) La transformation tétragonale donne aussi des g_4^1 sur N_j et N_{ij}. Celui de N_j est induit par la projection depuis le point $\pi_j'(p_i)$ de la sextique C_j. En ce qui concerne la courbe N_{ij}, on montrera en 3.4 qu'elle est tracée sur un cône quadratique dont elle coupe la génératrice en 4 points: c'est le g_4^1 qu'on obtient.

(2) Dans le cas ordinaire, les morphismes $N_i \to \mathbb{P}^1$ n'ont pas de fibre double (propriété 2.3.(iii)) et les courbes N_{ij} sont lisses ([D1]).

3. Solides doubles avec deux points singuliers: singularités du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire.

Soit X un solide double avec deux points doubles ordinaires p_1 et p_2. Il existe sur X trois structures de fibré en coniques ((2.1), (2.4)) qui induisent des isomorphismes entre JX et les variétés de Prym de trois revêtements admissibles de courbes de genre 9:

$$\pi_1 : \tilde{N}_1 \to N_1,$$
$$\pi_2 : \tilde{N}_2 \to N_2,$$
$$\pi_{12} : \tilde{N}_{12} \to N_{12}.$$

La courbe N_1 (resp. N_2) est la normalisée en un point d'une sextique plane C_1 (resp. C_2). La projection depuis ce point induit un g_4^1 sur N_1 (resp. N_2) qui sera noté G_{12} (resp. G_{21}).

Comme on l'a expliqué dans l'introduction, on se place ici dans le cas où X est *ordinaire*. En particulier, les courbes N_i et N_{ij} sont *lisses*.

La famille $\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex}}^{\pi_1} \Xi$ est décrite en (A3.1) et (A3.2). Elle est réunion:

- de la surface irréductible T, de classe de cohomologie $8.[\Xi]^6/6!$.
- des 4 composantes irréductibles de la surface $\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex},G_{12}}^{\pi_1} \Xi$,

décrites en (A3.3), qui seront notées $A_{12}^+, A_{12}^- = \sigma A_{12}^+, B_{12}^+$ et $B_{12}^- = \sigma B_{12}^+$. Elles sont toutes de classe $2.[\Xi]^6/6!$ et (A3.8):

$$B_{12} = B_{12}^+ \cup B_{12}^- = \mathrm{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_1} \Xi, \tag{3.1}$$

$$A_{12} = A_{12}^+ \cup A_{12}^- \subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_1} \Xi. \tag{3.2}$$

Cette discussion reste valable pour le revêtement π_2. On notera $A_{21}^{\pm}$ et $B_{21}^{\pm}$ les sous-variétés de $\mathrm{Sing}\,\Xi$ correspondantes. Les surfaces $B_{12}^{\pm}$ et $B_{21}^{\pm}$ sont des *composantes* de $\mathrm{Sing}\,\Xi$, distinctes deux à deux, puisque $B_{21} \subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_1} \Xi$ (A2.2.(i)), ce qui n'est pas le cas pour B_{12} (3.1).

LEMME (3.3). *La surface T est contenue dans une composante U de* $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_1} \Xi$ *de dimension* 3.

Il ressort de A1.1 que l'espace tangent au schéma $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_1} \Xi$ en tout point de T est de dimension $\geqslant 3$. Comme la classe de cohomologie de T est $8.[\Xi]^6/6!$, on déduit du lemme A1.2 que:

- soit T est une composante connexe non réduite de $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_1} \Xi$; mais c'est impossible puisque T recontre A_{12}
- soit T n'est pas une composante de $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_1} \Xi$, auquel cas le lemme est démontré. □

Rappelons que le revêtement $\pi_{12}: \tilde{N}_{12} \to N_{12}$ est l'une des transformées tétragonales de π_1. En particulier, la courbe N_{12} admet un g_4^1, qu'on notera L_{12}.

PROPOSITION (3.4). *On a $h^0(N_{12}, 2L_{12}) = 4$, de sorte que N_{12} est tracée sur un cône quadratique. De plus:*

$$U = \mathrm{Sing}_{\mathrm{ex},L_{12}}^{\pi_{12}} \Xi.$$

Comme les familles $\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex}}^{\pi_1} \Xi$ et $\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex}}^{\pi_2} \Xi$ ne contiennent pas de composante de dimension 3 (A3.1), on a (A2.2.(i)):

$$U \subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_1} \Xi \cap \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_2} \Xi = \mathrm{Sing}_{\mathrm{ex},L_{12}}^{\pi_{12}} \Xi.$$

On conclut avec le lemme A2.1. □

La structure du lieu singulier de Ξ est alors facile à déterminer. On a en effet (A2.2.(i)):

$$\begin{aligned}\operatorname{Sing}\Xi &= U \cup \operatorname{Sing}^{\pi_1}_{\mathrm{ex,ns}}\Xi \cup \operatorname{Sing}^{\pi_2}_{\mathrm{ex,ns}}\Xi,\\ &= U \cup B^+_{12} \cup B^-_{12} \cup B^+_{21} \cup B^-_{21}\end{aligned}$$

et ces familles sont des composantes distinctes de $\operatorname{Sing}\Xi$. On a montré:

THÉORÈME (3.5). *Soit (JX, Ξ) la jacobienne intermédiaire d'un solide double ordinaire avec deux points singuliers. Alors le lieu singulier de Ξ a 5 composantes irréductibles: une variété de dimension 3 et 4 surfaces.*

REMARQUES (3.6). (1) Une partie des conclusions du théorème subsiste lorsqu'on ne suppose plus X ordinaire. En particulier, $\operatorname{Sing}\Xi$ reste de dimension 3 et $U = \operatorname{Sing}^{\pi_{12}}_{\mathrm{ex},L_{12}}\Xi$ reste sa seule composante irréductible de cette dimension. Elle correspond à des singularités stables, génériquement non exceptionnelles pour les revêtements π_i.

(2) La classe de cohomologie de U est $2.[\Xi]^5/5!$ (A2.1).

(3) La répartition en singularités stables et exceptionnelles est la suivante (ST signifie "stable" et EX, "exceptionnelle, génériquement non stable"):

	B_{12}	B_{21}	U
π_1	EX	ST	ST
π_2	ST	EX	ST
π_{12}	ST	ST	EX

(4) Les familles A_{12} et A_{21} coïncident, sont contenues dans U, et:

$$\operatorname{Sing}^{\pi_{12}}_{\mathrm{st}}\Xi = B_{12} \cup B_{21} \cup A_{12},$$

qui est de codimension pure 6. La multiplicité du schéma $\operatorname{Sing}^{\pi_{12}}_{\mathrm{st}}\Xi$ le long de A_{12} est deux. La classe de $\operatorname{Sing}^{\pi_{12}}_{\mathrm{st}}\Xi$ est $2^4.[\Xi]^6/6!$ (c'est la classe "générique").

