

SUR LES FONCTIONS THETA DU SECOND ORDRE

Arnaud Beauville et Olivier Debarre

Mathématique , Université Paris - Sud

F - 91 405 Orsay Cedex (France)

Introduction

Nous discutons dans cet exposé deux conjectures liées au problème de Schottky, dues à Van Geemen et Van der Geer [7] et précisées par Donagi [6]. Ces auteurs proposent de caractériser les jacobiniennes (parmi toutes les variétés abéliennes) en termes de l'espace des fonctions thêta d'ordre 2. Nous énonçons ces conjectures au §1; dans le §2 (inspiré de [6]), nous discutons leur relation avec d'autres approches du problème de Schottky. Au §3, nous traitons, dans le style de [4], quelques exemples où les calculs peuvent être faits explicitement. Enfin au §4, nous prouvons la conjecture 2 et une version affaiblie de la conjecture 1 pour une variété abélienne principalement polarisée *générique*.

1. Enoncé des conjectures

Soit A une variété abélienne complexe, et ϑ une polarisation principale sur A . Par définition, ϑ est la classe dans $H^2(A, \mathbb{Z})$ d'un diviseur ample Θ , vérifiant $\dim \Gamma(A, \mathcal{O}_A(\Theta)) = 1$. Le diviseur Θ est uniquement déterminé à translation près. On peut de plus lui imposer d'être symétrique (c'est-à-dire stable par l'involution $a \mapsto -a$), ce que nous ferons systématiquement dans la suite; il est dès lors bien déterminé à translation près par un point d'ordre 2 de A . En vertu du théorème du carré, le faisceau $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ est alors indépendant du choix de Θ : il est canoniquement associé à la variété abélienne principalement polarisée (A, ϑ) . Il en est de même de l'espace $\Gamma = \Gamma(A, \mathcal{O}_A(2\Theta))$ de ses sections globales, ainsi que du système linéaire $|2\Theta|$. Nous identifierons Γ à l'espace des fonctions thêta du second ordre sur le revêtement universel de A .

Les éléments de Γ sont symétriques; cela entraîne que la multiplicité en

0 d'un tel élément est paire. Nous noterons Γ_0 l'hyperplan de Γ formé des sections s'annulant avec multiplicité ≥ 2 , et Γ_{00} le sous-espace des sections qui s'annulent avec multiplicité ≥ 4 . Nous désignerons par $|\Theta|_0$ et $|\Theta|_{00}$ les sous-espaces projectifs correspondants de $|\Theta|$. Enfin, soit $V(\Gamma_{00})$ le lieu de base du système linéaire $|2\Theta|_{00}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de A où toutes les sections de Γ_{00} s'annulent. Pour éviter des complications sans intérêt, nous supposerons toujours que la variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) est *indécomposable*, c'est-à-dire qu'elle ne peut s'écrire comme produit de deux variétés abéliennes principalement polarisées non nulles.

Conjecture 1. - *Si (A, Θ) n'est pas une jacobienne, l'ensemble $V(\Gamma_{00})$ est réduit à 0.*

La conjecture 2 est une version infinitésimale de la conjecture 1. Soit $T = T_0(A)$ l'espace tangent à l'origine de A ; en associant à chaque élément de Γ_{00} le terme de degré 4 de son développement de Taylor, on obtient un homomorphisme α de Γ_{00} dans l'espace $H^0(\mathbb{P}(T), \mathcal{O}(4))$ des polynômes homogènes de degré 4 sur T , bien défini à un scalaire près. En particulier, $\alpha(\Gamma_{00})$ est un système linéaire de quartiques dans $\mathbb{P}(T)$; on désigne par $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$ l'ensemble des points de base de ce système linéaire.

