Vol. 60, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © June 1990

VARIÉTÉS DE PRYM ET ENSEMBLES D'ANDREOTTI ET MAYER

OLIVIER DEBARRE

§0. Introduction. Les sous-ensembles suivants de l'espace des modules $\mathscr{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g ont été introduits par Andreotti et Mayer dans [A-M]:

$$\mathscr{N}_k^g = \{(A, \Theta) \in \mathscr{A}_g | \dim \operatorname{Sing} \Theta \geqslant k\}.$$

Le résultat principal de leur article est que l'adhérence dans $\mathscr{A}_g$ du lieu $\mathscr{J}_g$ des jacobiennes de courbes est une composante irréductible de $\mathscr{N}_{g-4}^g$.

Nous montrons ici un analogue de ce résultat pour les variétés de Prym. Plus précisément, il est montré dans [D] (et aussi dans cet article, en 6.6) que l'ensemble $\mathscr{P}_g$ des variétés de Prym (généralisées) est contenu dans $\mathscr{N}_{g-6}^g$. Cet article est consacré à la démonstration de:

THÉORÈME. *Pour $g \geqslant 7$, $\mathscr{P}_g$ est une composante irréductible de $\mathscr{N}_{g-6}^g$.*

L'assertion correspondante pour $g = 6$ est fausse, puisque $\mathscr{P}_6$ est de dimension 18, $\mathscr{A}_6$ de dimension 21 et que, pour tout g, $\mathscr{N}_0^g$ est un diviseur de $\mathscr{A}_g$ ([B1], [Mu 1]).

La méthode utilisée ici est essentiellement celle de [A-M]. Andreotti et Mayer exhibent une jacobienne de courbe (J, Θ) avec $\dim \operatorname{Sing} \Theta = g - 4$, telle que les cônes tangents à Θ en les points de multiplicité 2 engendrent un espace vectoriel de codimension $(3g - 3)$ dans $S^2 T_0^* J$. Ils montrent ensuite que ceci entraîne leur résultat.

On pourrait employer la même méthode pour les variétés de Prym. Malheureusement, si on sait que pour une variété de Prym générique (P, Ξ), on a $\dim \operatorname{Sing} \Xi = g - 6$, on ne sait pas à ma connaissance décrire un exemple explicite qui vérifie cette propriété. De plus, le problème des cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta semble difficile à aborder directement.

Pour contourner cette difficulté, on a recours à des dégénérescences de variétés de Prym, à savoir certaines extensions de variétés de Prym P par $\mathbb{C}^*$. Via l'isomorphisme $\operatorname{Ext}^1(P, \mathbb{C}^*) \simeq P$, ce sont les extensions qui correspondent à $a = \mathcal{O}(r + s - \sigma r - \sigma s) \in P$, où $P = \operatorname{Prym}(\tilde{C} \to \tilde{C}/\sigma)$, $r, s \in \tilde{C}$.

On montre au paragraphe 2 que la méthode d'Andreotti et Mayer s'applique sur le bord de $\mathscr{A}_g$. On est ramené à étudier $\operatorname{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a)$, pour $(P, \Xi) \in \mathscr{P}_{g-1}$ et a comme ci-dessus. Pour ce faire, on a recours à une seconde dégénérescence, à savoir le

Received February 1, 1988. Revision received October 6, 1989.

cas où (P, Ξ) est la jacobienne (JN, Θ) d'une courbe N de genre $(g-1)$ et $a = \mathcal{O}_N(p+q-r-s)$ avec $p, q, r, s \in N$.

A l'aide des résultats des paragraphes 4 et 5, qui décrivent le comportement en famille de Sing Ξ et $\mathrm{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a)$, on met en évidence au paragraphe 6 celles des composantes de $\mathrm{Sing}(\Theta \cdot \Theta_a)$ qui sont spécialisations de la situation générique. Il est alors facile de faire les calculs sur ce cas particulier. On conclut au paragraphe 7.

Tout comme $\mathcal{N}^g_{g-4}$ qui a toujours des composantes autres que $\bar{\mathcal{J}}_g$ pour $g \geqslant 4$, $\mathcal{N}^g_{g-6}$ a toujours des composantes autres que $\mathcal{P}_g$ pour $g \geqslant 7$ (cf. [D]).

Je remercie A. Beauville de m'avoir soumis ce problème, ainsi que de ses nombreux conseils.

§1. Notations, conventions et rappels.

(1.1) Variétés abéliennes. Conformément à l'usage, on notera:

$\mathcal{H}_g = \{\tau \in \mathcal{M}_{g \times g}(\mathbb{C}) | \tau = {}^t\tau$ et Im τ définie positive$\}$.

$\mathcal{A}_g = \mathcal{H}_g/\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g.

$\mathcal{P}_g$ la sous-variété fermée de dimension $\min(3g, g(g+1)/2)$ de $\mathcal{A}_g$ constituée des variétés de Prym généralisées ([B1] page 177).

$\mathcal{N}^g_k = \{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g | \dim \mathrm{Sing}\, \Theta \geqslant k\}$, pour $0 \leqslant k \leqslant g-2$ ([A-M] page 205).

La fonction thêta est définie pour $(z, \tau) \in \mathbb{C}^g \times \mathcal{H}_g$ par:

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i [{}^t n \tau n + 2 {}^t n z].$$

Enfin, si A est une variété abélienne, x un élément de A et Z une sous-variété de A, on notera:

τ_x la translation par x

$Z_x = \tau_x(Z)$

$\mathrm{Sing}(Z)$ le lieu singulier de Z

$\mathrm{Sing}_2(Z)$ le lieu des points de multiplicité 2 sur Z.

(1.2) Courbes. Une courbe sera pour nous une variété projective complexe réduite C de dimension 1. Son genre est défini par $g(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$. On ne considérera que des courbes connexes avec au plus des points doubles comme singularités. La jacobienne JC de C est un groupe algébrique lisse commutatif de dimension $g(C)$, extension d'une variété abélienne par un tore, dont les points sont naturellement identifiés aux classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur C dont la restriction à chaque composante est de degré 0. Si C est réductible, on supposera choisi un ordre sur l'ensemble de ses composantes. On notera alors $\mathrm{Pic}(C)$ son groupe de Picard et $\mathrm{Pic}^{\underline{d}}(C)$, où $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur C dont le degré de la restriction à la j-iéme composante est d_j (i.e. de multidegré $\underline{d}$). Le degré total d'un tel faisceau est $d = \Sigma\, d_i$. On notera ω_C le faisceau dualisant de C. Il est inversible, de degré total $2g(C) - 2$.

Si C est lisse (connexe), on notera:

$C^{(d)}$ l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d sur C,

c'est-à-dire le produit symétrique de d copies de C.

$$C_d^r = \{D \in C^{(d)} | h^0(C, \mathcal{O}(D)) \geqslant r + 1\}.$$

$$J^d C = \mathrm{Pic}^{(d)}(C)$$

$$W_d^r = \{L \in J^d C | h^0(C, L) \geqslant r + 1\}.$$

Un élément de W_d^r est appelé un g_d^r. On notera souvent W au lieu de W_{g-3}^0. Si p, q sont des points de C, on notera:

$$W_{p,q} = \{L(p+q) \in J^{g-1}C | L \in W\}$$

$$= \{L \in J^{g-1}C | h^0(L(-p-q)) \geqslant 1\}$$

$$C_{p,q}^{(d)} = \{D \in C^{(d+2)} | D \geqslant p + q\}.$$

s_{pq} une section de $\mathcal{O}(p+q)$ de diviseur $p+q$.

De même, si $D \in C^{(d)}$, on notera s_D une section de $\mathcal{O}(D)$ de diviseur D.

On notera aussi "$-$" l'involution $L \mapsto \omega_C \otimes L^{-1}$ de $J^{g-1}C$ et $(-Z)$ l'image d'un sous-ensemble Z de $J^{g-1}C$ par cette involution.

Il existe sur les W_d^r et C_d^r des structures naturelles de schéma (cf. par exemple [ACGH] chapitre IV). On a alors:

- Si $L \in W_d^r \backslash W_d^{r+1}$, l'espace tangent $T_L W_d^r \subset T_L J^d C \simeq H^0(C, \omega_C)^*$ est l'orthogonal de l'image de l'application naturelle:

$$H^0(C, L) \otimes H^0(C, \omega_C \otimes L^{-1}) \to H^0(C, \omega_C).$$

- Si C est une courbe générale de genre g, W_d^r est de dimension $\rho = g - (r+1) \cdot (g - d + r)$, irréductible si $\rho > 0$, lisse en dehors de W_d^{r+1} et Cohen-Macaulay (cf. [ACGH], chapitre VII).

On a utilisé, et on utilisera dans tout cet article, la convention qu'un ensemble de dimension < 0 est vide.

§2. Le théorème d'Andreotti et Mayer et son application aux variétés quasi-abéliennes de rang 1. On commence tout d'abord par rappeler les résultats du §3 de [A-M], relatifs aux lieux de ramification supérieurs d'une application analytique. Le théorème que nous énonçons ci-dessous n'apparaît pas tel quel dans [A-M] mais est une conséquence directe des résultats de cet article.

(2.1) Soient X et B deux variétés analytiques lisses et connexes, $p: X \to B$ un morphisme propre et lisse.

Soit D un diviseur de X, $\mathscr{S} \subset D$ le lieu critique de $p_{|D}: D \to B$ et $\pi: \mathscr{S} \to B$ la restriction de p à $\mathscr{S}$.

On notera toujours f une équation locale de D dans X. Pour tout x dans X, on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow T_b^*B \xrightarrow{p^*} T_x^*X \xrightarrow{i^*} T_x^*X_b \longrightarrow 0,$$

où $b = p(x)$, $X_b = p^{-1}(b)$.

Si $x \in \mathscr{S}$, on a par définition $i^*df(x) = 0$. L'écriture $(p^*)^{-1}(df(x))$ a donc un sens. On notera:

$$\forall x \in \mathscr{S} \qquad T_x = \operatorname{Ker}[(p^*)^{-1}(df(x))] \subset T_bB.$$

Cet espace vectoriel ne dépend pas de l'équation locale f choisie.

On note aussi:

(2.2) $$\mathscr{S}_k = \{x \in \mathscr{S} \mid \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) \geqslant k\} \quad \text{fermé analytique dans } \mathscr{S}$$

$$\pi_k = \pi|_{\mathscr{S}_k}$$

$$\mathscr{N}_k = \pi(\mathscr{S}_k) \quad \text{fermé analytique dans } B.$$

Soit $b \in B$. On suppose que $\dim \pi^{-1}(b) = k$, de sorte que $b \in \mathscr{N}_k$.

Soit $\mathscr{N}$ une composante irréductible locale de $\mathscr{N}_k$ en b, $\mathscr{S}^1, \ldots, \mathscr{S}^r$ les composantes irréductibles de $\pi_k^{-1}(\mathscr{N})$ *qui dominent* $\mathscr{N}$. On écrira:

$$\mathscr{S}(\mathscr{N}) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathscr{S}^i \cap \pi^{-1}(b),$$

de sorte que $\mathscr{S}(\mathscr{N})$ est une réunion de composantes irréductibles de dimension k de $\mathscr{S}_b = \pi^{-1}(b) = \operatorname{Sing} D_b$.

Le résultat est le suivant:

THÉORÈME 2.3. *Le cône tangent réduit à* $\mathscr{N}$ *en* b *est contenu dans* $\bigcap_{x \in \mathscr{S}(\mathscr{N})} T_x \subset T_bB$. *En particulier, on a*:

$$\dim \mathscr{N} \leqslant \operatorname{codim}\{\textit{sous-espace vectoriel de } p^*T_b^*B \textit{ engendré par les } df(x), x \in S(\mathscr{N})\}.$$

■ La démonstration se trouve dans [A-M] pages 214–217. On en reprend ici les grandes lignes.

Il existe des points $x_1 \dots x_N$ dans $\mathscr{S}(\mathscr{N})$ tels que:

$$\bigcap_{x \in \mathscr{S}(\mathscr{N})} T_x = \bigcap_{\alpha=1}^{N} T_{x_\alpha} = T.$$

Soit $\alpha \in \{1, \dots, N\}$. Il existe $j(\alpha) \in \{1, \dots, r\}$ tel que:

$$x_\alpha \in \mathscr{S}^{j(\alpha)}.$$

Soit U_α un voisinage connexe de x_α dans $\mathscr{S}^{j(\alpha)}$. Par semi-continuité inférieure, on peut supposer que les fibres de tous les π^j: $\mathscr{S}^j \to \mathscr{N}$ sont de dimension partout égale à k et on en déduit comme dans [A-M], par un théorème de Remmert, que les morphismes π^j sont ouverts.

L'ensemble $\bigcap_{\alpha=1}^{N} \pi^{j(\alpha)}(U_\alpha)$ est ouvert et tout point lisse y de $\mathscr{N}$ dans cet ouvert a un antécédent dans chaque U_α.

Le ouverts U_α peuvent être choisis arbitrairement petits. Pour toute suite $y^{(n)}$ de points lisses sur $\mathscr{N}$ convergeant vers b, on peut choisir des suites $x_\alpha^{(n)}$ de points de $\pi_k^{-1}(\mathscr{N})$ convergeant vers x_α, avec $\pi_k(x_\alpha^{(n)}) = y^{(n)}$.