4. Solides doubles avec trois points singuliers: singularités du diverseur thêta de la jacobienne intermédiaire.

Soit X un solide double avec trois points doubles ordinaires p_1, p_2 et p_3. Il existe sur X six structures de fibré en coniques ((2.1), (2.4)), qui induisent des isomorphismes entre JX et les variétés de Prym de six revêtements admissibles de courbes de genre 8:

$$\pi_i\colon \tilde{N}_i \to N_i \quad \text{pour } i = 1,2,3,$$

$$\pi_{ij}\colon \tilde{N}_{ij} \to N_{ij} \quad \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

La courbe N_i est la normalisée en deux points d'une sextique plane C_i (qui sont, avec les notations de 2.1, les points $\pi_i'(p_j)$ pour $j \neq i$). La projection depuis $\pi_i'(p_j)$ induit un g_4^1 sur N_i qui sera noté G_{ij}.

De nouveau, on suppose X *ordinaire*, de sorte que les courbes N_i et N_{ij} sont lisses.

La famille $\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex}}^{\pi_i}\,\Xi$ est décrite en (A3.1) et (A3.2). Elle est réunion:

- des courbes irréductibles T_i^+ et $T_i^- = \sigma T_i^+$, isomorphes à $\tilde{N}_i$. Leur classe de cohomologie est $2.[\Xi]^6/6!$.
- des 4 composantes irréductibles de la courbe $\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex},G_{ij}}^{\pi_i}\,\Xi$ décrites en (A3.3), qui seront notées $A_{ij}^+, A_{ij}^- = \sigma A_{ij}^+, B_{ij}^+$ et $B_{ij}^- = \sigma B_{ij}^+$. Elles sont toutes de classe $2.[\Xi]^6/6!$. De plus, si on note:

$$\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$$
$$A_{ij} = A_{ij}^+ \cup A_{ij}^- \quad \text{et} \quad B_{ij} = B_{ij}^+ \cup B_{ij}^-,$$

on a (A3.8, A2.2.(i)):

$$B_{ij} \cup B_{ik} = \mathrm{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_i}\,\Xi, \tag{4.1}$$
$$A_{ij} \subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_i}\,\Xi, \tag{4.2}$$
$$A_{ij} \cup B_{ij} \subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_j}\,\Xi. \tag{4.3}$$

(4.4) En particulier, les courbes $B_{ij}^{\pm}$ sont des composantes de $\mathrm{Sing}\,\Xi$ et B_{ij} et B_{ki} n'ont pas de composante commune.

Il résulte de la Proposition (3.4) et d'un argument de dégénérescence que la courbe N_{ij} est la normalisée d'une courbe C_{ij} située sur un cône quadratique. Plus précisément, si on note L_{ij} le g_4^1 sur N_{ij} fourni par la transformation tétragonale, on a $h^0(N_{ij}, 2L_{ij}) = 4$, de sorte que (A2.1):

$$U_{ij} = \mathrm{Sing}_{\mathrm{ex},L_{ij}}^{\pi_{ij}}\,\Xi$$

est une surface irréductible.

LEMME (4.5). *Les surfaces U_{ij} sont toutes égales à une surface qu'on notera U.*

La Proposition (A2.2.(i)) donne:

$$\begin{aligned}\operatorname{Sing}\Xi &= U_{12} \cup \operatorname{Sing}^{\pi_1}_{\mathrm{ex,ns}}\Xi \cup \operatorname{Sing}^{\pi_2}_{\mathrm{ex,ns}}\Xi,\\ &= U_{12} \cup B_{12} \cup B_{13} \cup B_{21} \cup B_{23},\end{aligned}$$

ce qui montre que $\operatorname{Sing}\Xi$ contient une seule surface. □

LEMME (4.7). *Pour* $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, *on a* $B_{ij} = B_{kj}$. *On notera* B_j *cette courbe.*

On commence par montrer:

(4.8) La seule surface contenue dans $\{a \in P \mid (B_{ij} \cup U) \subset \Xi_a\}$ est $\sum(\tilde{N}_j)$.

Les inclusions (4.2) et (4.3) et la Proposition (A2.2.(i)) donnent:

$$A_{ij} \subset \operatorname{Sing}^{\pi_i}_{\mathrm{st}}\Xi \cap \operatorname{Sing}^{\pi_j}_{\mathrm{st}}\Xi = U_{ij} = U.$$

La Proposition (A2.2.(ii)) donne d'autre part:

$$\{a \in P \mid (B_{ij} \cup A_{ij}) \subset \Xi_a\} = \sum(\tilde{N}_j) \cup \sum(\tilde{N}_{ij}).$$

Or la surface $U = U_{ij}$ ne consiste pas en des singularités stables pour π_{ij} (sinon on aurait, par A2.2.(i), $U \subset \operatorname{Sing}^{\pi_i}_{\mathrm{ex},G_{ij}}\Xi$), de sorte que:

$$\{a \in P \mid (B_{ij} \cup U) \subset \Xi_a\} \not\supset \sum(\tilde{N}_{ij}),$$

ce qui prouve (4.8).

D'autre part, il ressort de [D1] Théorème (4.1) que les surfaces $\sum(\tilde{N}_j)$ et $\sum(\tilde{N}_k)$ sont distinctes. On déduit alors de (4.8) que:

$$(B_{ij} \cup U) \not\subset \operatorname{Sing}^{\pi_k}_{\mathrm{st}}\Xi.$$

Comme $\operatorname{Sing}^{\pi_k}_{\mathrm{ex}}\Xi$ ne contient pas de surface, on a en fait $U \subset \operatorname{Sing}^{\pi_k}_{\mathrm{st}}\Xi$, de sorte que:

$$B_{ij} \subset \operatorname{Sing}^{\pi_k}_{\mathrm{ex},ns}\Xi.$$

On conclut avec (4.1) et (4.4). □

On remarque alors qu'il résulte de (A3.3) qu'on a:

$$\text{soit } B^+_{ij} \simeq \tilde{N}_k \quad \text{et} \quad A^+_{ij} \simeq \tilde{N}_{ik},$$
$$\text{soit } B^+_{ij} \simeq \tilde{N}_{ik} \quad \text{et} \quad A^+_{ij} \simeq \tilde{N}_k.$$

(4.9) Il résulte du lemme précédent que c'est la deuxième éventualité qui a lieu. La structure du lieu singulier de Ξ est alors bien déterminée par (4.6), (4.7) et (4.4).