Conjecture 2. - *Si (A, Θ) n'est pas une jacobienne, l'ensemble $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$ est vide.*

Dans le cas des jacobiniennes, la situation est très différente :

Théorème 1. - *Soit (JC, Θ) la jacobienne d'une courbe C . On a alors :*

- a) $V(\Gamma_{00})$ est l'image $C-C$ de l'application $\delta : C \times C \rightarrow JC$ définie par $\delta(x, y) = \Theta_C(x - y)$,
- b) $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$ est l'image de l'application canonique $\kappa : C \rightarrow \mathbb{P}(T)$ (en identifiant T à $H^0(C, K_C)^*$),

sauf dans les deux cas suivants :

- a') C est une courbe de genre 4, non hyperelliptique, avec deux g_3^1 distincts; on a alors $V(\Gamma_{00}) = (C - C) \cup \{\pm t\}$, où t est la différence dans JC des deux g_3^1 sur C .
- b') C est une courbe de genre 4 avec un seul g_3^1 ; on a alors $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00}) = \kappa(C) \cup \{s\}$, où s est le sommet du cône quadratique contenant $\kappa(C)$.

Les énoncés a) et a') ont été démontrés par Welters [8]. Les énoncés b) et b') résultent essentiellement du théorème de Green (sous une forme légèrement raffinée due au premier auteur), selon lequel $\kappa(C)$ est l'intersection dans $\mathbb{P}(T)$ des cônes osculateurs aux points doubles du diviseur Θ .

2. Relation avec d'autres approches

a) Trisécantes

Le système linéaire Γ est sans point base, donc définit un morphisme ψ de A dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\Gamma^*)$ (que nous noterons simplement \mathbb{P}^N , avec $N = 2^g - 1$). L'image de ce morphisme est par définition la *variété de Kummer* K de (A, Θ) ; sous l'hypothèse (A, Θ) indécomposable, elle s'identifie au quotient de A par l'involution $a \mapsto -a$. Elle a 2^{2g} points singuliers, image par ψ des points d'ordre 2 de A .

Notons en particulier s le point $\psi(0)$. Le système $|2\Theta|_0$ est l'image réciproque par ψ du système des hyperplans de \mathbb{P}^N passant par s ; de même, les éléments de $|2\Theta|_{00}$ sont les images réciproques par ψ des hyperplans de \mathbb{P}^N qui contiennent l'espace tangent $T_s(K)$ à K en s (c'est-à-dire le sous-espace projectif de \mathbb{P}^N engendré par le cône tangent à K en s). Le lieu de base de $|2\Theta|_{00}$ est donc l'image réciproque par ψ de $T_s(K) \cap K$. Par suite la conjecture 1 signifie que *l'intersection $T_s(K) \cap K$ est réduite à $\{s\}$* , ou encore qu'il n'existe pas de droite passant par s et un autre point de K qui soit contenue dans $T_s(K)$. Appelons une telle droite une *fausse trisécante* (elle rencontre K avec multiplicité ≥ 3). La conjecture 1 dit que K n'admet pas de fausse trisécante si (A, Θ) n'est pas une jacobienne. Cette formulation est bien sûr à rapprocher de l'énoncé analogue pour les trisécantes usuelles (conjecture de la trisécante), qui est l'analogue discret de la conjecture de Novikov (cf. par exemple [3]). Mise à part la similitude de leurs énoncés, la relation entre ces deux conjectures n'est pas claire.

Remarquons au passage que la dimension de $T_s(K)$ est celle de l'espace tangent (de Zariski) de $\mathbb{C}^g/[\pm 1]$ à l'origine, soit $\frac{1}{2}g(g+1)$; la dimension de Γ_{00} est donc $2^g - \frac{1}{2}g(g+1) - 1$.

b) "Big Schottky"

La forme classique du problème de Schottky (caractérisation des jacobiniennes par les équations de Schottky-Jung) a été reformulée géométriquement par Mumford; Donagi en a donné une généralisation audacieuse, la "big Schottky conjecture" (conj. 2.11 de [6]). *Cette conjecture implique la conjecture 1* (loc. cit.); Donagi le démontre en interprétant $V(\Gamma_{oo})$ en termes du cône tangent à la variété de Schottky-Jung en un point du bord de l'espace des modules \mathcal{A}_g . Plus précisément, la conjecture de Donagi en dimension g entraîne la conjecture 1 en dimension $g-1$. Donagi annonce dans [6] les grandes lignes d'une démonstration de sa conjecture en dimension 5; ce résultat impliquerait la conjecture 1 pour $g=4$.