Par Lemma 8 de [A-M] on a:

$$T_{y^{(n)}}\mathscr{N} \subset \bigcap_{\alpha=1}^{N} T_{x_\alpha^{(n)}}.$$

Si on suppose que la limite des espaces tangents existe on a donc:

$$\lim_n T_{y^{(n)}}\mathscr{N} \subset T.$$

Le cône tangent réduit à $\mathscr{N}$ en b étant contenu dans la réunion de toutes ces limites, on a le résultat. ■

(2.4) Dans tout cet article, on appellera variété quasi-abélienne de rang 1 et de dimension $g + 1$ toute extension d'une variété abélienne principalement polarisée de dimension g par le tore $\mathbb{C}^*$.

Il existe un espace de modules grossier $\mathscr{A}_{g+1}^{(1)}$ pour les variétés abéliennes prinpalement polarisées ou quasi-abéliennes de rang 1 de dimension $g + 1$ (cf. [I], [Mu 1] [N]). Il est réunion disjointe d'un ouvert isomorphe à $\mathscr{A}_{g+1}$, espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g + 1$, et d'un diviseur $\partial\mathscr{A}_{g+1}$. Il existe un morphisme ρ_{g+1}: $\partial\mathscr{A}_{g+1} \to \mathscr{A}_g$ et la fibre de (A, Θ) est isomorphe à $A/\mathrm{Aut}(A, \Theta)$. C'est le morphisme induit sur $\partial\mathscr{A}_{g+1}$ par le morphisme de $\mathscr{A}_{g+1}^{(1)}$ dans la compactification de Satake $\mathscr{A}_{g+1}^* = \mathscr{A}_{g+1} \cup \mathscr{A}_g \cup \cdots \cup \mathscr{A}_0$ de $\mathscr{A}_{g+1}$.

Il existe une "famille universelle" de variétés quasi-abéliennes de rang 1 audessus de $\mathbb{C}^g \times \mathscr{H}_g = B$, dont nous allons construire une compactification p: $X \to B$. Soit:

- $\tilde{X} = (\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}) \times \mathbb{C}^g \times B$.
- Γ le groupe $\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g$ qui agit sur $\tilde{X}$ par

$$(\alpha, p, q)\cdot(\lambda, \mu, z, a, \tau) = (\alpha\lambda, \alpha\mu \exp(-2i\pi {}^tqa), z + p + \tau q, a, \tau)$$

- X le quotient $\tilde{X}/\Gamma$.
- p l'application $X \to B$, projection sur les deux derniers facteurs.

La fibre de $(a, \tau) \in B$ est isomorphe au fibré projectif $\mathbb{P}(\mathcal{O}_A(\Theta) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_a))$ sur la variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) associée à $\tau \in \mathcal{H}_g$. Le fibré privé de ses deux sections canoniques est une extension de A par $\mathbb{C}^*$.

On définit un morphisme $f\colon \tilde{X} \to \mathbb{C}$ par:

$$f(\lambda, \mu, z, a, \tau) = \lambda\theta(z, \tau) + \mu\theta(z - a, \tau).$$

On a:

$$\begin{aligned} &f((\alpha, p, q)\cdot(\lambda, \mu, z, a, \tau)) \\ &\quad = \alpha\lambda\theta(z + p + \tau q, \tau) + \alpha\mu \exp(-2i\pi {}^tqa)\theta(z - a + p + \tau q, \tau) \\ &\quad = \alpha\lambda \exp i\pi(-{}^tq\tau q - 2{}^tqz)\theta(z, \tau) \\ &\qquad + \alpha\mu \exp(-2i\pi {}^tqa) \exp i\pi(-{}^tq\tau q - 2{}^tq(z - a))\theta(z - a, \tau) \\ &\quad = \alpha \exp i\pi(-{}^tq\tau q - 2{}^tqz) f(\lambda, \mu, z, a, \tau). \end{aligned}$$

Le diviseur $\tilde{D}$ de f est donc l'image inverse d'un diviseur D sur X. On prendra f comme équation locale de D, en prenant λ ou μ égal à 1.

On prend les notations de la section 2.1, dont on va appliquer les résultats à notre situation. Soit $\tilde{\mathcal{S}}$ l'image de $\mathcal{S}$ dans $\tilde{X}$.

On peut remarquer tout de suite que la fibre de $(a, \tau) \in B$ sous $\tilde{\pi}\colon \tilde{\mathcal{S}} \to B$ est $\{(\lambda, \mu, z) | \theta(z, \tau) = \theta(z - a, \tau) = 0$ et $\forall j \in \{1, \dots, g\}$ $\lambda(\partial\theta/\partial z_j)(z, \tau) + \mu(\partial\theta/\partial z_j)(z - a, \tau) = 0\}$.

L'ensemble $\mathcal{N}_k$ introduit en (2.2) correspond donc à:

$$\{(a, \tau) \in B | \dim \operatorname{Sing}(\Theta \cdot \Theta_a) \geqslant k \text{ ou } \dim(\operatorname{Sing} \Theta \cdot \operatorname{Sing} \Theta_a) \geqslant k - 1\}.$$

Pour éviter toute confusion avec les ensembles d'Andreotti et Mayer, on le notera ici $\mathcal{T}_k^g$.

(2.5) On peut remarquer qu'il résulte de [Mu 1] (2.4), pages 363–364, que la frontière de l'ensemble d'Andreotti et Mayer $\mathcal{N}_k^{g+1} = \{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_{g+1} | \dim \operatorname{Sing} \Theta \geqslant k\}$ dans la compactification partielle $\mathcal{A}_{g+1}^{(1)}$ est contenue dans la réunion $\rho_{g+1}^{-1}(\mathcal{N}_k^g) \cup \partial'\mathcal{N}_k^{g+1}$, où $\partial'\mathcal{N}_k^{g+1}$ est l'image de $\mathcal{T}_k^g$ par le morphisme $B = \mathbb{C}^g \times \mathcal{H}_g \to \partial\mathcal{A}_{g+1}$.

On aura besoin du résultat suivant, qui est conséquence du théorème 2.3:

PROPOSITION 2.6. *Soit $f: (\mathscr{A}, \Theta) \to T$ une famille de variété abéliennes principalement polarisées de dimension g, avec T lisse connexe, munie d'une section a. On lui associe une famille de variétés quasi-abéliennes de rang 1, donc un morphisme $\varphi: T \to \partial\mathscr{A}_{g+1}$. On pose:*

$$\mathscr{T} = \bigcup_{t \in T} \operatorname{Sing}(\Theta_t \cdot \Theta_{t,a_t}) \subset \mathscr{A}.$$

On fait les hypothèses suivantes:

(i) *Pour tout $t \in T$, $\mathscr{T}_t$ est de dimension k et est irréductible pour t générique. Une seule composante $\mathscr{T}^0$ de $\mathscr{T}$ domine donc T.*

(ii) *Pour t générique dans T, on a:*

$$\dim(\operatorname{Sing}\Theta_t)\cdot(\operatorname{Sing}\Theta_{t,a_t}) \leqslant k-2\,.$$

(iii) *Pour tout $t \in T$, les seuls automorphismes de $(\mathscr{A}_t, \Theta_t)$ sont $\pm\mathrm{id}$, et a_t n'est pas d'ordre 2.*

En particulier, $\varphi(T) \subset \partial'\mathscr{N}_k^{g+1}$. Soit $\mathscr{N}$ une composante irréductible de $\partial'\mathscr{N}_k^{g+1}$ contenant $\varphi(T)$. Alors, pour tout $t \in T$, la dimension de $\mathscr{N}$ en $\varphi(t)$ est inférieure ou égale à la codimension de l'espace projectif engendré par l'image de $\mathscr{T}_t^0$ par l'application rationnelle:

$$\mathscr{T}_t = \operatorname{Sing}(\Theta_t \cdot \Theta_{t,a_t}) \dashrightarrow \mathbb{P}^{g+\binom{g+1}{2}-1}$$

$$z \mapsto \left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_1}(z,\tau), \ldots, \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_g}(z,\tau), \lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial z_j}(z,\tau) + \mu\frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial z_j}(z-a_t,\tau), 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant g\right]$$

$$\text{où}\quad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z,\tau) + \mu\frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z-a_t,\tau) = 0 \quad \forall i.$$

■ La question étant locale, on peut supposer T simplement connexe. Grâce à l'hypothèse (iii), le morphisme $\varphi: T \to \partial\mathscr{A}_{g+1}$ se relève en $\psi: T \to B$. On a un diagramme cartésien:

$$\begin{array}{ccc} P = \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathscr{A}}(\Theta) \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{A}}(\Theta_a)) & \xrightarrow{\Psi} & X \\ \bar{f}\downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

Considérons l'image inverse $\mathscr{T}'$ de $\mathscr{T}$ dans P. La projection $h: \mathscr{T}' \to \mathscr{T}$ est birationnelle sauf au-dessus des points de $(\operatorname{Sing}\Theta_t)\cdot(\operatorname{Sing}\Theta_{t,a_t})$. Grâce aux hypothèses

(ii) et (i), on en déduit que pour tout $t \in T$, $\mathcal{T}_t'$ est de dimension k et que pour t générique $\mathcal{T}_t'$ est irréductible. Une seule composante $\mathcal{T}'^0$ de $\mathcal{T}'$ domine donc T. Son image par h est $\mathcal{T}^0$.

Soit $\mathcal{N}'$ une composante irréductible (locale) de $\mathcal{T}_k^g$ qui contienne $\psi(T)$ et telle que son image dans $\partial\mathcal{A}_{g+1}$ contienne $\mathcal{N}$. On note comme en 2.2 $\mathcal{S}^1, \ldots, \mathcal{S}^r$ les composantes irréductibles de $\pi_k^{-1}(\mathcal{N}')$ qui dominent $\mathcal{N}'$. Par construction, pour tout $t \in T$, $\mathcal{S}^1_{\psi(t)}, \ldots, \mathcal{S}^r_{\psi(t)}$ sont des composantes de $\mathcal{T}_t'$de dimension $\geqslant k$. On déduit de ce qui précède que pour $t \in T$ générique, on a $\mathcal{S}^j_{\psi(t)} = \mathcal{T}_t'^0$ pour tout j, de sorte que $\mathcal{S}^j \supset \Psi(\mathcal{T}'^0)$. On peut alors appliquer le théorème 2.3. On se place en un point $\tilde{x} = (\lambda, \mu, z, a, \tau)$ de $\tilde{\mathcal{S}}$. Si $\mu \neq 0$, on peut supposer $\mu = 1$. Avec:

$$f(\lambda, 1, z, a, \tau) = \lambda\theta(z, \tau) + \theta(z - a, \tau)$$

on a:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 = \theta(z, \tau)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0 = \lambda\frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z, \tau) + \frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z - a, \tau), \quad \text{puisque } \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{S}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = -\frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z - a, \tau) = \lambda\frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z, \tau)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{jk}} = \lambda\frac{\partial \theta}{\partial \tau_{jk}}(z, \tau) + \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{jk}}(z - a, \tau)$$

$$= [2i\pi(1 + \delta_{jk})]^{-1}\left(\lambda\frac{\partial^2 \theta}{\partial z_j \partial z_k}(z, \tau) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_j \partial z_k}(z - a, \tau)\right)$$

par l'équation de la chaleur ([A-M] page 202).

On en déduit la proposition par application de 2.3. ■

§3. Quelques résultats sur les systèmes linéaires sur les courbes. Nous avons rassemblé dans cette partie des résultats relatifs aux sous-schémas W_d^r d'une jacobienne de courbe lisse dont nous aurons besoin par la suite.

Si C est une courbe lisse de genre g, on adoptera dans ce paragraphe ainsi que par la suite la notation:

$$W = W_{g-3}^0 \subset J^{g-3}C.$$

Conformément à nos conventions (1.2), on notera, pour $p, q \in C$:

$$W_{p,q} = W + p + q \subset J^{g-1}C$$

$$C_p^{(d)} = \{D \in C^{(d+1)} | D \geqslant p\}$$

$$C_{p,q}^{(d)} = \{D \in C^{(d+2)} | D \geqslant p + q\}$$

PROPOSITION 3.1. *Soit C une courbe lisse générique de genre g. Alors, pour p et q génériques sur C, on a*: $\forall L \in \operatorname{Pic}(C)\ h^0(L) \geqslant 2 \Rightarrow h^1(L^2(-p-q)) = 0$.

■ On sait ([G]) que sur une courbe générique, on a:

$$h^0(L) \geqslant 2 \Rightarrow h^1(L^2) = 0$$

$$\Rightarrow h^0(L^2) = 2d + 1 - g$$

où $d = \deg L$.

De plus, si p était point base de $|L^2|$, il serait aussi point base de $|L|$ et on aurait:

$$h^0(L(-p)) \geqslant 2$$

$$\Rightarrow h^0(L^2(-2p)) = 2d - 2 + 1 - g = h^0(L^2) - 2.$$

C'est une contradiction. On en déduit:

$$\forall p \in C \qquad h^0(L^2(-p)) = h^0(L^2) - 1 = 2d + g$$

c'est-à-dire:

$$h^0(\omega_C \otimes L^{-2}(p)) = 0.$$

Considérons maintenant le fermé:

$$\mathscr{F} = \{(L, p, q) \in J^dC \times C^{(2)} | h^0(L) \geqslant 2, h^1(L^2(-p-q)) \neq 0\}.$$

Si sa projection sur le facteur $C^{(2)}$ est surjective, il existe une surface Σ, un revêtement fini $\pi = (p, q)\colon \Sigma \to C^2$ et un morphisme $f\colon \Sigma \to J^dC$ tels que:

$$\forall x \in \Sigma \qquad h^0(L_x) \geqslant 2$$

$$h^1(L_x^2(-p(x) - q(x))) = h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x) + q(x))) \geqslant 1$$

où $L_x = f(x)$.