THÉORÈME (4.10). *Soit (JX, Ξ) la jacobienne intermédiaire d'un solide double ordinaire avec trois points singuliers. Alors le lieu singulier de Ξ a 7 composantes irréductibles: une surface et 6 courbes.*

REMARQUES (4.11). (1) Une partie des conclusions du théorème subsiste lorsqu'on ne suppose plus X ordinaire. En particulier, $\operatorname{Sing}\Xi$ reste de dimension 2 et $U = \operatorname{Sing}^{\pi_{12}}_{\mathrm{ex},L_{12}}\Xi$ reste sa seule composante irréductible de cette dimension.

(2) La classe de cohomologie de U est $2.[\Xi]^5/5!$ (A2.1).

(3) La répartition en singularités stables et exceptionnelles est la suivante (ST signifie "stable" et EX, "exceptionnelle, génériquement non stable"):

	$B_1 \simeq \tilde{N}_{23}$	$B_2 \simeq \tilde{N}_{13}$	$B_3 \simeq \tilde{N}_{12}$	U
π_1	ST	EX	EX	ST
π_2	EX	ST	EX	ST
π_3	EX	EX	ST	ST
π_{12}	ST	ST	EX	EX
π_{23}	EX	ST	ST	EX
π_{13}	ST	EX	ST	EX

(4) Les famillies A_{ij} et A_{ji} coïncident et sont isomorphes à deux copies opposées de $\tilde{N}_k$. On a:

$$A_{ij} \subset U$$

$$\operatorname{Sing}^{\pi_{ij}}_{\mathrm{st}}\Xi = B_j \cup B_i \cup A_{ij},$$

qui est de codimension pure 6. La multiplicité du schéma $\operatorname{Sing}^{\pi_{ij}}_{\mathrm{st}}\Xi$ le long de A_{ij} est deux. La classe de $\operatorname{Sing}^{\pi_{ij}}_{\mathrm{st}}\Xi$ est $2^4.[\Xi]^6/6!$ (c'est la classe "générique").

5. Solides doubles avec quatre points singuliers: singularités du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire.

Soit X un solide double avec quatre points doubles ordinaires p_1, p_2, p_3 et p_4. Il existe sur X dix structures de fibré en coniques ((2.1), (2.4)), qui induisent des isomorphismes entre JX et les variétés de Prym de dix revêtements admissibles de courbes de genre 7:

$$\pi_i\colon \tilde{N}_i \to N_i \quad \text{pour} \quad i = 1,2,3,4$$
$$\pi_{ij}\colon \tilde{N}_{ij} \to N_{ij} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 4.$$

La courbe N_i est la normalisée en trois points d'une sextique plane stable C_i (qui sont, avec les notations de 2.1, les points $\pi_i'(p_j)$ pour $j \neq i$). La projection depuis $\pi_i'(p_j)$ induit un g_4^1 sur N_i qui sera noté G_{ij}.

On suppose X *ordinaire*, de sorte que les courbes N_i et N_{ij} sont lisses.

Il résulte alors de la proposition A3.1 que la famille $\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex}}^{\pi_i}\,\Xi$ est finie, réunion des familles $\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex},G_{ij}}^{\pi_i}\,\Xi$ pour $j \neq i$. Les Propositions (A3.8) et (A2.2.(i)) donnent aussi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex},G_{ij}}^{\pi_i}\,\Xi &= A_{ij}^+ \cup A_{ij}^- \cup B_{ij}^+ \cup B_{ij}^-,\\
A_{ij}^+ &= \{a_{ij}, a_{ij}^*\} \quad A_{ij}^- = \sigma A_{ij}^+\\
B_{ij}^+ &= \{b_{ij}, b_{ij}^*\} \quad B_{ij}^- = \sigma B_{ij}^+\\
B_{ij} &= B_{ij}^+ \cup B_{ij}^- \subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_i}\,\Xi && (5.1)\\
A_{ij} &= A_{ij}^+ \cup A_{ij}^- \subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_i}\,\Xi && (5.2)\\
A_{ij} \cup B_{ij} &\subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_j}\,\Xi. && (5.3)
\end{aligned}$$

En particulier, les points de B_{ij} sont des *composantes* de $\mathrm{Sing}\,\Xi$.

Comme dans le chapitre précédent, la courbe N_{ij} est munie d'un g_4^1, qu'on notera L_{ij} et qui vérifie $h^0(N_{ij}, 2L_{ij}) = 4$, de sorte que:

$$U_{ij} = \mathrm{Sing}_{\mathrm{ex},L_{ij}}^{\pi_{ij}}\,\Xi$$

est une courbe, irréductible dans la situation générique (A2.1).

Comme dans le Lemme (4.5), la Proposition (A2.2) montre que les courbes U_{ij} sont toutes égales à une courbe qu'on notera U et qui est la seule courbe contenue dans $\mathrm{Sing}\,\Xi$.

LEMME (5.4). *Pour tous $i,j,k \in \{1,\ldots,4\}$ avec $i \neq k$* et *$j \neq k$, on a $B_{ik} = B_{jk}$. On notera B_k cet ensemble de 4 points.*

On commence par montrer:

(5.5) La seule surface contenue dans $\{a \in P \mid (\{b_{ij}, -b_{ij}\} \cup U) \subset \Xi_a\}$ est $\Sigma(\tilde{N}_j)$.

Les inclusions (5.2) et (5.3) et la Proposition (A2.2.(i)) donnent:

$$A_{ij} \subset \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_i}\,\Xi \cap \mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_j}\,\Xi = U_{ij} = U.$$

Soit a un élément de P vérifiant:

$$(\{b_{ij}, -b_{ij}\} \cup A_{ij}) \subset \Xi_a.$$

Si de plus $B_{ij} \subset \Xi_a$, la Proposition (A2.2.(ii)) montre que $a \in \sum(\tilde{N}_j) \cup \sum(\tilde{N}_{ij})$. Si par contre $b_{ij}^* \notin \Xi_a$, on déduit du Lemme (A3.9) que:

$$(-b_{ij}^* - a) \in \operatorname{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_i} \Xi.$$

Comme $\operatorname{Sing} \Xi$ est de dimension 1 ([M1]), on en déduit que les seules surfaces contenues dans $\{a \in P \mid (\{b_{ij}, -b_{ij}\} \cup A_{ij}) \subset \Xi_a\}$ sont $\sum(\tilde{N}_j)$ et $\sum(\tilde{N}_{ij})$. Comme la courbe $U = U_{ij}$ n'est pas formée de singularités stables pour π_{ij}, la surface $\sum(\tilde{N}_{ij})$ n'est pas contenue dans $\{a \in P \mid U \subset \Xi_a\}$, ce qui prouve (5.5).