c) Equation K-P

Passons à la conjecture 2. Soient D un vecteur non nul de T , et \bar{D} son image dans $\mathbb{P}(T)$. Soit φ un élément de Γ_{oo} , considéré comme une fonction thêta du second ordre sur T ; par la formule de Taylor, la valeur de $\alpha(\varphi)$ en D est à une constante près $D^4\varphi(0)$, où D est vu comme un champ de vecteurs constant sur T . Dire que \bar{D} est un point base du système $\alpha(\Gamma_{oo})$ signifie donc que la forme linéaire $\varphi \mapsto D^4\varphi(0)$ sur Γ s'annule sur Γ_{oo} ; si (D_1, \dots, D_g) est une base de T , cela revient à dire qu'il existe des constantes a_{ij} ($1 \leq i \leq j \leq g$) et b telles qu'on ait

$$(1) \quad D^4\varphi(0) = \sum a_{ij} D_i D_j \varphi(0) + b \varphi(0) \quad \text{pour tout } \varphi \in \Gamma.$$

Ainsi, la conjecture 2 signifie que si (A, θ) n'est pas une jacobienne, il n'existe aucun opérateur différentiel P de la forme $P = [D^4 + \text{termes de degré plus bas}]$ satisfaisant à $P\varphi(0) = 0$ pour tout $\varphi \in \Gamma$. Il est maintenant classique qu'un énoncé de ce type se traduit en termes d'équation aux dérivées partielles, de la manière suivante. Il existe une base (φ_α) de Γ satisfaisant à la formule d'addition de Riemann

$$\theta(z+u)\theta(z-u) = \sum \varphi_\alpha(z)\varphi_\alpha(u)$$

L'équation $P\varphi(0) = 0$ pour tout $\varphi \in \Gamma$ équivaut donc à l'équation aux dérivées partielles $P_u [\theta(z+u)\theta(z-u)]_{u=0} = 0$. L'équation (1) devient ainsi

$$(2) \quad \theta D^4\theta - 4 D\theta D^3\theta + 3 (D^2\theta)^2 = \sum a_{ij} (\theta D_i D_j \theta - D_i \theta D_j \theta) + \frac{b}{2} \theta^2.$$

En divisant par θ^2 et différentiant deux fois, cela signifie que la fonction

méromorphe périodique $u = D^2 \log \theta$ vérifie l'équation non linéaire

$$(3) \quad D [D^3 u + 12u Du] = \sum a_{ij} D_i D_j u$$

Supposons que (A, θ) soit la jacobienne d'une courbe algébrique C . Le th.1 (§1) nous assure que la fonction θ satisfait à une équation du type (1) (ou (2), ou (3)), et ce pour chaque point \bar{D} de la courbe canonique. On sait qu'on obtient ainsi l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (K-P), de la forme

$$D [D^3 u + 12u Du] = DD_1 u + D_2^2 u$$

La conjecture de Novikov, démontrée par Shiota, affirme que cette équation caractérise les jacobiniennes. La conjecture 2 est donc une généralisation de la conjecture de Novikov, peut-être plus naturelle géométriquement.

3. Exemples

Nous allons étudier les ensembles $V(\Gamma_{oo})$ et $V_{inf}(\Gamma_{oo})$ dans quelques cas simples. Cette étude est basée sur la remarque suivante. Pour tout $a \in A$, la fonction $\theta(z+a) \theta(z-a)$ est une fonction thêta du second ordre. Si $a \in \Theta$, elle appartient à Γ_o ; si en outre $a \in \text{Sing } \Theta$, elle appartient à Γ_{oo} . Soit de plus D un champ de vecteurs constant sur T ; toujours pour $a \in \text{Sing } \Theta$, la fonction thêta du second ordre

$$D_a [\theta(z+a) \theta(z-a)] = \theta(z-a) D\theta(z+a) - \theta(z+a) D\theta(z-a)$$

s'annule en 0 avec multiplicité ≥ 3 , donc appartient à Γ_{oo} . Ce moyen est essentiellement le seul que nous possédions pour fabriquer explicitement des diviseurs de $|2\Theta|_{oo}$; nous allons voir qu'il permet dans certains cas de tester les conjectures 1 et 2. Il ne s'applique bien sûr qu'aux variétés abéliennes principalement polarisées dont le diviseur Θ possède suffisamment de singularités.