Il résulte de ce qui précède que $h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x))) = 0$, donc que $h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x) + q(x))) = 1$.

A tout x dans Σ, on peut donc associer l'unique élément D_x de $|\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x) + q(x))|$. On a alors un morphisme:

$$\Sigma \to C^{(2g-2d)}$$

$$x \mapsto D_x$$

et $q(x) \notin \operatorname{Supp} D_x$. Si on fixe $q(x) = q$, on a un morphisme $\Sigma_q = \pi^{-1}(C \times \{q\}) \to C^{(2g-2d)}$ dont l'image ne rencontre pas le diviseur ample $C_q^{(2g-2d-1)}$ de $C^{(2g-2d)}$ ([F-L] Lemma 2.7). Il est donc constant égal à D_q, avec $q \notin \operatorname{Supp} D_q$. On a:

$$\forall x \in \Sigma \qquad L_x^{-2}(p(x) + q(x)) = \omega_C^{-1}(D_{q(x)})$$

donc aussi $L_x^{-2}(p(x) + q(x)) = \omega_C^{-1}(D_{p(x)})$. On en déduit que $D_{p(x)}$ est constant égal à D. Mais on doit alors avoir $p \notin \operatorname{Supp} D$ pour tout p, ce qui est absurde. La projection de $\mathscr{F}$ sur $C^{(2)}$ n'est donc pas surjective, ce qui prouve la proposition. ■

PROPOSITION 3.2. *Soit C une courbe lisse générique de genre $g \geqslant 6$. Alors, pour p et q génériques sur C, $W_{p,q} \cdot \operatorname{Sing} \Theta$ est irréductible réduit de dimension $g - 5$. Sa classe de cohomologie est $\theta^5/24$.*

■ Considérons les images inverses de $\operatorname{Sing} \Theta$ et de $W_{p,q}$ dans $C^{(g-1)}$. La première est C_{g-1}^1, irréductible de dimension $g - 3$, la seconde est $C_{p,q}^{(g-3)}$, lieu des zéros d'une section d'un faisceau localement libre ample de rang 2 ([F-L] Lemma 2.7). Leur intersection T, de dimension pure $g - 5$ pour (p, q) générique, est donc connexe en codimension 1 pour $g - 3 > 2$ ([F-L] ou [ACGH] page 314). Si T est réductible, il est donc singulier en codimension 1. Comme le morphisme $C_{p,q}^{(g-3)} \to \Theta$ est un isomorphisme hors de $(C_{g-3}^1)_{p,q}$, qui est de dimension $g - 7$ par 1.2, sa restriction à T est un isomorphisme en codimension 1 et l'image de T, à savoir $W_{p,q} \cdot \operatorname{Sing} \Theta$, est aussi singulière en codimension 1.

Soit L un point générique d'une composante de $\operatorname{Sing} (W_{p,q} \cdot \operatorname{Sing} \Theta)$ de dimension $\geqslant g - 6$. Comme $\dim W_{g-1}^2 = g - 9$ et $\dim W_{g-3}^1 = g - 8$, on a $h^0(L) = 2$ et $h^0(L(-p - q)) = 1$. Si $D \in |L(-p - q)|$ on a les égalités (cf. notations 1.2):

$$H^0(L) = \mathbb{C}s_1 \oplus \mathbb{C}s_2, \quad \text{avec} \quad s_1 = s_D s_{pq}$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}) = \mathbb{C}t_1 \oplus \mathbb{C}t_2$$

$$T_L \operatorname{Sing} \Theta = \{s_D s_{pq} t_1, s_D s_{pq} t_2, s_2 t_1, s_2 t_2\}^\perp$$

$$H^0(L(-p - q)) = \mathbb{C}s_D$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p + q)) = \mathbb{C}t_1 s_{pq} \oplus \mathbb{C}t_2 s_{pq} \oplus \mathbb{C}t$$

$$T_L W_{p,q} = \{s_D t_1 s_{pq}, s_D t_2 s_{pq}, s_D t\}^\perp.$$

Mais L est singulier sur $W_{p,q} \cdot \operatorname{Sing} \Theta$ et lisse sur $\operatorname{Sing} \Theta$ et sur $W_{p,q}$. On a donc $T_L \operatorname{Sing} \Theta \subset T_L W_{p,q}$ et, quitte à modifier t et t_1:

$$s_D t = s_2 t_1 . \tag{3.3}$$

Soit F la partie fixe de L. On suppose d'abord que $p, q \notin \operatorname{Supp} F$. On peut écrire:

$$D = F + E$$

$$\operatorname{div} s_1 = p + q + F + E$$

$$\operatorname{div} s_2 = F + M \text{ avec } \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp}\{p + q + E\} = \varnothing .$$

L'égalité (3.3) s'écrit alors:

$$s_E t = s_M t_1 .$$

Donc t est nulle sur M et s'écrit $t = s_M u$, avec

$$\begin{aligned} u \in H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p + q - M)) &= H^0(K_C - 2M + p + q - F) \\ &\subset H^0(K_C - 2M + p + q) . \end{aligned}$$

Mais, par proposition 3.1, pour un choix générique de p et q, ce dernier espace est nul pour tout M tel que $h^0(M) \geqslant 2$. On obtient donc la contradiction $t = 0$.

On ne peut pas avoir $p + q \leqslant F$ car $h^0(L(-p - q)) = 1$. On a donc par exemple $p \in \operatorname{Supp} F$, $q \notin \operatorname{Supp} F$ et:

$$F = p + G$$

$$D = G + E$$

$$\operatorname{div} s_1 = p + q + G + E$$

$$\operatorname{div} s_2 = p + G + M \text{ avec } \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp}\{q + E\} = \varnothing$$

On a alors:

$$s_E t = s_M s_p t_1 .$$

Comme dans le premier cas, t s'écrit $t = s_M u$ avec

$$u \in H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p + q - M)) \subset H^0(K_C - 2M + p + q) = 0 . \quad \text{Contradiction.}$$

On a ainsi montré que $W_{p,q} \cdot \operatorname{Sing} \Theta$ est non singulier en codimension 1 donc irréductible.

Sa classe de cohomologie est calculée en 3.7. ■

PROPOSITION 3.4. *Soit C une courbe lisse connexe de genre $g \geqslant 5$, non hyperelliptique, non trigonale et non superelliptique, p et q des points distincts de C. On considère l'application rationnelle:*

$$\phi\colon \operatorname{Sing} \Theta \dashrightarrow \mathbb{P}S^2 T_x^* JC \simeq \mathbb{P}S^2 H^0(C, \omega_C)$$

$$x \in \operatorname{Sing}_2 \Theta \mapsto \tau_x^*(\textit{cône tangent en } x \textit{ à } \Theta).$$

Alors l'espace projectif engendré par l'image de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$ est de codimension $3g - 2$. C'est l'espace projectif des quadriques de $|\omega_C|^*$ contenant la courbe canonique et la corde pq.

■ Soit $X \subset \mathbb{P}H^0(C, \omega_C)^* = \mathbb{P}^{g-1}$ la courbe canonique de C et $\mathscr{I}_X$ l'idéal de X dans $\mathbb{P}^{g-1}$. On sait par [G1] que l'application rationnelle:

$$\psi\colon \operatorname{Sing} \Theta \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(\mathscr{I}_X(2)) \subset \mathbb{P}S^2 H^0(C, \omega_C)$$

induite par ϕ est non dégénérée et est associée à un sous-espace vectoriel V de $H^0(\operatorname{Sing} \Theta, \mathscr{O}(\Theta))$. Soit $\langle pq \rangle$ la droite pq dans $\mathbb{P}^{g-1}$, pour $p, q \in X$, et $H_{p,q} = \mathbb{P}H^0(\mathscr{I}_{X \cup \langle pq \rangle}(2)) \subset \mathbb{P}H^0(\mathscr{I}_X(2))$. Sous nos hypothèses, l'intersection des quadriques contenant X est la courbe X elle-même, sauf si C est une quintique plane ($g = 6$), auquel cas c'est la surface de Veronese dans $\mathbb{P}^5$, qui ne contient pas de droites (cf. [S-D]). On en déduit que $H_{p,q}$ est un hyperplan de $\mathbb{P}H^0(\mathscr{I}_X(2))$.

On va montrer que:

$$\psi^*(H_{p,q}) = W_{p,q} \cdot \operatorname{Sing} \Theta + (-W_{p,q}) \cdot \operatorname{Sing} \Theta = D_{p,q}. \tag{3.5}$$

On en déduit alors la suite exacte:

$$0 \to H^0(\mathscr{O}_{\operatorname{Sing} \Theta}) \to H^0(\mathscr{O}_{\operatorname{Sing} \Theta}(\Theta)) \xrightarrow{r} H^0(\mathscr{O}_{D_{p,q}}(\Theta)),$$

qui montre que l'espace projectif engendré par $\psi(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta) = \psi(D_{p,q})$ est $H_{p,q}$, ce qui termine la démonstration.

L'égalité (3.5) résulte des deux lemmes suivants, joints au fait que la classe de cohomologie de $\operatorname{Sing} \Theta$ est $\frac{1}{12}\theta^4$ ([G-H] page 358) donc que celle de $\psi^*(H_{p,q})$ est $\frac{1}{12}\theta^5$.

LEMMA 3.6. *On a l'égalité ensembliste:*

$$\phi^{-1}(H_{p,q}) = [W_{p,q} \cup (-W_{p,q})] \cap \operatorname{Sing} \Theta.$$

■ Soit tout d'abord $L \in W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}_2\,\Theta$. On a les bases suivantes:

$$H^0(L) = \mathbb{C}s_{pq}s \oplus \mathbb{C}t$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}) = \mathbb{C}s' \oplus \mathbb{C}t'.$$

Alors $\phi(L) = (s_{pq}ss')\cdot(tt') - (s_{pp}st')\cdot(s't)$ correspond à une quadrique contenant la courbe canonique X et la corde $\langle pq \rangle$.

Réciproquement, soit $L \in \mathrm{Sing}_2\,\Theta$, $\{s, t\}$ une base de $H^0(L)$ et $\{s', t'\}$ une base de $H^0(\omega_C \otimes L^{-1})$, que l'on peut choisir telles que $s(p) = s'(p) = 0$. Si $L \notin W_{p,q}$, on a aussi $t(p)s(q) \neq 0$. Si la quadrique $\phi(L) = [(st')\cdot(ts') - (ss')\cdot(tt')]$ contient la droite $\langle pq \rangle$, on a:

$$(st')(p)(ts')(q) + (st')(q)(ts')(p) - (ss')(p)(tt')(q) - (ss')(q)(tt')(p) = 0$$

$$\Rightarrow s'(q)t'(p) = 0$$

$$\Rightarrow s' \text{ nulle en } p \text{ et } q, \text{ ou } p \text{ point base de } \omega_C \otimes L^{-1}$$

$$\Rightarrow L \in (-W_{p,q}).$$ ■

LEMMA 3.7. *Sous les hypothèses de la Proposition* 3.4, $W_{p,q}\cdot \mathrm{Sing}\,\Theta$ *est de dimension pure* $g - 5$ *et sa classe de cohomologie est* $\frac{1}{24}\theta^5$.

■ Il découle de [T] que sous nos hypothèses, Sing Θ est irréductible de dimension $g - 4$. Si on avait $\mathrm{Sing}\,\Theta \subset W_{p,q}$, on aurait:

$$\forall r, s \in C \qquad \mathrm{Sing}\,\Theta \subset \Theta_{p+q-r-s},$$

ce qui ne serait possible, d'après [W1], que si:

$$\exists x, y \in C \qquad p + q - r - s \equiv x - y,$$

de sorte que W_3^1 serait de dimension $\geqslant 1$. La courbe C serait alors hyperelliptique par [Ma].