On prendra $i = 1, j = 3, k = 2$. Comme $\operatorname{Sing}_{\mathrm{ex}}^{\pi_3} \Xi$ est de dimension 0, on a $U \subset \operatorname{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_3} \Xi$. On déduit alors de (5.5) que:

$$\{b_{12}, -b_{12}\} \subset \operatorname{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_3} \Xi.$$

En procédant de façon analogue avec b_{12}^*, b_{14} et b_{14}^*, on en déduit:

$$(B_{12} \cup B_{14}) \subset \operatorname{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_3} \Xi = B_{31} \cup B_{32} \cup B_{34}. \tag{5.6}$$

On a alors ((5.1), (5.3) et (5.6)):

$$\begin{aligned}
B_{12} &\subset \operatorname{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_1} \Xi \cap \operatorname{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_3} \Xi \cap \operatorname{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_4} \Xi,\\
B_{31} &\subset \operatorname{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_1} \Xi,\\
B_{34} &\subset \operatorname{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi_4} \Xi.
\end{aligned}$$

Il résulte alors de l'inclusion (5.6) qu'on a $B_{12} = B_{32}$, d'où le lemme. □

La structure du lieu singulier de Ξ se détermine alors facilement. La Proposition (A2.2.(i)) donne:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sing} \Xi &= U \cup \operatorname{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_1} \Xi \cup \operatorname{Sing}_{\mathrm{ex,ns}}^{\pi_2} \Xi\\
&= U \cup B_{12} \cup B_{13} \cup B_{14} \cup B_{21} \cup B_{23} \cup B_{24}\\
&= U \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_1.
\end{aligned}$$

On a montré:

THÉORÈME (5.7). *Soit (JX, Ξ) la jacobienne intermédiaire d'un solide double générique avec quatre points singuliers. Alors le lieu singulier de Ξ est réunion d'une courbe irréductible et de* 16 *points isolés.*

REMARQUES (5.8). (1) Une partie des conclusions du théorème subsiste lorsqu'on ne suppose plus X générique. En particulier, Sing Ξ reste de dimension 1 et $U = \mathrm{Sing}^{\pi_{12}}_{\mathrm{ex},L_{12}}\,\Xi$ est toujours la réunion des courbes contenues dans Sing Ξ, mais peut devenir réductible (même pour X ordinaire).

(2) La classe de cohomologie de U est $2.[\Xi]^5/5!$ (A2.1).

(3) La répartition en singularités stables et exceptionnelles est la suivante:

$$\mathrm{Sing}^{\pi_i}_{\mathrm{ex,ns}}\Xi = \bigcup_{j\neq i} B_j,$$

$$\mathrm{Sing}^{\pi_i}_{\mathrm{st}}\Xi = B_i \cup U$$

$$\mathrm{Sing}^{\pi_{ij}}_{\mathrm{ex,ns}}\Xi = \bigcup_{k\neq i,j} B_k \cup U,$$

$$\mathrm{Sing}^{\pi_{ij}}_{\mathrm{st}}\Xi = B_i \cup B_j \cup A_{ij}.$$

On a de plus $A_{ij} = A_{ji}$. La multiplicité du schéma $\mathrm{Sing}^{\pi_{ij}}_{\mathrm{st}}\,\Xi$ en les points de A_{ij} est deux et sa classe de cohomologie est $2^4.[\Xi]^6/6!$ (c'est la classe "générique").

(3) La courbe N_{ij} est la normalisée d'une sextique plane avec un cusp d'ordre 4 et un point double ordinaire. Le système linéaire des droites passant par le cusp est $|L_{ij}|$ mais on n'a pas identifié le g^1_4 induit par les droites passant par l'autre point double. Une des transformées tétragonales de π_{ij} pour ce g^1_4 est le revêtement $\pi\colon U \to U_0 = U/\{\pm 1\}$. Or il est facile de vérifier qu'une courbe lisse non bielliptique de genre 7 a au plus trois g^1_4 distincts sans point base. S'il y en a trois, cette courbe est la normalisée d'une sextique plane. Dans notre situation, la courbe U_0 est munie de six g^1_4 (provenent de chacun des revêtements π_{ij}). Il en résulte qu'on a dans le cas générique:

- U_0 est la normalisée d'une sextique plane stable C_0.
- Les trois triplets de revêtements doubles associés aux g^1_4 de U_0 sont $(\pi, \pi_{12}, \pi_{34}), (\pi, \pi_{13}, \pi_{24}), (\pi, \pi_{14}, \pi_{23})$. Cela entraîne par ailleurs les égalités $A_{ij} = A_{kl}$ pour i, j, k, l distincts deux à deux.
- Les trois points doubles de C_0 sont alignés et:

$$\mathrm{Sing}^{\pi}_{\mathrm{st}}\,\Xi = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4,$$

$$\mathrm{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex,ns}}\,\Xi = U.$$

Il serait intéressant de donner une interprétation géométrique du revêtement π.

6. Solides doubles avec cinq points singuliers: singularités du diviseur thêta de la jacobienne intemédiaire.

Soit X un solide double avec cinq points doubles ordinaires $p_1, \ldots, p_5$. Les structures de fibré en coniques décrites au Chapitre 2 induisent des isomorphismes entre JX et les variétés de Prym de 15 revêtements admissibles de courbes de genre 6:

$$\begin{aligned} \pi_i &: \tilde{N}_i \to N_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, 5, \\ \pi_{ij} &: \tilde{N}_{ij} \to N_{ij} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 5. \end{aligned}$$

Par action d'automorphismes birationnels de $\mathbb{P}^3$, on peut définir ([C], [$D - S$]) six autres structures de fibrés en coniques, associées à des revêtements $\pi_0, \pi_{01}, \ldots, \pi_{05}$.

Il est facile d'étendre les résultats de la Proposition (A3.1) au cas des sextiques planes stables avec 4 points doubles en position générale et de montrer:

$$\mathrm{Sing}_{\mathrm{ex}}^{\pi_i} \Xi = \emptyset \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, 5.$$

D'autre part, la courbe N_{ij} admet un g_4^1 qu'on notera L_{ij} et qui vérifie:

$$h^0(N_{ij}, 2L_{ij}) = 4,$$

soit par Riemann-Roch:

$$h^0(N_{ij}, K_{N_{ij}} - 2L_{ij}) = 1.$$

On en déduit immédiatement:

$$\exists b \in \Xi \quad \mathrm{Sing}_{\mathrm{ex}, L_{ij}}^{\pi_{ij}} \Xi = \{b, -b\}.$$

La Proposition (A2.2) permet alors d'en déduire:

THÉORÈME (6.1). *Soit* (JX, Ξ) *la jacobienne intermédiaire d'un solide double générique avec cinq points singuliers. Alors* Ξ *a exactement deux points singuliers opposés.*

REMARQUES (6.2). (1) Ces deux points sont stables pour les revêtements π_i, exceptionnels pour π_{ij}.