Rappelons d'autre part (§2,a) que la dimension de Γ_{oo} est

$$(4) \quad \dim \Gamma_{oo} = 2^g - \frac{1}{2}g(g+1) - 1.$$

a) $g=3$

Dans ce cas la formule (4) montre que $|2\Theta|_{oo}$ est formé d'un seul diviseur. Si C n'est pas hyperelliptique, il est facile de voir que le diviseur (réduit) $C-C$ appartient à $|2\Theta|$, et a multiplicité 4 à l'origine : c'est donc le diviseur cherché.

Si C est hyperelliptique, le diviseur Θ a un unique point singulier, qui est d'ordre 2 et que l'on peut donc prendre comme origine de A ; le diviseur 2Θ appartient alors à $|2\Theta|_{00}$. On en déduit aisément le th.1 dans ce cas.

b) Jacobiennes de genre 4

Soit C une courbe de genre 4, que nous supposons non hyperelliptique (le cas hyperelliptique est facile, et laissé en exercice). Le modèle canonique de C est intersection d'une quadrique Q et d'une cubique de \mathbb{P}^3 . Supposons d'abord Q lisse. Alors C a deux g_3^1 distincts, qui définissent deux points singuliers $\pm a$ de Θ . Soit (D_1, \dots, D_4) une base de T ; la méthode ci-dessus fournit les éléments suivants de Γ_{00} :

$$\varphi_0(z) = \theta(z+a)\theta(z-a); \quad \varphi_i(z) = \theta(z-a)D_i\theta(z+a) - \theta(z+a)D_i\theta(z-a) \quad (i=1, \dots, 4).$$

Ces éléments sont linéairement indépendants : cela résulte du fait bien connu que les fonctions $D_1\theta, \dots, D_4\theta$ forment une base de $\Gamma(\Theta; \mathcal{O}_\Theta(\Theta))$. Comme Γ_{00} est de dimension 5 (formule (4)), $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ forment une base de Γ_{00} .

Soit $z \in V(\Gamma_{00})$. On a alors $\theta(z+a)=0$ ou $\theta(z-a)=0$. Si par exemple on a $\theta(z-a)=0$ mais $\theta(z+a) \neq 0$, on trouve $D_i\theta(z-a)=0$ pour tout i , c'est-à-dire $z \in \text{Sing } \Theta_a = \{0, 2a\}$; si de même on a $\theta(z+a)=0$ mais $\theta(z-a) \neq 0$, on trouve $z=0$ ou $z=-2a$. On conclut que $V(\Gamma_{00})$ est réunion de $\Theta_a \cap \Theta_{-a}$ et des points $2a, -2a$. La surface $\Theta_a \cap \Theta_{-a}$ contient $C-C$, et ces deux surfaces ont même classe de cohomologie \mathfrak{d}^2 ; elles sont donc égales. D'autre part, il existe un diviseur κ sur C tel qu'on ait $2\kappa \equiv K_C$ et que Θ soit l'ensemble des classes de diviseurs de la forme $E - \kappa$, avec E effectif de degré 3; si l'on désigne par $|D|, |D'|$ les deux g_3^1 sur C , on a $a \equiv D - \kappa$, d'où $2a \equiv D - D'$. On a ainsi prouvé l'assertion a') du th.1.

Considérons maintenant $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$. Au voisinage de l'origine, la fonction $\theta(z+a)$ admet un développement de Taylor

$$\theta(z+a) = q(z) + f(z) + \text{termes de degré } \geq 4,$$

où q et f sont des polynômes homogènes sur T , de degré 2 et 3 respectivement. La quadrique $q=0$ dans $\mathbb{P}(T)$ est le cône tangent à Θ en a , qui s'identifie à l'unique quadrique Q contenant la courbe canonique. De même le cône osculateur $q=f=0$ dans $\mathbb{P}(T)$ s'identifie à la courbe canonique.