On a donc $\dim(W_{p,q}\cdot \mathrm{Sing}\,\Theta) \leqslant g - 5$. Grâce à la construction de [K-L], il est facile de voir que $W_{p,q}\cdot \mathrm{Sing}\,\Theta$ est toujours de codimension $\leqslant 5$ en tout point donc qu'il est de dimension pure $g - 5$ dans notre situation. On peut aussi calculer sa classe de cohomologie w. Avec les notations de [G-H] page 352, on a:

$$\begin{aligned} w &= \alpha^*(\sigma_{3,2}) \\ &= \sigma^*(-\sigma_1\cdot\sigma_4 + \sigma_3\cdot\sigma_2) \\ &= -\theta\cdot\frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{3!}\theta^3\cdot\frac{1}{2!}\theta^2 = \frac{1}{24}\theta^5. \end{aligned}$$ ■

PROPOSITION 3.8. *Soit C une courbe lisse de genre g non hyperelliptique, non trigonale et non superelliptique, p, q, r, s quatre points distincts de C et a le point de JC correspondant à $L_a = \mathcal{O}_C(p+q-r-s)$. Alors on a l'égalité entre cycles:*

$$\Theta_a \cdot \operatorname{Sing}\Theta = (W_{p,q}\cdot \operatorname{Sing}\Theta) + ((-W_{r,s})\cdot \operatorname{Sing}\Theta).$$

■ Soit u (resp. v) une section de $\mathcal{O}_C(r+s)$ (resp. $\mathcal{O}_C(p+q)$) de diviseur $(r+s)$ (resp. $(p+q)$). Le noyau du morphisme:

$$H^0(L)\oplus H^0(L\otimes L_a^{-1}) \xrightarrow{(\cdot u,\cdot v)} H^0(L(r+s))$$

est isomorphe à $H^0(L(-p-q))$. On a donc:

$$h^0(L(r+s)) + h^0(L(-p-q)) \geqslant h^0(L) + h^0(L\otimes L_a^{-1})$$

et par Riemann-Roch, si $\deg L = g-1$:

$$h^0(\omega_C\otimes L^{-1}(-r-s)) + h^0(L(-p-q)) \geqslant h^0(L) + h^0(L\otimes L_a^{-1}) - 2.$$

On en déduit l'égalité de l'énoncé, au point de vue ensembliste. L'égalité entre cycles découle alors de 3.7 et du fait que la classe de $\operatorname{Sing}\Theta$ est $\theta^4/12$. ■

LEMMA 3.9. *Soit C une courbe lisse générique de genre $g \geqslant 6$ et p et q deux points génériques sur C. Alors $W_{p,q}\cap(-W_{p,q})\cap \operatorname{Sing}\Theta$ est de dimension $\leqslant g-6$.*

■ Au vu de la Proposition 3.2, il suffit de montrer qu'on ne peut pas avoir: $W_{p,q}\cap \operatorname{Sing}\Theta \subset (-W_{p,q})$ pour p, q génériques. Si c'était le cas, on aurait, pour p, q génériques:

$$\begin{aligned}
\forall M \in W^1_{g-2} \qquad & M(p) \in W_{p,q}\cap \operatorname{Sing}\Theta \\
& \Rightarrow h^0(\omega_C\otimes M^{-1}(-2p-q)) \geqslant 1 \\
& \Rightarrow h^0(\omega_C\otimes M^{-1}) \geqslant 4 \\
& \Rightarrow h^0(M) \geqslant g-2+1-g+4 = 3,
\end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque W^1_{g-2} n'est pas contenu dans W^2_{g-2} (par 1.2, W^1_{g-2} n'est pas vide puisque $g \geqslant 6$). On a donc une contradiction. ■

PROPOSITION 3.10. *Soit C une courbe lisse non hyperelliptique de genre $g \geqslant 6$. Alors, pour p, q, r et s génériques sur C, $W_{p,q}\cdot(-W_{r,s})$ est irréductible de dimension $g-5$. Sa classe de cohomologie est $6(\theta^5/5!)$. Son image par l'application de Gauss $\Theta \dashrightarrow \mathbb{P}T_0^*JC = |\omega_C|$ est $|\omega_C(-p-q-r-s)| \simeq \mathbb{P}^{g-5}$.*

■ Soit $\varphi\colon C^{(g-1)} \to \Theta$ l'application naturelle. On pose:

$$Z = \{D \in C^{(g-3)} \mid \text{Il existe } E \in |K_C - p - q - r - s| \text{ avec } E \geqslant D\}.$$

On a alors $W_{p,q} \cap (-W_{r,s}) = \varphi(Z_{p,q})$. Pour p, q, r, s génériques, $|H| = |K_C - p - q - r - s|$ est un g^{g-5}_{2g-6} et il est classique que Z est de dimension $g - 5$ ([ACGH] Lemma 3.2 page 342), connexe pour $g \geqslant 6$ par [F-L]. Si $|H|$ avait un point base x pour tout $(p, q, r, s) \in C^4$, les $\mathcal{O}(p + q + r + s + x)$ décriraient une sous-variété de dimension $\geqslant 3$ de W^1_5 et C serait hyperelliptique par [Ma]. On peut donc supposer $|H|$ sans point base. Il est alors classique ([ACGH] page 112, Uniform Position Theorem) que Z est irréductible si $\phi_{|H|}: C \to \mathbb{P}^{g-5}$ est birationnelle.

Pour $g \geqslant 7$, cela découle du fait que l'application canonique est birationnelle et qu'une courbe non dégénérée dans $\mathbb{P}^r$ $(r \geqslant 3)$ a au plus ∞^1 trisécantes ([ACGH], page 110): la projection depuis un point générique de la courbe est donc birationnelle.

Pour $g = 6$, ce n'est jamais le cas et on adopte une approche un peu différente: Z étant connexe, il en est de même pour $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$. Il suffit donc de montrer que cette intersection est lisse.

Soit $L \in W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$. On a:

$$H^0(L(-p-q)) = \mathbb{C}u$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(-r-s)) = \mathbb{C}u'$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q)) = \mathbb{C}u's_{pqrs} \oplus \mathbb{C}u'_1 \oplus \mathbb{C}u'_2$$

$$H^0(L(r+s)) = \mathbb{C}us_{pqrs} \oplus \mathbb{C}u_1 \oplus \mathbb{C}u_2.$$

On a donc, dans $T_L JC \simeq H^0(C, \omega_C)^*$:

$$T_L W_{p,q} = \langle uu's_{pqrs}, uu'_1, uu'_2 \rangle^\perp$$

$$T_L(-W_{r,s}) = \langle uu's_{pqrs}, u'u_1, u'u_2 \rangle^\perp.$$

Si $W_{p,q} \cdot (-W_{r,s})$ n'est pas lisse en L, on a une relation du type $uu'_1 = u'u_1$.

On écrit:

$$\operatorname{div}(u) = E + A \qquad \operatorname{div}(u') = E + B \qquad \text{avec} \quad A \cap B = \varnothing$$

$$\operatorname{div}(u_1) = F + C \qquad \operatorname{div}(u'_1) = F + D \qquad \text{avec} \quad C \cap D = \varnothing.$$

On a alors $A = C$ et $B = D$, de sorte que:

$$\begin{cases} F \equiv p + q + r + s + E \\ 2E + A + B \equiv K_C - p - q - r - s \end{cases}.$$

On remarque aussi qu'on ne peut pas avoir $F \geqslant p + q + r + s$, donc que $h^0(F) \geqslant 2$. Si $\deg E = 1$, F est un g^1_5. On a alors $\dim W^1_5 \geqslant 3$ donc C hyperelliptique ([Ma]).

Si $\deg E \geqslant 2$, $2E + A + B + s$ correspond à une bitangente à la courbe $\phi_{|K_C - p - q - r|}(C) \subset \mathbb{P}^2$, ou à une droite passant par un point de multiplicité $\geqslant 4$. Comme une courbe de $\mathbb{P}^2$ n'a qu'un nombre fini de bitangentes, c'est la deuxième possibilité qui est génériquement vérifiée i.e. $h^0(K_C - p - q - r - 2E) \geqslant 2$. Ceci contredit le fait que $\dim W_3^1 \leqslant 0$.

On a montré que $W_{p,q} \cdot (-W_{r,s})$ est lisse connexe donc irréductible.

L'application de Gauss induit sur Z l'application birationnelle:

$$Z \dashrightarrow |\omega_C|$$

$$D \mapsto (D + p + q) + (D' + r + s)$$

$$\text{où} \quad D' \in |\omega_C(-p - q - r - s - D)|$$

dont l'image est $|H| \subset |\omega_C|$.

Enfin, pour calculer la classe de cohomologie, on applique les résultats de [M] (cf. aussi [ACGH] Chapitre VIII). Avec les notations de *loc. cit.*, on a:

$$[Z_{p,q}] = \eta^2 \cdot \text{coefficient de } t^2 \text{ dans } (1 + \eta t)^{-1} e^{t\varphi^*\theta}$$

$$= \eta^2(\eta^2 - \eta\varphi^*\theta + \tfrac{1}{2}\varphi^*\theta^2),$$

et:

$$[W_{p,q} \cdot (-W_{r,s})] = \varphi_*\left(\eta^4 - \eta^3\varphi^*\theta + \frac{1}{2}\eta^2\varphi^*\theta^2\right)$$

$$= \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{4!}\theta^4 \cdot \theta + \frac{1}{2 \cdot 3!}\theta^3 \cdot \theta^2 = 6\frac{\theta^5}{5!}. \quad \blacksquare$$

§4. Etude des singularités du diviseur thêta d'une variété de Prym généralisée. Dans [B1] §3, Beauville a étendu au cas des courbes singulières les résultats de Mumford sur les singularités du diviseur thêta d'une variété de Prym associée à un revêtement double étale de courbes lisses. Néanmoins, il ne considère que les revêtements satisfaisant à la propriété (*) de *loc. cit.* (page 157), c'est-à-dire le cas où il n'y a pas de composantes échangées par l'involution.

Nous montrons ici qu'on peut facilement étendre ces résultats au cas général des revêtements satisfaisant à la condition (**) ci-dessous, qui donnent toutes les variétés de Prym généralisées.

Soit $\tilde{C}$ une courbe connexe de genre $2g + 1$, avec au plus des points doubles comme singularités, munie d'une involution σ, et C la courbe quotient. On suppose la propriété suivante vérifiée:

$$(**)\quad \begin{cases} -\ \sigma \text{ n'est l'identité sur aucune composante de } \tilde{C}. \\ -\ \text{Les points fixes de } \sigma \text{ sont des points doubles de } \tilde{C} \text{ et les deux} \\ \quad \text{branches ne sont pas échangées.} \\ -\ \text{Le nombre de composantes de } \tilde{C} \text{ échangées par } \sigma \text{ est égal au} \\ \quad \text{nombre de points doubles de } \tilde{C} \text{ échangés par } \sigma. \end{cases}$$

Par Lemma 5.1 de [B1], C est de genre $g + 1$ et $P^0 = (\mathrm{Ker\ Nm})^0 \subset J\tilde{C}$ est une variété abélienne de dimension g.

PROPOSITION 4.1. *Soit M un faisceau inversible sur $\tilde{C}$ tel que* $\mathrm{Nm}\ M = \omega_C$. *Alors la fonction*:

$$L \mapsto h^0(L \otimes M) \mod 2$$

est constante sur P^0. Il existe un tel faisceau M avec $h^0(M)$ nul.

■ La démonstration de la première assertion est identique à celle de la Proposition 3.4 de [B1]. On montre maintenant l'existence de M. Il est clair que pour tout multidegré $\underline{d}$ sur C, il existe un multidegré $\underline{\tilde{d}}$ sur $\tilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}(\mathrm{Pic}^{\underline{\tilde{d}}}(\tilde{C})) \subset \mathrm{Pic}^{\underline{d}}(C)$. Comme de plus $\mathrm{Nm}\colon J\tilde{C} \to JC$ est surjective, il existe un faisceau inversible M sur $\tilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}\ M = \omega_C$.

Si $H^0(\tilde{C}, M)$ est non nul, on montre comme dans Step II, Lemma 3.2 de [Mu 2] qu'il existe x lisse sur $\tilde{C}$ tel que:

$$h^0(\tilde{C}, M \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(x - \sigma x)) = h^0(\tilde{C}, M) - 1.$$

On peut donc trouver M tel que $\mathrm{Nm}\ M = \omega_C$, $H^0(\tilde{C}, M) = 0$. ■

Il peut arriver qu'aucun M vérifiant $\mathrm{Nm}\ M = \omega_C$ et $H^0(\tilde{C}, M) = 0$ ne soit de la forme $\pi^* L_0$ (cf. exemple du §6 et comparer avec Proposition 3.10 de [B1]).

On fixe à partir de maintenant un tel M et on définit $\mathrm{Pic}^M(\tilde{C})$ comme le translaté de $J\tilde{C}$ par M: c'est la composante connexe de $\mathrm{Pic}(\tilde{C})$ formée des faisceaux inversibles sur $\tilde{C}$ de même multidegré que M. On définit aussi:

$$P = \text{composante connexe de } \{L \in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}) \mid \mathrm{Nm}\ L = \omega_C\} \text{ contenant } M$$

$$\tilde{\Theta} = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}) \mid h^0(L) \geqslant 1\}.$$

Alors $\tilde{\Theta}$ est un diviseur de $\mathrm{Pic}^M(\tilde{C})$ (Proposition 2.2 de [B1]). On a:

PROPOSITION 4.2.

- $P = \{L \in \mathrm{Pic}^M(C) \mid \mathrm{Nm}\ L = \omega_C,\ h^0(L)\ \textit{pair}\}$
- $\tilde{\Theta}_{|P} = 2\Xi$, *avec* $\Xi = \{L \in P \mid h^0(L) \geqslant 2\}$.

■ Pour démontrer le premier point, on remarque d'abord que l'inclusion $\subset$ résulte de 4.1. Ensuite, il résulte de la démonstration de 5.4 de [B1] qu'on est dans l'une des situations suivantes:

– $\tilde{C} = A \cup \sigma A$ avec $\# A \cap \sigma A = 2$, auquel cas Nm: $J\tilde{C} \to JC$ a un noyau connexe égal à P^0. En particulier $P = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}) | \mathrm{Nm}\, L = \omega_C\}$.

– Il existe une composante de $\tilde{C}$ invariante par σ et Ker Nm a deux composantes connexes P^0 et P^1. Si $L \in P^0$ et si x est sur une composante de $\tilde{C}$ invariante par σ et est lisse sur $\tilde{C}$, on a:

$$h^0(L \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(x - \sigma x)) = h^0(L) \pm 1,$$

soit $L \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(x - \sigma x) \in P^1$ et $h^0(L)$ est impair pour $L \in P^1$. Ceci montre le premier point. La démonstration du second est identique à celle de 3.10 de [B1]. ■

Les singularités de Ξ sont de deux types ([Mu 3]):

- soit $h^0(L) \geqslant 4$
- soit $h^0(L) = 2$ et pour toute base $\{s, t\}$ de $H^0(L)$, on a:

$$\sigma^* s \otimes t = s \otimes \sigma^* t \quad \text{dans} \quad H^0(\tilde{C}, L \otimes \sigma^* L) = H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}).$$

Les premières seront dites stables, les secondes instables. On étudie maintenant le comportement de ces premières dans une famille de revêtements doubles.