(2) La famille $\mathscr{D}$ des jacobiennes intermédiaires des solides doubles avec 5 points singuliers est de dimension 14 dans l'espace des modules $\mathscr{A}_5$ des variétés

abéliennes principalement polarisées de dimension 5. C'est donc une composante du diviseur $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{A}_5$ correspondant aux variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier. On retrouve ainsi un résultat de [S–V] sur la structure du lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{D}$. Rappelons que le résultat principal de [S–V] est que $\mathcal{N}_0$ a exactement deux composantes irréductibles.

7. Solides doubles avec un point singulier: singularités du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire.

Les descriptions du lieu singulier du diviseur thêta que nous avons données dans les chapitres précédents ont toutes un point commun remarquable: la présence d'un composante (unique dans les cas ordinaires) de codimension 5. C'est cette propriété qu'on étend ici au cas des solides doubles génériques avec un point singulier, en étudiant le comportement des singularités du diviseur thêta dans une dégénérescence du type Lefschetz.

THÉORÈME (7.1). *Soit (JX, Ξ) la jacobienne intermédiaire d'un solide double X avec un point singulier. Alors le lieu singulier de Ξ est de codimension 5 dans JX et, si X est générique, a une seule composante de cette codimension, qu'on notera U.*

REMARQUES (7.2). (1) Un calcul analogue à celui de [D2] Théorème (1.1) permet de déduire de 3.6.2 que la classe de cohomologie de U est $2[\Xi]^5/5!$.

(2) Le cône tangent à Ξ en un point générique de U est une quadrique de rang 5.

La jacobienne JX est isomorphe à la variété de Prym d'un revêtement admissible d'une sextique plane stable C. Par [B2], $\operatorname{Sing}\Xi$ est donc de codimension au moins 5 dans JX. Pour X générique, la courbe C est lisse. Si la famille irréductible T de singularités stables et exceptionnelles décrite en (A3.1.(ii)) est une composante de $\operatorname{Sing}\Xi$, elle est alors non réduite (A1.1) donc de classe $12n.[\Xi]^6/6!$ avec $n \geqslant 2$ (A3.4): cela contredit le Lemme A1.2. Elle est donc contenue dans une composante U de $\operatorname{Sing}_{st}\Xi$, de codimension 5.

Pour prouver l'unicité générique, nous allons utiliser une dégénérescence $X \to \Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$ du type Lefschetz sur un solide double X_0 générique avec deux points singuliers.

Il existe alors un espace analytique $J \to \Delta$ vérifiant:

- pour $t \neq 0$, la fibre J_t est isomorphe à la jacobienne intermédiaire de X_t.
- si $\tilde{X}_0$ est la désingularisation minimale de X_0, il existe une extension:

$$1 \to \mathbb{C}^* \to J_0 \xrightarrow{p} J\tilde{X}_0 \to 0.$$

Notons que le groupe J_0 ne dépend que de X_0, pas de la famille $X \to \Delta$. Cette extension correspond à un élément a_0 de $J\tilde{X}_0$. On note aussi $\tilde{\Xi}_0$ un diviseur thêta symétrique de $J\tilde{X}_0$.

Les singularités des diviseurs thêta s'organisent en un sous-schéma $\mathscr{S}$ de J (défini dans [M2], où il est noté $\mathrm{Sing}_{\mathrm{vert}}\,\Xi$). Si on note V une composante de codimension 5 de $\mathscr{S}$ qui domine Δ, on a expliqué dans [D3] page 245 que:

(i) soit V_0 est l'image inverse par p d'une sous-variété de $(\mathrm{Sing}\,\tilde{\Xi}_0 \,.\, \mathrm{Sing}\,\tilde{\Xi}_{0,a_0})$. Celle-ci est alors de codimension 5 dans $J\tilde{X}_0$, donc c'est la composante $\tilde{U}_0$ de dimension maximale de $\mathrm{Sing}\,\tilde{\Xi}_0$ et celle-ci est stable par translation par a_0.

(ii) soit p induit un morphisme de V_0 dans $\mathrm{Sing}(\tilde{\Xi}_0 \,.\, \tilde{\Xi}_{0,a_0})$, birationnel sur son image (qui est de codimension 4 dans $J\tilde{X}_0$).

D'autre part, il ressort du Theorem (5.67) de [C] que l'adhérence de la famille des jacobiennes intermédiaires des solides doubles avec s points doubles contient, pour $s \leqslant 6$, celle des jacobiennes des normalisées des courbes de $\mathbb{P}^3$ intersections complètes de type (2, 4) avec s points doubles. On en déduit qu'on peut supposer ici $J\tilde{X}_0$ simple et a_0 d'ordre infini.

Ceci exclut aussitôt le cas (i).

On est donc dans le cas (ii). Complétons J_0 en un fibré projectif J_0^* en lui ajoutant deux diviseurs M_0 et M_∞ identifiés à $J\tilde{X}_0$. La proposition (2.1) de [B-D] montre alors que l'adhérence schématique V_0^* de V_0 dans J_0^* recontre M_0 le long de $\tilde{U}_0$.

(7.3) Il nous suffit donc de montrer que l'adhérence $\mathscr{S}_0^*$ de la fibre $\mathscr{S}_0$ est réduite en un point générique de $\tilde{U}_0 \subset M_0$.

Comme dans [D2], on utilise alors les équations locales de $\mathscr{S}_0^*$ données dans [M2] pour montrer que, pour tout point z_0 de $\mathscr{S}_0^* \cap M_0 \simeq \mathrm{Sing}\,\tilde{\Xi}_0$ correspondant à un point de multiplicité 2 sur $\tilde{\Xi}_0$, on a:

$$\mathrm{Codim}\, T_{z_0}\mathscr{S}_0^* \geqslant \text{Rang du cône tangent à } \tilde{\Xi}_0 \text{ en } z_0.$$

On utilise alors:

LEMME (7.4). ([K]). *Soit* (P, Ξ) *une variété de Prym et* z *un point de* Ξ *correspondant à une singularité de multiplicité* 2, *stable non exceptionnelle. Alors le rang du cône tangent à* Ξ *en* z *est* $\geqslant 5$.

Un point générique de la composante $\tilde{U}_0$ de $\mathrm{Sing}\,\tilde{\Xi}_0$ correspond à une singularité de multiplicité 2, stable et non exceptionnelle (Remarque (3.6.1)), de sorte que l'espace tangent à $\mathscr{S}_0^*$ en un point générique de $\tilde{U}_0 \subset M_0$ est de codimension $\geqslant 5$. La sous-variété $\mathscr{S}_0^*$ de $\mathscr{J}_0^*$ étant de codimension 5, on a montré (7.3).