Comme θ est paire, le développement de Taylor de $\theta(z-a)$ en $z=0$ s'écrit

$$\theta(z-a) = q(z) - f(z) + \text{termes de degré } \geq 4.$$

Les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ ont donc respectivement comme terme initial à l'origine les polynômes de degré 4

$$q^2 \quad ; \quad q D_i f - f D_i q .$$

Ces polynômes sont linéairement indépendants, sans quoi q diviserait f (cela donne une autre démonstration du fait que $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ sont linéairement indépendantes dans Γ_{oo}). Il est clair que l'ensemble de leurs zéros communs est la courbe $q = f = 0$. Cela prouve le th. 1, b) dans ce cas.

Considérons maintenant le cas où la quadrique Q est singulière. Le diviseur Θ a alors un point double unique, que l'on peut prendre comme origine. Avec les notations ci-dessus, il existe un champ de vecteurs constant non nul D sur T tel que $Dq = 0$. Posons $\varphi_0 = \theta^2$ et, pour $1 \leq i \leq 4$,

$$\varphi_i = \frac{1}{2} DD_i [\theta(z+u) \theta(z-u)]_{u=0} = \theta DD_i \theta - D\theta D_i \theta .$$

On vérifie comme ci-dessus que ces fonctions forment une *base* de Γ_{oo} . On en déduit que $V(\Gamma_{oo})$ est la surface définie par les équations $\theta = D\theta = 0$, et l'on voit comme précédemment que cette surface coïncide avec $C-C$. Le développement à l'origine de θ s'écrit cette fois

$$\theta(z) = q(z) + g(z) + \text{termes de degré } \geq 6,$$

où q et g sont des polynômes homogènes de degré 2 et 4 respectivement. Posons $f = Dg$; on vérifie facilement que la surface $f = 0$ dans $\mathbb{P}(T)$ est une cubique irréductible contenant la courbe. Les termes initiaux des fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ sont les polynômes q^2 et $q D_i f - f D_i q$ ($1 \leq i \leq 4$). L'ensemble de leurs zéros communs est formé de la courbe canonique et du sommet s du cône Q (d'où le th. 1 b')). Ceci est l'unique cas où la fonction θ d'une jacobienne vérifie une équation du type (3) distincte de l'équation $K-P$.

Remarque. - Soit (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée (indécomposable) de dimension 4, qui ne soit pas une jacobienne, et soit a un point singulier de Θ . On sait alors [1] que a est un point d'ordre 2 de A , tel que la thêta-constante correspondante s'annule. Si a n'est pas un point double ordinaire de Θ , on peut appliquer le raisonnement précédent pour obtenir que $V(\Gamma_{oo})$ est une surface. La conjecture 1 pour $g=4$ entraîne donc que les seules singularités de Θ sont des points doubles ordinaires.

c) La jacobienne intermédiaire d'une hypersurface cubique dans \mathbb{P}^4

Soit X une hypersurface cubique lisse dans \mathbb{P}^4 . La jacobienne intermédiaire (A, Θ) de X est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 5, dont le diviseur Θ admet comme seule singularité un *point triple*, que l'on peut prendre comme origine [2]. Soit (D_1, \dots, D_5) une base de T ; les fonctions θ^2 et $\theta D_i D_j \theta - D_i \theta D_j \theta$ ($1 \leq i < j \leq 5$) appartiennent à Γ_{oo} . On en déduit aussitôt $V(\Gamma_{oo}) \subset \text{Sing } \Theta$, c'est-à-dire $V(\Gamma_{oo}) = \{0\}$.

Notons f le terme initial du développement de f à l'origine; l'hypersurface $f=0$ dans $\mathbb{P}(T)$ s'identifie à X (*loc. cit.*). Les termes initiaux des éléments de Γ_{oo} ci-dessus sont alors f^2 et les polynômes quartiques $f_{ij} = f D_i D_j f - D_i f D_j f$. Soit (X_1, \dots, X_5) la base de T^* duale de (D_1, \dots, D_5) ; on a $\sum X_i X_j f_{ij} = -3 f^2$. Il en résulte que $V_{\text{inf}}(\Gamma_{oo})$ est contenu dans le lieu singulier de X , donc est vide. On a donc prouvé les conjectures 1 et 2 dans cet exemple.