(4.3) Soit $\tilde{\mathscr{C}} \to T$ une courbe stable de genre $2g + 1$, munie d'une involution σ satisfaisant sur les fibres à la condition (**). On supposera que $\tilde{\mathscr{C}}$ est lisse et que T est un polydisque. On s'autorisera au besoin à réduire T sans toujours le mentionner.

On note $\mathscr{C} = \tilde{\mathscr{C}}/\sigma$. C'est un espace analytique lisse. Il résulte du Théorème 3.1 de [Gr] que l'espace de Picard $\mathrm{Pic}(\tilde{\mathscr{C}}/T)$ (resp. $\mathrm{Pic}(\mathscr{C}/T)$) existe. C'est un espace analytique sur T, en général non séparé, tel que sa fibre en $t \in T$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}(\tilde{\mathscr{C}}_t)$ (resp. $\mathrm{Pic}(\mathscr{C}_t)$). On a un morphisme norme Nm: $\mathrm{Pic}(\tilde{\mathscr{C}}/T) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{C}/T)$.

On utilisera aussi le sous-espace analytique $\mathrm{Pic}^0(\tilde{\mathscr{C}}/T)$, de fibre en $t \in T$ isomorphe à $\mathrm{Pic}^0(\tilde{\mathscr{C}}_t)$, qui est quasi-projectif sur T ([De] Proposition 4.3).

LEMME 4.4. Il existe un faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur $\tilde{\mathscr{C}}$ tel que:

(i) $\mathrm{Nm}\, \mathscr{M} = \omega_{\mathscr{C}/T}$
(ii) $\forall t \in T\ H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{M}_t) = 0$.

■ Soit $\mathscr{D}$ un diviseur de Cartier effectif sur $\mathscr{C}$ tel que $\mathcal{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D}) = \omega_{\mathscr{C}/T}$ et tel que la restriction de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{C}_0$ soit somme de $2g$ points distincts lisses sur $\mathscr{C}_0$. Quitte à réduire T, on peut considérer $\mathscr{D}$ comme somme de $2g$ sections de $\mathscr{C} \to T$ qu'on peut remonter en des sections de $\tilde{\mathscr{C}} \to T$. Ceci donne un diviseur de Cartier effectif $\tilde{\mathscr{D}}$ sur $\tilde{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{M} = \mathcal{O}(\tilde{\mathscr{D}})$ satisfait à (i).

Comme dans la démonstration de 4.1, il existe des points $x_1^0, \ldots, x_N^0$ lisses de $\tilde{\mathscr{C}}_0$ tels que $H^0(\tilde{\mathscr{C}}_0, \mathscr{M}_0(x_1^0 + \cdots + x_N^0 - \sigma x_1^0 - \cdots - \sigma x_N^0)) = 0$. On choisit des sections (locales) $x_1, \ldots, x_N$ de $\tilde{\mathscr{C}} \to T$ qui prennent les valeurs $x_1^0, \ldots, x_N^0$ en 0. Si $X_1, \ldots, X_N$ sont leur images, le faisceau inversible $\mathscr{M} \otimes \mathcal{O}(\Sigma_{i=1}^N (X_i - \sigma X_i))$ satisfait à i) et ii) (quitte à réduire T). ■

On fixe un tel $\mathscr{M}$ et on définit $\mathrm{Pic}^{\mathscr{M}}(\tilde{\mathscr{C}}/T)$ comme le "translaté" de $\mathrm{Pic}^0(\tilde{\mathscr{C}}/T)$ par $\mathscr{M}$. On lui associe une variété de Prym:

$$\mathscr{P} = \text{composante connexe de } \{\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^{\mathscr{M}}(\tilde{\mathscr{C}}/T) | \mathrm{Nm}\, \mathscr{L} = \omega_{\mathscr{C}/T}\} \text{ conteant } \mathscr{M}$$

$$= \{\mathscr{L}_t \in \mathrm{Pic}^{\mathscr{M}_t}(\tilde{\mathscr{C}}_t) | \mathrm{Nm}\, \mathscr{L}_t = \omega_{\mathscr{C}_t} \text{ et } h^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t) \text{ pair}\}.$$

En suivant la construction déterminantielle usuelle ([K]-L]), on peut définir un sous-espace analytique $\mathscr{W}^r_{\mathscr{M}}$ de $\mathrm{Pic}^{\mathscr{M}}(\tilde{\mathscr{C}}/T)$ dont l'ensemble sous-jacent est

$$\{\mathscr{L}_t \in \mathrm{Pic}^{\mathscr{M}_t}(\tilde{\mathscr{C}}_t) | h^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t) \geqslant r + 1\}.$$

On pose alors $\Xi = \mathscr{P} \cdot \mathscr{W}^1_{\mathscr{M}}$ et $\mathscr{S} = \mathscr{P} \cdot \mathscr{W}^3_{\mathscr{M}}$, de sorte que, pour $t \in T$:

$$\begin{cases} (\mathscr{P}_t, \Xi_t) \text{ est la variété de Prym associée au revêtement } \tilde{\mathscr{C}}_t \to \mathscr{C}_t. \\ \mathscr{S}_t \text{ est l'ensemble des singularités stables de } \Xi_t. \end{cases}$$

On a alors:

PROPOSITION 4.5. *Le sous-espace $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}$ est vide ou de codimension partout $\leqslant 6$.*

■ On fait la construction de [Mu 2] généralisée dans Theorem 1.1 de [B1] et on applique la remarque (1.6) de [H] (cf. démonstration de 5.4). ■

Il est montré dans [D] Théorème 5.25 que lorsque $g \geqslant 6$, $\mathscr{S}_t$ n'est jamais vide si $\mathscr{C}_t$ est lisse. Il est facile d'en déduire que dans la situation ci-dessus, $\mathscr{S}$ n'est jamais vide dès que $g \geqslant 6$.

§5. Les intersections $\Xi \cdot \Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ pour une variété de Prym. A beaucoup de titres, les intersections $\Xi \cdot \Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ pour les variétés de Prym jouent un rôle analogue aux intersections $\Theta \cdot \Theta_{p-q}$ pour les jacobiennes ([B-D]).

On étudie ici ces premières et plus particulièrement leur lieu singulier, ainsi que son comportement "en famille".

THÉORÈME 5.1. *Soit $\pi: \tilde{C} \to C$ un revêtement double étale de courbes lisses connexes, σ l'involution de $\tilde{C}$ associée. On suppose que C est non hyperelliptique et non trigonale de genre $g + 1$ et on note (P, Ξ) la variété de Prym associée à π dans $\mathrm{Pic}^{2g}\tilde{C}$. On prend deux points r et s sur $\tilde{C}$ et on note a l'élément de $\mathrm{Pic}^0\tilde{C}$ correspondant au faisceau inversible $L_a = \mathscr{O}_{\tilde{C}}(r + s - \sigma r - \sigma s)$. Alors l'intersection $\Xi \cdot \Xi_a$ est réduite et on a:*

$$\Xi \cdot \Xi_a = \{L \in P | h^0(\tilde{C}, L \otimes \mathscr{O}(-r - s)) \geqslant 1\}$$

$$\mathrm{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a) \supset \{L \in P | h^0(\tilde{C}, L \otimes \mathscr{O}(-r - s)) \geqslant 2\},$$

avec égalité pour C générique et r et s génériques sur $\tilde{C}$.

■ On commence par le:

LEMME 5.2. *Si $L \in P$, on a*

$$h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) \geqslant \tfrac{1}{2}[h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1})] - 1.$$

■ Soit t une section de $\mathcal{O}(r+s)$ de diviseur $(r+s)$. Le noyau du morphisme:

$$H^0(L) \oplus H^0(L \otimes L_a^{-1}) \xrightarrow{(\sigma t,\, -t)} H^0(L \otimes \mathcal{O}(\sigma r + \sigma s))$$

est isomorphe à $H^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s))$. On a donc:

$$\begin{aligned} h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1}) - h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) &\leqslant h^0(L \otimes \mathcal{O}(\sigma r + \sigma s)) \\ &= h^0(\sigma^* L \otimes \mathcal{O}(r+s)) \\ &= h^0(\omega_{\tilde{C}} \otimes \sigma^* L^{-1} \otimes \mathcal{O}(-r-s)) + 2 \quad \text{par Riemann-Roch} \\ &= h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) + 2 \quad \text{puisque} \quad L \otimes \sigma^* L \simeq \omega_{\tilde{C}}. \end{aligned}$$ ■

On en déduit l'égalité ensembliste:

$$\Xi \cap \Xi_a = \{L \in P \mid h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) \geqslant 1\}. \tag{5.3}$$

Comme C est non hyperelliptique et non trigonale, le système linéaire $|H| = |\omega_C \otimes \mathcal{O}(-\pi r - \pi s)|$ est un g_{2g-2}^{g-2} sans point base. On lui associe, en suivant [B2], la sous-variété réduite $S = (\pi^{(2g-2)})^{-1}(|H|)$ de $\tilde{C}^{(2g-2)}$.

L'image de $S + r + s \subset \tilde{C}^{(2g)}$ dans $\mathrm{Pic}^{2g}\tilde{C}$ a alors deux composantes connexes, dont une seule V est contenue dans P, et qui n'est autre que $\Xi \cap \Xi_a$ par 5.3. Le théorème 1 de *loc. cit.* montre que la classe de V dans $H^4(P, \mathbb{Q})$ est $[\Xi]^2$, donc que l'intersection $\Xi \cdot \Xi_a$ est réduite.

Soit $L \in P$ tel que $h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) \geqslant 2$. On va montrer que L est singulier sur $\Xi \cdot \Xi_a$. Si $h^0(L) = 4$ ou $h^0(L \otimes L_a^{-1}) = 4$ alors L est singulier sur Ξ ou sur Ξ_a donc sur $\Xi \cdot \Xi_a$. Si $h^0(L) = h^0(L \otimes L_a^{-1}) = 2$, on prend une base $\{u, v\}$ de $H^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s))$. On a alors:

$$H^0(L) = \mathbb{C}us_{rs} \oplus \mathbb{C}vs_{rs}$$

$$H^0(L \otimes L_a^{-1}) = \mathbb{C}u\sigma^* s_{rs} \oplus \mathbb{C}v\sigma^* s_{rs}.$$

Par [Mu 3] §6, l'hyperplan $T_L\Xi$ de $T_LP \simeq H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^{*-}$ correspond à $[u \cdot s_{rs} \cdot \sigma^* v \cdot \sigma^* s_{rs} - \sigma^* u \cdot \sigma^* s_{rs} \cdot v \cdot s_{rs}]$ et $T_L\Xi_a$ à $[u \cdot \sigma^* s_{rs} \cdot \sigma^* v \cdot s_{rs} - \sigma^* u \cdot s_{rs} \cdot v \cdot \sigma^* s_{rs}]$. On a donc $T_L\Xi = T_L\Xi_a$ et L est singulier sur $\Xi \cdot \Xi_a$.

On suppose maintenant C générique et r et s génériques sur C. On rappelle ([B2] §1) qu'il existe un morphisme surjectif d'une composante S_0 de la variété S, définie plus haut, sur $\Xi \cdot \Xi_a$:

$$S_0 \to \Xi \cdot \Xi_a \subset \mathrm{Pic}^{2g} \tilde{C}$$

$$D \mapsto \mathcal{O}_{\tilde{C}}(D + r + s).$$

La fibre de L est isomorphe à $|L \otimes \mathcal{O}(-r - s)|$. Il nous suffit donc de montrer que S_0 est lisse c'est-à-dire, par Proposition 3 de [B2], que:

$$\begin{cases} \text{Pour tout diviseur effectif } A \text{ sur } C, \\ h^0(H - 2A) \neq 0 \Rightarrow h^0(H - A) = h^0(H) - \deg A \end{cases}$$

ou, par Riemann-Roch, avec $r' = \pi(r)$, $s' = \pi(s)$:

$$h^0(A + r' + s') \geqslant 2 \Rightarrow h^0(K_C - 2A - r' - s') = 0.$$

Cette propriété est conséquence de la Proposition 3.1. ■

Les points L de P tels que $h^0(\tilde{C}, L \otimes \mathcal{O}(-r - s)) \geqslant 2$ seront dits singularités stables de $(\Xi \cdot \Xi_a)$.

Cette définition est justifiée par l'analogie de leurs propriétés avec celles des singularités "stables" du diviseur Ξ, définies dans le paragraphe 4.

En particulier, on montrera qu'elles existent toujours pour $g \geqslant 5$ (cf. 6.10) et que l'ensemble de ces singularités est partout de dimension $\geqslant g - 5$ (cf. 5.5).

(5.4) On étudie maintenant le comportement de ces singularités en famille. On reprend les hypothèses et notations de 4.3, de sorte qu'on a une famille de revêtements doubles $\tilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{C} = \tilde{\mathscr{C}}/\sigma \to T$.

On a aussi choisi un faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur $\tilde{\mathscr{C}}$ satisfaisant à $\mathrm{Nm}\, \mathscr{M} = \omega_{\mathscr{C}/T}$ et $H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{M}_t) = 0$ pour tout t.