Pour finir, remarquons qu'il ressort de la démonstration ci-dessus que le rang du cône tangent à $\mathscr{S}_t$ en un point générique de V_t est 5 pour $t = 0$. C'est encore vrai pour t petit, ce qui montre la deuxième partie de la remarque. □

8. Solides doubles lisses: singularités du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire

Les techniques utilisées dans le chapitre précédent nous permettent de faire maintenant le lien avec les résultats de Voisin qui construit dans [V], dans la jacobienne (JX, Ξ) d'un solide double lisse X, une composante de $\operatorname{Sing}\Xi$ de codimension 5. On obtient l'amélioration suivante:

THÉORÈME (8.1). *Soit (JX, Ξ) la jacobienne intemédiaire d'un solide double lisse générique X. Alors le lieu singulier de Ξ est de codimension 5 dans JX et a une seule composante de cette codimension.*

REMARQUE (8.2). La classe de cohomologie de cette composante est $2[\Xi]^5/5!$ (cf. Remarque (7.2.1)).

La démonstration du Théorème (7.1) s'applique sans modification à une dégénérescence du type Lefschetz sur un solide double générique avec un point singulier (utiliser la Remarque (7.2.2)). □

9. Le problème de Torelli.

Les résultats de [V] et le Théorème 8.1 permettent de donner une solution élégante au problème de Torelli pour les solides doubles lisses génériques. Soient F une quartique lisse dans $\mathbb{P}^3$, X le solide double associé et (JX, Ξ) sa jacobienne intermédiaire. Soit $\Psi: \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2))^* \simeq \mathbb{P}^9$ le morphisme de Veronese. Il existe un isomorphisme naturel $T_0JX \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2))^*$ via lequel on peut considérer les cônes tangents à Ξ en des points doubles comme des quadriques dans $\mathbb{P}^9$. Voisin montre alors, en notant comme d'habitude U la composante de codimension 5 de $\operatorname{Sing}\Xi$ construite dans [V]:

(9.1) L'intersection des cônes tangents à Ξ en les points de U de multiplicité 2 est la surface $\Psi(F)$.

Pour un solide double lisse générique, U est la seule composante de codimension 5 de $\operatorname{Sing}\Xi$. Ceci entraîne:

THÉORÈME (9.2). *Soient X et X' deux solides doubles lisses. On suppose que leurs jacobiennes intermédiaires sont isomorphes et que X est générique. Alors X et X' sont projectivement isomorphes.*

Pour pouvoir employer la même méthode avec les solides doubles non lisses, il faut étendre certains des résultats de [V] aux cas singuliers.

Rappelons les points essentiels de [V]. Soit F_1 une quartique lisse de $\mathbb{P}^3$ et X_1 le solide double associé. On note $\mathscr{C}_1$ la famille des intersections complètes E de deux quadriques de $\mathbb{P}^3$ qui se scindent dans X_1 en deux composantes isomorphes à E.

(9.3) L'image de l'application d'Abel-Jacobi $\Phi_1 : \mathscr{C}_1 \to JX_1$ est la composante U_1 de dimension maximale du lieu singulier du diviseur thêta de JX_1.

Soit maintenant F_0 une quartique de $\mathbb{P}^3$ avec un unique point double ordinaire p. On considère une famille quelconque $F \to \Delta$ de quartiques de $\mathbb{P}^3$ dont la fibre centrale est F_0 et dont les autres fibres sont lisses. On lui associe la famille correspondante $X \to \Delta$ et on prend les notations de la démonstration du Théorème (7.1). En ajoutant un diviseur M isomorphe à $J\tilde{X}_0$, on peut compactifier J_0 en une variété non normale $\bar{J}_0$ de façon à obtenir une famille propre $\bar{J} \to \Delta$ ([M2]).

Pour chaque $t \in \Delta$, soit $\mathscr{C}_t$ la variété définie ci-dessus. Elles définissent une famille $\mathscr{C} \to \Delta$ et il existe une application d'Abel-Jacobi:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \Phi : \mathscr{C} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bar{J} \arrow[dl] \\ & \Delta & \end{tikzcd}$$

Toujours avec les notations de la démonstration de (7.1), on remarque qu'il ressort de (9.3) que:

$$\Phi_0(\mathscr{C}_0) = U_0. \tag{9.4}$$

On désigne par $\mathscr{C}_{0,p}$ la sous-famille de $\mathscr{C}_0$ constituée des courbes passant par le point singulier p de F_0. La Proposition (4.58) de [Z] montre alors que:

$$\Phi_0(\mathscr{C}_0 - \mathscr{C}_{0,p}) \subset J_0.$$

On en déduit:

$$\Phi_0^{-1}(M) \subset \mathscr{C}_{0,p}.$$

Comme $\Phi_0^{-1}(M)$ est non vide (9.4) et que $2M$ est un diviseur de Cartier sur $\bar{J}_0, \Phi_0^{-1}(M)$ est un diviseur de $\mathscr{C}_0$. L'irréductibilité de $\mathscr{C}_{0,p}$ entraîne alors:

$$\Phi_0^{-1}(M) = \mathscr{C}_{0,p} \quad \text{et} \quad \Phi_0(\mathscr{C}_{0,p}) = M \cap U_0.$$

Rappelons à ce propos que, via l'isomorphisme $M \simeq J\tilde{X}_0$, l'intersection $M \cap U_0$ s'identifie à la composante de dimension maximale $\tilde{U}_0$ du lieu singulier du diviseur thêta $\tilde{\Xi}_0$ de $J\tilde{X}_0$.

(9.5) Soit maintenant $E = Q_1 \cdot Q_2$ un élément de $\mathscr{C}_{0,p}$. Si E est lisse, on montre comme dans [V] qu'il existe des quadriques P_1, P_2 et Q passant toutes trois par p telles que $Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$ soit une équation de F_0.

Réciproquement, toute écriture de ce type de l'équation de F_0 définit un élément de $\mathscr{C}_{0,p}$.

On considère maintenant une déformation générique à un paramètre de F_0 du type:

$$F_t = Q_t^2 + P_{1,t}Q_{1,t} + P_{2,t}Q_{2,t},$$

avec $Q_0 = Q, P_{1,0} = P_1, P_{2,0} = P_2, Q_{1,0} = Q_1, Q_{2,0} = Q_2$.

La quartique F_t est lisse pour t non nul et, pour tout t, la courbe $Q_{1,t}.Q_{2,t}$ définit un point z_t de $\mathscr{C}_t$. Il ressort de ce qui précède que:

$$\begin{aligned} \forall t \in \Delta \quad & \Phi(z_t) \in U_t \\ & \Phi(z_0) \in U_0 \cap M. \end{aligned}$$

Il est montré dans [V] que via l'isomorphisme canonique $T_0^* JX_t \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2))$, le cône tangent CT_t à Ξ_t en le point singulier $\Phi(z_t)$ s'écrit:

$$Q_t . Q_t + P_{1,t} . Q_{1,t} + P_{2,t} . Q_{2,t} \in S^2 T^*_{\Phi(z_t)} JX_t$$

Pour étendre cette description au cas des solides doubles avec un point singulier, nous allons utiliser des résultats de [M2].