On montre facilement que les fonctions θ^2 et $\theta D_i D_j \theta - D_i \theta D_j \theta$ ($1 \leq i < j \leq 5$) forment une base de Γ_{oo} ; les polynômes f_{ij} forment une base de $\alpha(\Gamma_{oo})$, tandis que θ^2 est (à un scalaire près) l'unique élément de Γ s'annulant avec multiplicité ≥ 6 à l'origine.

On peut traiter de la même manière l'exemple de la jacobienne d'une courbe hyperelliptique C de genre 5. Le g_4^2 de C fournit un point triple de Θ à l'origine; le cône tangent est l'hypersurface des bisécantes à $\kappa(C)$, qui est une quartique rationnelle normale dans \mathbb{P}^4 . On en déduit facilement le th.1 dans ce cas.

d) Variété de Prym des courbes planes

En dimension plus grande il n'est plus possible d'explicitement une base de Γ_{oo} comme nous l'avons fait dans les exemples ci-dessus. On peut dans quelques cas démontrer les conjectures 1 ou 2 à l'aide des remarques suivantes. Soit x un point de $V(\Gamma_{oo})$, et a un point de $\text{Sing } \Theta$. Comme la fonction $\theta(z+a) \theta(z-a)$ appartient à Γ_{oo} , on a $a \in \Theta_x \cup \Theta_{-x}$. Soit maintenant Z une sous-variété irréductible de $\text{Sing } \Theta$. On a alors $Z \subset \Theta_x$ ou $Z \subset \Theta_{-x}$; si de plus Z est *symétrique*, chacune de ces inclusions est vérifiée. On a donc $V(\Gamma_{oo}) \subset \{x \in A \mid Z \subset \Theta_x\}$. D'autre part $V_{\text{inf}}(\Gamma_{oo})$ est contenu dans l'intersection (dans $\mathbb{P}(T)$) des cônes tangents à Θ en ses points doubles.

Nous utilisons dans [4] la première remarque pour prouver la conjecture 1 pour les variétés de Prym associées à des courbes planes, grâce à la description explicite de $\text{Sing } \Theta$ donnée dans ce cas par Mumford.

S4. Variétés abéliennes principalement polarisées génériques

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cet exposé:

Théorème 2. - *Pour tout entier $g \geq 4$, il existe une variété abélienne principalement polarisée de dimension g pour laquelle $V(\Gamma_{00})$ est réduit à $\{0\}$ et $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$ est vide.*

Par semi-continuité, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire. - *Soit (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension ≥ 4 . Alors $V(\Gamma_{00})$ est fini et $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$ est vide.*

Nous commencerons par quelques préliminaires sur les variétés abéliennes. Fixons d'abord quelques notations. Soient A une variété abélienne, L un fibré en droites sur A , s un élément de $H^0(A, L)$, a un point de A . Nous poserons $L_a = (T_a)_* L$ et $s_a = (T_a)_* s \in H^0(A, L_a)$, où T_a désigne la translation $z \mapsto z + a$ dans A . Nous noterons comme d'habitude $H(L)$ le sous-groupe de A formé des éléments a tels que L soit isomorphe à L_a ; il est fini lorsque L est ample. Soient Z une sous-variété de A , définie par un idéal \mathcal{J}_Z de \mathcal{O}_A . Tout champ de vecteurs D sur A définit des applications \mathcal{O}_A -linéaires $D : \mathcal{J}_Z \rightarrow \mathcal{O}_Z$ et $D \otimes 1_L : \mathcal{J}_Z L \rightarrow L|_Z$. Si toutes les sections de L s'annulent sur Z on en déduit un homomorphisme $D_L : H^0(A, L) \rightarrow H^0(Z, L|_Z)$.

Lemme 1. - *Soient X une variété abélienne de dimension ≥ 2 et M un fibré en droites ample sur X ; on suppose qu'on a $h^0(M) = 2$ et que le pinceau $|M|$ n'a pas de composante fixe. Notons B l'intersection des éléments de $|M|$.*

a) *Soit x un élément de X qui n'est pas dans $H(M)$. Alors l'homomorphisme de restriction $H^0(X, M_x) \rightarrow H^0(B, M_x)$ est injectif.*

b) *L'homomorphisme $(D, s) \mapsto D_L s$ de $H^0(X, T_x) \otimes H^0(X, M)$ dans $H^0(B, M)$ est injectif.*