On prend deux sections disjointes r et s et on définit le sous-espace analytique $\mathscr{S}^{r,s}$ de la variété de Prym $\mathscr{P}$ en suivant la procédure utilisée dans [Kl-L]: à l'aide du faisceau de Poincaré sur $\tilde{\mathscr{C}} \times_T \mathrm{Pic}^{\mathscr{M}}(\tilde{\mathscr{C}}/T)$, on construit deux faisceaux localement libres $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{Pic}^{\mathscr{M}}(\tilde{\mathscr{C}}/T)$ de rangs respectifs M et $M + 2$, ainsi qu'un morphisme $f: \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ tels qu'on ait ensemblistement:

$$\{\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^{\mathscr{M}}(\tilde{\mathscr{C}}/T) | \mathrm{Rang}\, f_{\mathscr{L}} \leqslant M - 2\}$$
$$= \{\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^{\mathscr{M}}(\tilde{\mathscr{C}}/T) | \forall t \in T\ h^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t \otimes \mathcal{O}(-r(t) - s(t))) \geqslant 2\}.$$

L'espace $\mathscr{S}^{r,s}$ est alors défini comme la variété déterminantielle:

$$\mathscr{S}^{r,s} = \{\text{zéros de } \Lambda^{M-1} f_{|\mathscr{P}}\},$$

de sorte que, lorsque $\mathscr{C}_t$ est lisse, $\mathscr{S}_t^{r,s}$ est l'ensemble des singularités stables de $\Xi_t \cdot \Xi_{t,a(t)}$ avec $a(t) = r(t) + s(t) - \sigma r(t) - \sigma s(t)$.

On a alors:

PROPOSITION 5.5. *Le sous-espace $\mathscr{S}^{r,s}$ de $\mathscr{P}$ est vide ou de codimension partout $\leqslant 5$.*

■ On prend $N + 1$ sections $x_0, \ldots, x_N$ de $\tilde{\mathscr{C}} \to T$ de façon que:

(5.6) $r, s, x_0, \ldots, x_N$ soient disjointes deux à deux.

(5.7) Le multidegré de $\mathscr{M}_t(r(t) + s(t) - \Sigma_{i=1}^N x_i(t))$ ait toutes ses composantes < 0 pour tout t.

On prend les notations suivantes:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P} \times_T \tilde{\mathscr{C}} \arrow[dd, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & & \\
& \mathscr{P} \arrow[r, "p"] & T. \\
\mathscr{P} \times_T \mathscr{C} \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

On désignera encore par $r, s, x_0, \ldots, x_N$ les sections de $\tilde{f}$ induites par $r, s, x_0, \ldots, x_N$ et par $R, S, X_0, \ldots, X_N$ leurs images dans $\mathscr{P} \times_T \tilde{\mathscr{C}}$.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de Poincaré sur $\mathscr{P} \times_T \tilde{\mathscr{C}}$. Il satisfait à $\mathscr{F}_{|\{\mathscr{L}_t\} \times \tilde{\mathscr{C}}} \simeq \mathscr{L}_t$ pour $\mathscr{L}_t \in \mathscr{P}$, et $\mathscr{F}_{|X_0} \simeq \mathscr{O}_{X_0}$.

Le faisceau $\pi_* \mathscr{F} = \mathscr{E}$ est localement libre de rang 2 sur $\mathscr{P} \times_T \mathscr{C}$. Il est muni d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans $\omega_{\mathscr{P} \times_T \mathscr{C}/\mathscr{P}}$ (cela se montre comme dans la Proposition 3.4 de [B1]).

En suivant [Mu 2], on introduit:

$$\mathscr{A} = \pi_* \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) \quad \text{diviseur de Cartier sur } \mathscr{P} \times_T \mathscr{C}$$

$$\mathscr{V} = f_*(\mathscr{E}(\mathscr{A})/\mathscr{E}(-\mathscr{A}))$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{W}_1 &= f_*(\mathscr{E}(\mathscr{A}) \\ \mathscr{W}_2 &= f_*(\mathscr{E}/\mathscr{E}(-\mathscr{A})) \end{aligned}\right\} \text{sous-faisceaux de } \mathscr{V}.$$

Par (5.7), on a:

$$\forall \mathscr{L}_t \in \mathscr{P} \qquad H^0(\mathscr{C}_t, \mathscr{E}_{\mathscr{L}_t}(-\mathscr{A}_t)) \simeq H^0\left(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t\left(-\sum_{i=1}^N \pi x_i(t)\right)\right) = 0.$$

On en conclut comme dans *loc. cit.* que $\mathscr{W}_1$, $\mathscr{W}_2$ et $\mathscr{V}$ sont localement libres de rangs respectifs $2N$, $2N$ et $4N$. Il existe une forme quadratique non dégénérée sur $\mathscr{V}$ pour laquelle $\mathscr{W}_1$ et $\mathscr{W}_2$ sont totalement isotropes. On a aussi:

$$\forall \mathscr{L}_t \in \mathscr{P} \qquad \mathscr{W}_{1, \mathscr{L}_t} \cap \mathscr{W}_{2, \mathscr{L}_t} \simeq H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t).$$

On aura aussi besoin de:

$$\mathscr{W}_0 = f_*(\pi_*(\mathscr{F}(-R-S)) \otimes \mathcal{O}(\mathscr{A})) \subset \mathscr{W}_1,$$

qui satisfait à:

- $\mathscr{W}_{0,\mathscr{L}_t} \simeq H^0(\mathscr{C}_t, \pi_*(\mathscr{L}_t(-r_t - s_t) \otimes \mathcal{O}(\Sigma x_i(t)))$
  $\simeq H^0(\mathscr{C}_t, \mathscr{L}_t(-r_t - s_t + \pi^*\mathscr{A}_t))$
- $\mathscr{W}_0$ est localement libre de rang $2N-2$ (appliquer 5.7).

On a le diagramme commutatif suivant, analogue à celui de *loc. cit.* page 183:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & & H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t(-r_t - s_t)) & \to & H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t) = (\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2)_{\mathscr{L}_t} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & & H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t(-r_t - s_t + \pi^*\mathscr{A}_t)) & \to & H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t(\pi^*\mathscr{A}_t)) = \mathscr{W}_{1,\mathscr{L}_t} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t(-r_t - s_t + \pi^*\mathscr{A}_t) \otimes \mathcal{O}_{\pi^*\mathscr{A}_t}) & = & H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t(\pi^*\mathscr{A}_t) \otimes \mathcal{O}_{\pi^*\mathscr{A}_t}),
\end{array}$$

qui prouve que:

$$(\mathscr{W}_0 \cap \mathscr{W}_2)_{\mathscr{L}_t} \simeq H^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t(-r_t - s_t)).$$

Ensemblistement, on a donc:

$$\mathscr{S}^{r,s} = \{\mathscr{L} \in \mathscr{P} \mid \dim(\mathscr{W}_{0,\mathscr{L}} \cap \mathscr{W}_{2,\mathscr{L}}) \geqslant 2\}.$$

Pour montrer la proposition, il suffit donc d'appliquer le lemme suivant:

LEMME 5.8. *Soit P une variété irréductible, $E \to P$ un fibré vectoriel de rang $2n$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q, W^n et W^k des sous-fibrés de E de rangs respectifs n et $k < n$, isotropes pour Q. Alors le lieu:*

$$\{x \in P \mid \dim W_x^n \cap W_x^k \geqslant r\}$$

est vide ou de codimension au plus $r(r-1)/2 + r(n-k)$ en tout point.

■ Comme dans 1.6 de [H], il suffit de montrer que si V est un espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q, Λ_0 un sous-espace vectoriel isotrope de dimension n, Σ^k la sous-variété irréductible (cf. [G-H] page 739) de $G(k, V)$ formée des espaces isotropes, alors:

$$\Sigma^k(\Lambda_0) = \{\Lambda^k \in \Sigma^k \mid \dim \Lambda^k \cap \Lambda_0 \geqslant r\}$$

est fermé irréductible de codimension $r(r-1)/2 + r(n-k)$.

Comme dans 1.5 de [H] on introduit:

$$\Gamma = \{(\Lambda^k, \Delta) \in \Sigma^k \times \mathrm{Gr}(r, \Lambda_0) | \Delta \subset \Lambda^k\}.$$

Par [G-H] page 739, la fibre de $\mathrm{pr}_2 \colon \Gamma \to \mathrm{Gr}(r, \Lambda_0)$ est irréductible de dimension $(k-r)(2n-2r-k+r) - (k-r)(k-r+1)/2$. La projection $\mathrm{pr}_1 \colon \Gamma \to \Sigma^k$ est birationnelle sur son image, qui est $\Sigma^k(\Lambda_0)$. On a donc:

$$\begin{aligned}\mathrm{Codim}_{\Sigma^k} \Sigma^k(\Lambda_0) &= \mathrm{Codim}_{\Sigma^k}\{\text{fibre de } \mathrm{pr}_2\} - \dim \mathrm{Gr}(r, \Lambda_0)\\ &= k(2n-k) - \frac{k(k+1)}{2} - (k-r)(2n-2r-k+r)\\ &\quad + \frac{(k-r)(k-r+1)}{2} - r(n-r)\\ &= 2nr - r^2 - kr + \frac{r(r-1)}{2} - nr + r^2\\ &= r(n-k) + \frac{r(r-1)}{2}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

§6. L'exemple fondamental. On va maintenant appliquer les résultats des sections 4 et 5 à la situation suivante. Soit Δ le disque unité dans $\mathbb{C}$. On considère une famille $\tilde{f} \colon (\tilde{\mathscr{C}}, \sigma) \to \Delta$ satisfaisant à:

- $\tilde{\mathscr{C}}$ est une surface lisse.
- $\mathscr{C}_0$ est obtenue à partir d'une courbe générique N de genre $g \geqslant 6$ en identifiant deux points génériques p et q de N.
- Pour $t \neq 0$, $\mathscr{C}_t$ est une courbe lisse irréductible générale de genre $g+1$.
- $\pi_0 \colon \tilde{\mathscr{C}}_0 \to \mathscr{C}_0$ est le revêtement de Wirtinger de $\mathscr{C}_0$, de sorte que $\tilde{\mathscr{C}}_0$ est obtenue à partir de l'union disjointe $N_1 \sqcup N_2$ ($N_1 = N_2 = N$) en identifiant p (resp. q) sur N_1 à q (resp. p) sur N_2.

Si L_0 est un faisceau inversible de degré g sur C_0 tel que $L_0^{\otimes 2} \simeq \omega_{C_0}$, il ressort de [H] Theorem 2.14, que:

$$\begin{cases}\pi_0^* L_0 \text{ est de multidegré } (g, g)\\ h^0(\pi_0^* L_0) = 2h^0(L_0) \pm 1 \text{ est impair.}\end{cases}$$

En utilisant ensuite Lemma 2.1 iii) de [B1], on peut conclure que tout faisceau $\mathscr{M}$ sur $\tilde{\mathscr{C}}$ qui satisfait aux conclusions de 4.4, à savoir:

$$\mathrm{Nm}\, \mathscr{M} = \omega_{\mathscr{C}/\Delta}, \qquad h^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{M}_t) = 0,$$

est de multidegré $(g-1, g+1)$ ou $(g+1, g-1)$ sur $\tilde{\mathscr{C}}_0$. On passe d'un cas à l'autre en prenant l'image de $\mathscr{M}$ par σ^*.

Le choix de $\mathscr{M}$ définit donc une famille de variétés de Prym $\mathscr{P}$. Si par exemple $\deg \mathscr{M}_0 = (g-1, g+1)$, on a $\mathscr{P}_0 \subset \mathrm{Pic}^{(g-1,g+1)}\tilde{\mathscr{C}}_0$. On sait d'autre part ([B1] Theorem 5.4) que $\mathscr{P}_0 \simeq JN$. Ceci peut se voir de la façon suivante. Soit n la normalisation de $\tilde{\mathscr{C}}_0$, pr_1 la projection $J(N_1 \sqcup N_2) \to JN_1 \simeq JN$. Alors le morphisme:

$$\mathrm{pr}_1 n^*\colon \mathscr{P}_0 \to J^{g-1}N$$

est un isomorphisme et envoie:

$$\Xi_0 = \{\mathscr{L} \in \mathscr{P}_0 | h^0(\mathscr{L}) \geqslant 2\}$$

sur

$$\Theta = \{L \in J^{g-1}N | h^0(L) \geqslant 1\}.$$

■ Soit $\mathscr{L} \in \mathscr{P}_0$. On a $\mathscr{L} \otimes \sigma^*\mathscr{L} = \omega_{\tilde{\mathscr{C}}_0}$ donc $n^*\mathscr{L} = (L, \omega_N(p+q) \otimes L^{-1})$, avec $L \in J^{g-1}N$. On a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathscr{L}) \xrightarrow{n^*} H^0(L) \oplus H^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}) \longrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

Si $L \notin \Theta$, on a $H^0(L) = H^0(\omega_N \otimes L^{-1}) = 0$ et:

$$H^0(\mathscr{L}) \simeq \{u \in H^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1})\, u(p) = u(q) = 0\}$$

$$\simeq H^0(\omega_N \otimes L^{-1}) = 0 \quad \text{soit} \quad \mathscr{L} \notin \Xi_0.$$

Donc $\mathrm{pr}_1 n^*(\Xi_0) \subset \Theta$. Comme Θ est irréductible, on a égalité. ■

On va maintenant déterminer quels points de Sing Θ correspondent à des singularités stables au sens des variétés de Prym.