Il existe une famille propre $\bar{G} \to \Delta$, avec $\bar{G}$ lisse, et un diagramme cartésien:

$$\begin{array}{ccc} f: \bar{J} & \to & \bar{G} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta & \to & \Delta \\ t & \mapsto & t^s. \end{array}$$

Il existe des coordonnées locales $(x_1, x_1', x_2, \ldots, x_{10})$ sur $\bar{G}$ nulles en $f\Phi(z_0)$ telles que:

$$p(x_1, x_1', x_2, \ldots, x_{10}) = x_1 x_1'.$$

Sur $\bar{J}$, on a la relation:

$$x_1 . x_1' = t^s$$

entre les fonctions $(t, x_1, x_1', x_2, \ldots, x_{10})$. On peut supposer que:

$$\Phi(z_t) = (t, t^p, t^q, 0, \ldots, 0),$$

où p et q sont des entiers strictement positifs vérifiant $p + q = s$. Remarquons que cela entraîne que la variété $\bar{J}$ est singulière le long de M.

Mumford définit un faisceau T_{vert} localement libre de rang 10 sur $\bar{G}$ par la suite exacte:

$$0 \to T_{\text{vert}} \to T\bar{G} \to p^* T\Delta.$$

Il est alors facile, en utilisant les générateurs de T_{vert} donnés dans [M2], de voir qu'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} T^*\bar{G}|_M \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha"'] & T^*_{\text{vert}}|_M \\ & T^*M, \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

où α est surjective et β injective. On a:

$$\forall t \neq 0 \quad CT_t \in S^2 T^*_{\text{vert},\Phi(z_t)}$$

Un calcul en coordonnées locales montre alors que la limite des CT_t quand t tend vers 0 existe dans $S^2 T^*_{\text{vert},\Phi(z_0)}$ et qu'elle est égale à l'image par $S^2\beta$ du cône *tangent à* $\tilde{\Xi}_0 \simeq M$ en le point singulier $\Phi(z_0)$, si celui-ci est de multiplicité 2 sur $\tilde{\Xi}_0$.

On a donc montré qu'à toute écriture de l'équation de F_0 de la forme:

$$F_0 = Q^2 + P_1 Q_1 + P_2 Q_2, \tag{9.6}$$

où Q, P_1, P_2, Q_1 et Q_2 sont des quadriques passant par p, on peut associer un point (non unique) de $\tilde{U}_0$ et que le cône tangent à $\tilde{\Xi}_0$ en ce point est l'élément:

$$Q \cdot Q + P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2$$

de $S^2 H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{I}_p)$ (via l'isomorphisme $T_0^* J\tilde{X}_0 \simeq H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{I}_p)$).

Comme dans [V], on peut interpréter cela géométriquement de la façon suivante. Le système linéaire des quadriques passant par p induit une application rationnelle:

$$\Psi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{I}_p)^* \simeq \mathbb{P}T_0 J\tilde{X}_0 \simeq \mathbb{P}^8.$$

Chaque écriture du type (9.6) correspond à une quadrique de $\mathbb{P}^8$ de rang au plus

5 qui contient la surface $\Psi(F_0)$. On vérifie facilement que l'intersection de ces quadriques est la surface $\Psi(F_0)$. On en déduit:

(9.7) L'intersection des cônes tangents à $\tilde{\Xi}_0$ en les points de $\tilde{U}_0$ de multiplicité deux est la surface $\Psi(F_0)$.

Cette propriété entraîne le théorème de Torelli pour les solides doubles avec un point singulier pour lesquels on peut identifier a priori la composante U. En particulier, on a:

THÉORÈME (9.8). *Soient X et X' deux solides doubles avec un point singulier. On suppose que leurs jacobiennes intermédiaires sont isomorphes et que X est générique. Alors X et X' sont projectivement isomorphes.*

La démonstration de ce théorème s'applique sans modification à toute famille de solides doubles génériques avec $(s-1)$ points doubles dégénérant sur un solide double quelconque avec s points doubles, sous réserve que:

- La correspondance (9.5) entre éléments de $\mathscr{C}$ passant par le lieu singulier S de la quartique de ramification F et écritures $F = Q^2 + P_1Q_1 + P_2Q_2$, où P_1, Q_1, P_2, Q_2 et Q sont des quadriques passant par S, reste valable. Cela nécessite que trois points quelconques de S ne soient pas alignés.
- La surface $\Psi(F)$ soit intersection de quadriques de rang 5. Cela nécessite $s \leqslant 4$ et de nouveau que trois points quelconques de S ne soient pas alignés.
- La variété U soit la réunion des composantes de codimension 5 de Sing Ξ. Cela est toujours vrai pour $s \leqslant 4$ (Remarques (3.6.1), (4.11.1) et (5.8.1)). On en déduit:

THÉORÈME (9.9). *Soient X et X' deux solides doubles avec 2, 3 ou 4 points singuliers. On suppose que leurs jacobiennes intermédiaires sont isomorphes et que trois quelconques des points singuliers de X ne sont pas alignés. Alors X et X' sont projectivement isomorphes.*

REMARQUES (9.10). (1) Si on suppose de plus X ordinaire, on peut montrer que tout isomorphisme entre les jacobiennes de X' et de X est induit par un isomorphisme entre X et X'.

(2) Le problème de Torelli pour les solides doubles avec 5 points singuliers est discuté dans [C] pages 224–227 et dans [D-S] Chap. V Section 4. Mentionnons simplement le fait que l'analogue du Théorème (9.9) n'est pas vérifié tel quel mais qu'on peut en montrer une version convenablement modifiée. Rappelons que le théorème de Torelli n'est pas vérifié pour les solides doubles avec 6 points singuliers, pour des raisons de dimension d'espaces de modules ([C]).

Appendice

Nous avons regroupé dans cet appendice quelque résultats techniques concernant les singularités du diviseur thêta de certaines variétés de Prym.

A1. Singularités stables dans les variétés de Prym.

Soient (P, Ξ) la variété de Prym d'un revêtement double étale $\pi\colon \tilde{N} \to N$ de courbes lisses, g le genre de N et $p = g - 1$ la dimension de P. On rappelle qu'il existe sur $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi} \Xi$ une structure de schéma naturelle, pour laquelle il est facile de calculer l'espace tangent de Zariski en un point ([M1]). On utilisera uniquement le résultat élémentaire suivant:

(A1.1) En un point singulier de Ξ correspondant à une singularité *stable et exceptionnelle*, l'espace tangent de Zariski à $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi} \Xi$ est de dimension $\geqslant p - 5$.