On adopte les notations du §3, à savoir:

$$W = W^0_{g-3} \subset J^{g-3}N$$

$$W_{p,q} = W + p + q \subset J^{g-1}N.$$

LEMME 6.1. *Les singularités stables de Ξ_0 sont les points de $W_{p,q} \cap$* Sing Θ.

■ On garde les notations ci-dessus.

Si $h^0(\mathscr{L}) \geqslant 4$ alors $\mathscr{L}$ correspond à un point singulier de Ξ_0 donc L à un point singulier de Θ et $h^0(L) \geqslant 2$. Si $L \notin W_{p,q}$ alors: $h^0(L(-p-q)) = 0$, $h^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}) = 2$ et $h^0(L) = 2$. Donc toutes les sections de $\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}$ sont nulles en p et q et $H^0(\mathscr{L}) \simeq H^0(L(-p-q)) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1})$ est de dimension

2. C'est une contradiction, donc $L \in W_{p,q}$. Réciproquement, si $L \in W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$ alors pour $s \in H^0(L(-p-q))$ et $\bar{s}, \bar{t} \in H^0(\omega_N \otimes L^{-1})$ linéairement indépendantes, on a $n^* H^0(\mathscr{L}) \supset \{(ss_{pq}, 0); (0, \bar{s}s_{pq}); (0, \bar{t}s_{pq})\}$ et $h^0(\mathscr{L}) \geqslant 3$. Comme $h^0(\mathscr{L})$ est pair, on a bien $h^0(\mathscr{L}) \geqslant 4$. ■

Remarque 6.2. On a introduit en 4.3 le fermé suivant de $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{S} = \bigcup_{t \in \Delta} \{\text{singularités stables de } \Xi_t\}.$$

Les singularités de Ξ étant toutes stables pour un revêtement générique, on a $\mathscr{S}_t = \operatorname{Sing} \Xi_t$ pour $t \neq 0$. Il résulte de [W2] que $\lim_{t \to 0} \mathscr{S}_t \subset W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \operatorname{Sing} \Theta$, qui est de dimension $\leqslant g - 6$ par 3.9. On en déduit que $\mathscr{S}$ est réductible de codimension partout 6 dans $\mathscr{P}$. Une de ses composantes est $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$ (au-dessus de 0), les autres dominent Δ.

On considère maintenant deux sections disjointes r et s de $\tilde{\mathscr{C}} \to \Delta$. Quitte à prendre des images par σ, on peut supposer que $r_0, s_0 \in N_2 - N_1$.

Le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\tilde{\mathscr{C}}}(r + s - \sigma r - \sigma s + N_2)$ est de multidegré nul sur chaque fibre. Il correspond à une section a de $\mathscr{P}^0 \to \Delta$, qui satisfait à:

$$\forall t \neq 0 \qquad a_t \text{ correspond à } \mathcal{O}_{\tilde{\mathscr{C}}_t}(r_t + s_t - \sigma r_t - \sigma s_t)$$

$$a_0 \text{ correspond à } \operatorname{pr}_1 n^* \mathcal{O}_{\tilde{\mathscr{C}}_0}(r_0 + s_0 - \sigma r_0 - \sigma s_0 + N_2)$$

$$= \mathcal{O}_N(-r_0 - s_0 + p + q) \text{ dans } JN.$$

On introduit comme en 5.4 le sous-espace fermé $\mathscr{S}^{r,s}$ de $\mathscr{P}$, dont l'ensemble sous-jacent est:

$$\{\mathscr{L} \in \mathscr{P} \mid h^0(\tilde{\mathscr{C}}_t, \mathscr{L}_t \otimes \mathcal{O}(-r_t - s_t)) \geqslant 2\}.$$

Par le Théorème 5.1, on a:

$$\forall t \neq 0 \qquad \mathscr{S}_t^{r,s} = \operatorname{Sing}(\Xi_t \cdot \Xi_{t,a_t}).$$

Au-dessus de 0, on a (on laisse tomber les indices 0 dans r_0, s_0 et a_0):

PROPOSITION 6.3. *Pour $g \geqslant 6$, l'espace analytique $\mathscr{S}_0^{r,s}$ est de dimension pure $g - 5$ et a 3 composantes irréductibles, à savoir $(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta)$, $(-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing} \Theta_a$ et $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$. Il est lisse en tout point de $(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta) \backslash (-W_{r,s})$.*

■ On sait déjà (Lemme 6.1) que les points de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$ correspondent à des faisceaux inversibles $\mathscr{L}$ sur $\tilde{\mathscr{C}}_0$ avec $h^0(\mathscr{L}) \geqslant 4$, donc a fortiori à des éléments de $\mathscr{S}_0^{r,s}$.

Ceux de $-(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta) + a = (-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing} \Theta_a$ correspondent à des faisceaux inversibles $\mathscr{L}$ sur $\tilde{\mathscr{C}}_0$ avec $h^0(\mathscr{L}(\sigma r + \sigma s - r - s)) \geqslant 4$ donc aussi à des éléments de $\mathscr{S}_0^{r,s}$.

Si L est un point de $W_{p,q} \cap -W_{r,s}$, on peut prendre $u \in H^0(L(-p-q))$, $\bar{u} \in H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s))$ non nulles.

Avec les notations de la démonstration précédant 6.2, on a $n^*H^0(\mathscr{L}(-r-s)) \supset \{(us_{pq}, 0); (0, \bar{u}s_{pqrs})\}$ et $\mathscr{L}$ est bien un point de $\mathscr{S}_0^{r,s}$.

Réciproquement, si $\mathscr{L}$ correspond à un point de $\mathscr{S}_0^{r,s}$, on distingue deux cas:

i) Si $h^0(L) \geqslant 2$ ou $h^0(L(-p-q+r+s)) \geqslant 2$ on est dans $\Theta_a \cap \operatorname{Sing}\Theta$ ou $\Theta \cap \operatorname{Sing}\Theta_a$. Si par exemple $L \in \Theta_a \cap \operatorname{Sing}\Theta$, on a par proposition 3.8:

$$L \in [(-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta] \cup [W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta].$$

Si L appartient à la première mais pas à la seconde de ces deux composantes, on a:

$$h^0(L) = 2 \qquad h^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s)) = 1$$

$$h^0(L(-p-q)) = 0 \qquad h^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)) = 1.$$

On en déduit:

$$n^*H^0(\mathscr{L}(-r-s)) \simeq H^0(L(-p-q)) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s)).$$

Mais c'est impossible puisque l'espace vectoriel de droite est de dimension 1.

On a donc $L \in W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$.

De même, si $L \in \Theta \cap \operatorname{Sing}\Theta_a$, on en déduit $L \in (-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta_a$.

ii) Si $h^0(L) = h^0(L(-p-q+r+s)) = 1$, alors $n^*H^0(\mathscr{L}(-r-s)) \simeq H^0(L) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s))$, ce qui n'est possible que si $H^0(L) \simeq H^0(L(-p-q))$ et $H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)) \simeq H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s))$ i.e. $L \in W_{pq} \cap (-W_{rs})$.

On va maintenant calculer l'espace tangent en $\mathscr{L}$ à $\mathscr{S}_0^{r,s}$. Remarquons tout d'abord que la construction de $\mathscr{S}^{r,s}$ commute aux changements de base. En particulier, la fibre $\mathscr{S}_0^{r,s}$ est l'espace $\mathscr{S}^{r,s}$ associé à la "famille" $\tilde{\mathscr{C}}_0 \to \{0\}$ et aux sections r et s, c'est-à-dire $\mathscr{P}_0 \cdot (\tilde{\mathscr{W}}^1_{(g-1,g-1)})_{r,s}$. L'espace tangent à $\mathscr{S}_0^{r,s}$ en $\mathscr{L}$ s'obtient de la façon suivante pour $h^0(\tilde{\mathscr{C}}_0, \mathscr{L}(-r-s)) = 2$: si $\{u_1, u_2\}$ est une base de $H^0(\mathscr{L}(-r-s))$ et $\{\bar{u}_1 = \sigma^*u_1 s_{rs}\sigma^*s_{rs}, \bar{u}_2 = \sigma^*u_2 s_{rs}\sigma^*s_{rs}, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ une base de $H^0(\omega_{\tilde{\mathscr{C}}_0} \otimes \mathscr{L}^{-1}(r+s))$ alors $T_{\mathscr{L}}\mathscr{S}_0^{r,s}$ est l'orthogonal de $\{u_i\bar{u}_j - \sigma^*(u_i\bar{u}_j)\}_{1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 4}$, éléments de l'espace des sections de $\omega_{\tilde{\mathscr{C}}_0}$ antiinvariantes par σ^*, qui est $T^*_{\mathscr{L}}\mathscr{P}_0$.

De par la forme particulière de $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$, ces 8 éléments se réduisent aux 5 suivants:

$$\{(u_1\sigma^*u_2 - u_2\sigma^*u_1)s_{rs}\sigma^*s_{rs}, u_i\bar{u}_j - \sigma^*(u_i\bar{u}_j), 1 \leqslant i \leqslant 2 < j \leqslant 4\}.$$

On va calculer cet espace tangent dans le cas où $\mathscr{L}$ correspond à un point L de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ avec $L \notin (-W_{r,s})$, pour montrer qu'il est de dimension $g-5$.

On a alors:

$$h^0(L) \geqslant 2 \qquad h^0(L(-p-q)) \geqslant 1$$

$$h^0(L(r+s)) = 2.$$

On en déduit facilement que:

$$h^0(L) = h^0(L(r+s)) = 2$$

$$h^0(L(-p-q)) = h^0(L(r+s-p-q)) = 1\,.$$

On a les suites exactes suivantes:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathscr{L}(-r-s)) \xrightarrow{n^*} H^0(L) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)) \longrightarrow \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2$$

$$0 \longrightarrow H^0(\omega_{\mathscr{C}_0} \otimes \mathscr{L}^{-1}(r+s)) \xrightarrow{n^*} H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q)) \oplus H^0(L(r+s))$$

$$\longrightarrow \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2\,.$$

On prend les bases suivantes:

$$\{u_1 = us_{pq}, u_2\} \quad \text{pour} \quad H^0(L)$$

$$\{\bar{u}\} \quad \text{pour} \quad H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s))$$

$$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\} \quad \text{pour} \quad H^0(\omega_N \otimes L^{-1})$$

$$\{\bar{u}_1 s_{pq}, \bar{u}_2 s_{pq}, \bar{u}s_{rs}\} \quad \text{pour} \quad H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q))$$

$$\{us_{pqrs}, u_2 s_{rs}\} \quad \text{pour} \quad H^0(L(r+s))\,.$$

Comme $\bar{u}$ n'est pas nulle en p et en q, $(0, \bar{u})$ n'est pas dans $n^*H^0(\mathscr{L}(-r-s))$. Cet espace est donc de dimension 2. On peut choisir u_2 de façon qu'une base en soit $\{(us_{pq}, 0); (u_2, \bar{u})\}$. Une base de $n^*H^0(\omega_{\mathscr{C}_0} \otimes \mathscr{L}^{-1}(r+s))$ est alors $\{(0, us_{pqrs}); (\bar{u}s_{rs}, u_2 s_{rs}); (\bar{u}_1 s_{pq}, 0); (\bar{u}_2 s_{pq}, 0)\}$.

L'espace tangent $T_{\mathscr{L}}\mathscr{S}_0^{r,s}$ est l'orthogonal dans $T_{\mathscr{L}}\mathscr{P}_0 \simeq T_L JN \simeq H^0(N, \omega_N)^*$ de $\{u\bar{u}s_{rs}, u\bar{u}_1 s_{pq}, u\bar{u}_2 s_{pq}, u_2\bar{u}_1, u_2\bar{u}_2\}$.

En comparant avec les calculs de la démonstration de 3.2, on voit (avec $t = \bar{u}s_{rs}$, $s_D = u$, $t_i = \bar{u}_i$, $s_i = u_i$) que:

$$T_{\mathscr{L}}\mathscr{S}_0^{r,s} \simeq T_L(W_{p,q} \cdot \operatorname{Sing} \Theta)\,.$$

La fin de la démonstration de 3.2 montre alors que cet espace tangent est de dimension $g-5$, ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 6.4. On peut montrer que $\mathscr{S}_0^{r,s}$ est lisse en un point générique de $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$, par la même méthode que celle employée ci-dessus. En particulier, par 3.2 et 3.10, sa classe de cohomologie donc aussi celle de $\mathscr{S}_t^{r,s}$ pour tout t, est, par 3.7 et 3.10: $\theta^5/24 + \theta^5/24 + \theta^5/20 = \frac{2}{15}\theta^5$.

On peut maintenant montrer le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 6.5. *Pour $g \geqslant 6$, le sous-espace analytique $\mathscr{S}^{r,s}$ de $\mathscr{P}$ est irréductible, de codimension 5 et domine Δ.*

■ Il suffit de montrer que toute composante irréductible $\mathscr{T}$ de $\mathscr{S}^{r,s}$ vérifie: (quitte à réduire Δ):

i) $\mathscr{T}$ est de codimension 5 et domine Δ.
ii) $\mathscr{T}_0 \supset W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$.

En effet, il résulte de 6.3 que $\mathscr{S}^{r,s}$ est lisse en un point générique de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$, donc qu'une seule composante irréductible de $\mathscr{S}^{r,s}$ contient $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$. Le théorème découle alors immédiatement de i) et ii).

Par Proposition 5.5, on sait que $\mathscr{S}^{r,s}$ est vide ou partout de codimension $\leqslant 5$ dans $\mathscr{P}$. Comme sa fibre en 0 est de codimension partout 5 dans $\mathscr{P}_0$ (Proposition 6.3), on en déduit i).

On peut supposer que pour tout t dans un sous-ensemble dense Ω de Δ, on a:

$$\begin{cases} \mathscr{P}_t \text{ est simple} \\ a_t = r_t + s_t - \sigma r_t - \sigma s_t \text{ n'est pas d'ordre fini dans } \mathscr{P}_t. \end{cases}$$

On peut alors déduire de [B-D] que:

$$\forall t \in \Omega \qquad \dim(\mathscr{T}_t \cap \operatorname{Sing} \Xi_t) \geqslant g - 6.$$

(6.6) On peut remarquer que ceci redémontre le Théorème 5.2.5 de [D], à savoir que $\dim \operatorname{Sing} \Xi \geqslant g - 6$ pour toute variété de Prym (P, Ξ).

Or on sait par [W3] que $\operatorname{Sing} \Xi_t = \mathscr{S}_t$ est de dimension pure $g - 6$. Il s'ensuit que $\mathscr{T}_t$ contient une composante de $\operatorname{Sing} \Xi_t$, pour $t \in \Omega$. On sait aussi ([W2] 3.4) que la limite de $\mathscr{S}_t$ quand t tend vers 0 est contenue dans $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta \cap (-W_{p,q})$, qui est de dimension $\leqslant g - 6$ par 3.9. On en déduit que $\mathscr{T}_0$ contient une composante de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta \cap (-W_{p,q})$ de dimension $(g - 6)$. Or il résulte de Proposition 6.3 que les composantes de $\mathscr{T}_0$ sont parmi $\{(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta), ((-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing} \Theta_a), (W_{p,q} \cap (-W_{r,s}))\}$. L'assertion ii) résulte alors du lemme suivant.

LEMME 6.7. *Soient p, q fixés. Alors pour r et s génériques, aucune composante de dimension $g - 6$ de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta \cap (-W_{p,q})$ n'est contenue dans $(-W_{r,s})$.*

■ Il revient au même de montrer qu'aucune composante Z n'est contenue dans $W_{r,s}$. Si Z était contenue dans tous les $W_{r,s}$, on aurait $Z \subset W^2_{g-1}$, ce qui est impossible puisque $\dim Z = g - 6$ et $\dim W^2_{g-1} = g - 9$ (cf. 1.2). ■

On en déduit aussi le résultat annexe suivant:

COROLLAIRE 6.8. *Soit $\pi: \tilde{C} \to C$ un revêtement étale entre courbes lisses connexes, où C est générique de genre $g + 1 \geqslant 7$. Soient r et s deux points génériques de $\tilde{C}$, a l'élément de la variété de Prym (P, Ξ) de π associé à $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(r + s - \sigma r - \sigma s)$. Alors $\operatorname{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a)$ est irréductible de dimension $g - 5$. Sa classe de cohomologie est $\frac{2}{15}[\Xi]^5$.*

Remarque 6.9. Lorsque $g = 5$, on montre comme ci-dessus que $\mathrm{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a)$ n'est jamais vide et est génériquement un ensemble de $\frac{2}{15}5! = 16$ points.

§7. Le théorème principal. Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 7.1. *Pour tout $g \geqslant 7$, l'ensemble des variétés de Prym $\mathscr{P}_g$ est une composante irréductible de $\mathscr{N}^g_{g-6}$.*

■ *Démonstration du théorème.* On va montrer que pour $g \geqslant 6$, $\mathscr{P}_{g+1}$ est une composante de $\mathscr{N}^{g+1}_{g-5}$. Rappelons tout d'abord que $\mathscr{P}_{g+1}$ est contenu dans $\mathscr{N}^{g+1}_{g-5}$ pour $g \geqslant 5$ ([D] Théorème 5.2.5 ou 6.6 de cet article).

Considérons la frontière $\partial\mathscr{P}_{g+1} \subset \partial\mathscr{A}_{g+1}$ de $\mathscr{P}_{g+1}$ dans la compactification partielle $\mathscr{A}^{(1)}_{g+1}$ de $\mathscr{A}_{g+1}$ (cf. 2.4). Elle est de dimension pure $3g + 2$ et on a $\rho_{g+1}(\partial\mathscr{P}_{g+1}) = \mathscr{P}_g$ ([F-S 2] Theorem 3.6). Il résulte aussi de (2.5) que:

$$\mathscr{P}_{g+1} \subset \mathscr{N}^{g+1}_{g-5}$$

$$\Rightarrow \partial\mathscr{P}_{g+1} \subset \partial\mathscr{N}^{g+1}_{g-5} \subset \rho^{-1}_{g+1}(\mathscr{N}^g_{g-5}) \cup \partial'\mathscr{N}^{g+1}_{g-5}.$$

Considérons la famille $f\colon \mathscr{P} \to \Delta$ étudiée au paragraphe 6. Elle est munie d'une section $a\colon t \mapsto \mathcal{O}(r(t) + s(t) - \sigma r(t) - \sigma s(t))$. Il ressort de [F-S 2] Theorem 5.2, que la famille de variétés quasi-abéliennes associée est la famille de variétés de Prym associée à la famille de revêtements doubles suivante:

$$\tilde{\mathscr{C}}/_{r \sim \sigma s \text{ et } s \sim \sigma r} \to \mathscr{C}/_{\pi r \sim \pi s} \to \Delta.$$

On peut donc lui associer un morphisme $\varphi\colon \Delta \to \partial\mathscr{P}_{g+1}$.

Soit $\mathscr{C}_{g+1}$ une composante irréductible de $\mathscr{N}^{g+1}_{g-5}$ contenant $\mathscr{P}_{g+1}$ et $\partial\mathscr{C}_{g+1}$ sa frontière. Soit $\partial\mathscr{P}^*_{g+1}$ une composante irréductible de $\partial\mathscr{P}_{g+1}$ contenant $\varphi(\Delta)$, $\partial\mathscr{C}^*_{g+1}$ une composante irréductible de $\partial\mathscr{C}_{g+1}$ contenant $\partial\mathscr{P}^*_{g+1}$.

On a alors:

$$\begin{cases} \varphi(\Delta) \subset \partial\mathscr{P}^*_{g+1} \subset \partial\mathscr{C}^*_{g+1} \subset \rho^{-1}_{g+1}(\mathscr{N}^g_{g-5}) \cup \partial'\mathscr{N}^{g+1}_{g-5} \\ \varphi(\Delta) \not\subset \rho^{-1}_{g+1}(\mathscr{N}^g_{g-5}) \quad \text{par 6.2 par exemple} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial\mathscr{C}^*_{g+1} \subset \partial'\mathscr{N}^{g+1}_{g-5}.$$

On veut maintenant appliquer 2.6 à la famille $\mathscr{P} \to \Delta$ munie de la section a.

L'hypothèse (i) est vérifiée par 6.8 avec $\mathscr{T}^0 = \mathscr{S}^{r,s}$ et l'hypothèse (iii) grâce au fait qu'une jacobienne générique a pour seuls automorphismes $\pm\mathrm{id}$.

Si (ii) n'était pas vérifiée, on aurait: $\forall t \neq 0$, il existe une composante Z_t de $\mathrm{Sing}\,\Xi_t$ telle que $Z_{t,a_t} \subset \mathrm{Sing}\,\Xi_t$.

Comme en 6.5, on peut supposer que $\mathscr{P}_t$ est simple pour t dans un sous-ensemble dense de Δ. L'ensemble des x_t tels que $\dim(\mathrm{Sing}\,\Xi_t) \cap (\mathrm{Sing}\,\Xi_{t,x_t}) = g - 6$ est alors fini. Pour un choix générique de r et s, (ii) est donc vérifiée.

Il s'ensuit que la codimension de $\partial \mathscr{C}^*_{g+1}$ en $\varphi(0)$ est inférieure ou égale à la codimension de l'espace projectif engendré par l'image de $(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta) \cup ((-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing} \Theta_a) \cup (W_{p,q} \cap (-W_{r,s}))$ par l'application rationnelle:

$$z \mapsto \left[\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z_1}(z, \tau), \ldots, \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z_g}(z, \tau), \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_i \partial z_j}(z, \tau) + \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_i \partial z_j}(z - a, \tau) \right]$$

$$\text{avec} \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z_i}(z, \tau) + \mu \frac{\partial \theta}{\partial z_i}(z - a, \tau) = 0$$

$$a \text{ correspondant à } \mathcal{O}(p + q - r - s) \in JN.$$

Par 3.4, l'image de la première composante (pour laquelle, génériquement, $\mu = 0$) engendre $\mathbb{P}(\{0\} \times V)$ avec $\dim V = \binom{g+1}{2} - (3g - 2)$.

L'image de la seconde composante est la même. Par 3.10, l'image de la troisième engendre $\mathbb{P}(V')$, où la projection de V' sur les g premiers facteurs est de dimension $g - 4$.

On a donc:

$$\dim \partial \mathscr{C}^*_{g+1} \leqslant 4 + 3g - 2 = 3g + 2.$$

Comme $\partial \mathscr{C}_{g+1}$ est de dimension pure $\dim \mathscr{C}_{g+1} - 1$, on en déduit:

$$3g + 3 = \dim \mathscr{P}_{g+1} \leqslant \dim \mathscr{C}_{g+1} \leqslant 3g + 2 + 1,$$

soit $\mathscr{P}_{g+1} = \mathscr{C}_{g+1}$. ■

Bibliographie

[A-M] A. Andreotti et A. Mayer, *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **21** (1967), 189–238.

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves, I*, Springer Verlag, New York.

[B1] A. Beauville, *Prym varieties and the Schottky problem*, Inventiones Math. **41** (1977), 149–196.

[B2] ———, *Sous-variétés spéciales des variétés de Prym*, Comp. Math. **45** (1982), 357–383.

[B-D] A. Beauville et O. Debarre, *Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, **14** (1987), 613–623.

[D] O. Debarre, *Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension* 3, Duke Math. J. **57** (1988), 221–273.

[De] P. Deligne, "Le lemme de Gabber," In *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell*, Exposé V, Astérisque **127** (1985).

[F-L] W. Fulton et R. Lazarsfeld, *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors*, Acta Math. **146** (1981), 271–283.

[F-S 1] R. Friedman et R. Smith, *The generic Torelli theorem for the Prym map*, Inventiones Math. **67** (1982), 473–490.

[F-S 2] ———, *Degenerations of Prym varieties and intersections of three quadrics*, Inventiones Math. **85** (1986), 615–635.

[G] D. GIESEKER, *Stable curves and special divisors: Petri's conjecture.* Invent. Math. **66** (1982), 251–275.

[G1] M. GREEN, *Quadrics of rank four in the ideal of a canonical curve*, Inventiones Math. **75** (1984), 85–104.

[G2] ———, *Koszul cohomology and the geometry of projective varieties*, J. Diff. Geom. **19** (1984), 125–171.

[G-H] P. GRIFFITHS ET J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New-York (1978).

[G-L] M. GREEN ET R. LAZARSFELD, *On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve*, Inv. Math. **83** (1986), 73–90.

[Gr] A. GROTHENDIECK, *Techniques de construction en Géométrie Analytique IX, Quelques problèmes de modules*, Séminaire H. Cartan, 13e année, Exposé n° 16 (1960/61).

[H] J. HARRIS, *Theta-characteristics on algebraic curves*, Trans. A.M.S. **271** (1982), 611–638.

[I] J. I. IGUSA, *A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions*, Math. Ann. **168** (1967), 228–260.

[K-L] G. KEMPF ET D. LAKSOV, *The determinantal formula of Schubert calculus*, Acta Math. **132** (1974), 153–162.

[Kl-L] S. KLEIMAN ET D. LAKSOV, *Another proof of the existence of special divisors.* Acta Math. **132** (1974), 163–176.

[M] I. G. MACDONALD, *Symmetric products of an algebraic curve*, Topology **1** (1962), 319–343.

[Ma] H. H. MARTENS, *On the variety of special divisors on a curve*, J. Reine Angew. Math. **227** (1967), 111–120.

[Mu 1] D. MUMFORD, *On the Kodaira Dimension of the Siegel Modular Variety*, Springer Lecture Notes **997**, Springer Verlag, New York (1983), 348–375.

[Mu 2] ———, *Theta characteristics of an algebraic curve*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **4** (1971), 181–192.

[Mu 3] ———, *Prym Varieties I, Contributions to Analysis*, Acad. Press, New York (1974), 325–350.

[N] Y. NAMIKAWA, *A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties*, Math. Ann. **221** (1976), 97–142 et 201–242.

[S-D] B. SAINT-DONAT, *On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve*, Math. Ann. **206** (1973), 157–175.

[T] M. TEIXIDOR, *For which Jacobi varieties is* Sing Θ *reducible*? J. Reine Angew. Math. **354** (1984), 141–149.

[W1] G. E. WELTERS, *The surface C-C on Jacobi varieties and 2nd order theta functions*, Acta Math. **157** (1986), 1–22.

[W2] ———, *Recovering the curve data from a general Prym variety*, Amer. J. of Math. **109** (1987), 165–182.

[W3] ———, *A theorem of Gieseker-Petri type for Prym varieties*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **18** (1985), 671–683.

BÂTIMENT 425, UNIVERSITÉ PARIS-SUD, 91405 ORSAY CEDEX FRANCE