D'autre part, lorsque la courbe N est générique de genre $g \geqslant 7$, la structure du schéma $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi} \Xi$ est maintenant bien comprise ([D2]). On sait qu'il est non vide réduit de dimension $p - 6$, irréductible pour $p \geqslant 7$ et que sa classe de cohomologie est $2^4 . [\Xi]^6/6!$. Cela va nous permettre de démontrer le résultat suivant:

LEMME (A1.2). *Soient (P, Ξ) la variété de Prym associée à un revêtement admissible $\pi\colon \tilde{N} \to N$ de courbes stables et p sa dimension. On suppose que* $\mathrm{Sing}\, \Xi$ *est de dimension au plus $p - 5$. Soit V une réunion de composantes irréductibles (réduites ou non) de dimension $p - 6$ du schéma* $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi} \Xi$, *de classe de cohomologie $n . [\Xi]^6/6!$, avec $n \geqslant 2^4$. Alors n est égal à 2^4 et, si $p \geqslant 7$, V est une composante connexe de* $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi} \Xi$.

REMARQUE (A1.3). Lorsque $p \geqslant 10$, il ressort de [F-L] que $\mathrm{Sing}_{\mathrm{st}}^{\pi} \Xi$ est connexe, donc égal ici à V. Il est probable que cette conclusion subsiste dès que $p \geqslant 7$.

Notons Δ le disque unité dans $\mathbb{C}$ et considérons une famille à un paramètre $\Pi\colon \tilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{C} \to \Delta$ de revêtements doubles étales dont la fibre en $0 \in \Delta$ soit isomorphe à π. On note $(\mathscr{P}, \Xi) \to \Delta$ la famille de variétés de Prym associée.

Le sous-ensemble $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}$ formé de la réunion des singularités stables des diviseurs Ξ_t pour $t \in \Delta$ admet une structure de sous-schéma naturelle et est partout de codimension $\leqslant 6$ dans $\mathscr{P}$ ([M3], [D4]). Si la famille considérée est suffisamment générale, la fibre $\mathscr{S}_t$ de $\mathscr{S}$ en $t \neq 0$ est de codimension 6 dans $\mathscr{P}_t$ (irréductible pour $p \geqslant 7$). Comme la fibre $\mathscr{S}_0$ de $\mathscr{S}$ est de dimension au plus $p - 5$, $\mathscr{S}$ est alors de Cohen-Macaulay ([M3], [H], [D4]), de dimension pure $p - 5$. Soit $\mathscr{S}^*$ la réunion des composantes de $\mathscr{S}$ qui dominent Δ ($\mathscr{S}^*$ est irréductible pour $p \geqslant 7$). La classe de cohomologie de la fibre $\mathscr{S}_t^*$ dans $\mathscr{P}_t$ est $2^4[\Xi_t]^6/6!$. Les composantes irréductibles de $\mathscr{S}$ sont celles de $\mathscr{S}^*$ et les composantes éventuelles de $\mathrm{Sing}\, \Xi_0$ de dimension $p - 5$. Il en résulte qu'on a $n = 2^4$ et l'égalité schématique $V = \mathscr{S}_0^*$. Pour $p \geqslant 7$, V est en particulier connexe et il suffit de montrer que $\mathscr{S}^*$ est une composante connexe de $\mathscr{S}$. Si ça n'est pas le cas, le fait que V est une réunion de composantes irréductibles de $\mathscr{S}_0$ entraîne que $\mathscr{S}$ a deux composantes qui se rencontrent selon un lieu de dimension $\leqslant p - 7$. Cela contredit le fait que $\mathscr{S}$, étant de Cohen-Macaulay, est connexe en codimension 1 ([Ha]). $\square$

A2. Singularités exceptionnelles des variétés de Prym associées aux courbes tétragonales.

Soit N une courbe lisse de genre $g \leqslant 7$ admettant un morphisme fini $f\colon N \to \mathbb{P}^1$ de degré 4. On note $G = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$.

A tout revêtement double étable $\pi\colon \tilde{N} \to N$ de variété de Prym (P, Ξ) est associée la famille suivante de singularités exceptionnelles:

$$\begin{aligned}\operatorname{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex},G}\Xi = \{\tilde{L} = \mathcal{O}(\pi^*G + \tilde{M}) \mid \tilde{M} \geqslant 0,\\ h^0(\tilde{N}, \tilde{L}) \text{ pair et } \pi_*\tilde{M} \in |K_N - 2G|\}.\end{aligned}$$

Celle-ci est partout de dimension au moins $p - 6$ (avec $p = \dim P = g - 1$). La démonstration du lemme suivant est laissée au lecteur.

LEMME (A2.1). *On suppose* $\dim \operatorname{Sing}\Xi = \dim \operatorname{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex},G}\Xi = p - 5$. *On a alors* $h^0(N, 2G) = 4$ *et la courbe N est la normalisée d'une courbe de genre* 9 *située sur un cône quadratique. La classe de cohomologie de* $\operatorname{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex},G}\Xi$ *est* $2.[\Xi]^5/5!$. *Cette famille est irréductible pour* $g > 7$. *Pour* $g = 7$, *la famille de ces courbes N est irréductible de dimension* 15 *et* $\operatorname{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex},G}\Xi$ *est irréductible pour une courbe N générique.*

On note maintenant:

$$\pi'\colon \tilde{N}' \to N'$$
$$\pi''\colon \tilde{N}'' \to N''$$

les revêtements admissibles obtenus en appliquant au revêtement π la transformation tétragonale associée à G. Les surfaces $\Sigma(\tilde{N}')$ et $\Sigma(\tilde{N}'')$ sont définies dans le Chapitre 1. On a alors ([D1]):

PROPOSITION (A2.2). (i) *On a*:

$$\operatorname{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex},G}\Xi = \operatorname{Sing}^{\pi'}_{\mathrm{st}}\Xi \cap \operatorname{Sing}^{\pi''}_{\mathrm{st}}\Xi.$$

(ii) *Si* $h^0(N, 2G) = 3$, *on a*:

$$\{a \in P \mid \operatorname{Sing}^{\pi}_{\mathrm{ex},G}\Xi \subset \Xi_a\} = \Sigma(\tilde{N}') \cup \Sigma(\tilde{N}'').$$

A3. Singularités exceptionnelles des variétés de Prym associées aux sextiques planes.

Soit C une sextique plane stable et $n\colon N \to C$ sa normalisation. On notera $p_1, \ldots, p_r$ (avec $0 \leqslant r \leqslant 3$) les points singuliers de C, $g = 10 - r \geqslant 7$ le genre de