L'assertion a) est une conséquence facile de la suite exacte

$$0 \rightarrow M_x \otimes M^{-2} \rightarrow (M_x \otimes M^{-1}) \oplus (M_x \otimes M^{-1}) \rightarrow M_x \rightarrow M_x|_B \rightarrow 0,$$

et de l'annulation des espaces de cohomologie $H^0(X, M_x \otimes M^{-1})$ (pour $x \notin H(M)$) et $H^1(X, M_x \otimes M^{-2})$. L'assertion b) est démontrée par exemple dans [5, lemme 12.3]. ■

Considérons maintenant deux variétés abéliennes X_1 et X_2 de dimension ≥ 2 , munies de fibrés en droites amples M_1 et M_2 , satisfaisant à $h^0(M_1) = h^0(M_2) = 2$. Soient α_1 et β_1 (resp. α_2 et β_2) des générateurs de $H(M_1)$ (resp. $H(M_2)$). Il existe alors une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) et une isogénie $\pi : X_1 \times X_2 \rightarrow A$ dont le noyau est engendré par (α_1, α_2) et (β_1, β_2) . On peut trouver pour $i = 1, 2$ une base (s_i, t_i) de $H^0(X_i, M_i)$ de façon que le diviseur $\pi^*\Theta$ sur $X_1 \times X_2$ ait pour équation $s_1 s_2 + t_1 t_2 = 0$. On supposera que l'intersection B_i des diviseurs du pinceau $|M_i|$ est *réduite* et de codimension 2. La sous-variété $B = \pi(B_1 \times B_2)$ est contenue dans $\text{Sing } \Theta$.

Lemme 2. - a) On a

$$\{ a \in A \mid B \subset \Theta_a \} = \pi(X_1) \cup \pi(X_2).$$

b) L'intersection dans $T_0(A)$ des cônes tangents à Θ en les points de B est la réunion des espaces tangents à X_1 et X_2 en 0.

Prouvons a). L'inclusion $B \subset \Theta_{\pi(x)}$ pour $x \in X_i$ est immédiate. Inversement, soit $a = \pi(a_1, a_2)$ un point de A satisfaisant à $B \subset \Theta_a$. Pour tout élément b_1 de B_1 , la restriction à B_2 de l'élément $s_{1,a_1}(b_1) s_{2,a_2} + t_{1,a_1}(b_1) t_{2,a_2}$ de $H^0(X_2, M_{2,a_2})$ est alors nulle. Si $a_2 \in H(M_2)$, on a $a \in \pi(X_1)$; dans le cas contraire, on déduit du lemme 1 qu'on a $s_{1,a_1}(b_1) = t_{1,a_1}(b_1) = 0$, et ce pour tout $b_1 \in B_1$. Comme B_1 est réduit, une nouvelle application du lemme 1 entraîne alors $a_1 \in H(M_1)$, d'où $a \in \pi(X_2)$.

Prouvons b). Pour $i = 1, 2$, soit D_i un vecteur tangent à X_i en 0, que nous considérerons aussi comme un champ de vecteurs sur X_i . Pour que le vecteur (D_1, D_2) soit dans l'intersection des cônes tangents à $\pi^*\Theta$ aux points de $B_1 \times B_2$, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$,

$$D_1 s_1(b_1) D_2 s_2(b_2) + D_1 t_1(b_1) D_2 t_2(b_2) = 0,$$

ce qui signifie que pour tout $b_1 \in B_1$ la section $D_1 s_1(b_1) s_2 + D_1 t_1(b_1) t_2$ de $H^0(X_2, M_2)$ est annulée par D_2 . Compte tenu du lemme 1, cela entraîne $D_2 = 0$ ou $D_1 s_1(b_1) = D_1 t_1(b_1) = 0$ pour tout $b_1 \in B_1$. Comme B_1 est réduit, la seconde condition implique $D_1 = 0$ (lemme 1), d'où le lemme. ■

Nous allons maintenant démontrer le théorème en considérant un cas particulier de la construction précédente. Pour $1 \leq i \leq g$, soit E_i une courbe elliptique; notons o_i son origine et M_i le fibré en droites $\mathcal{O}(2o_i)$. Choisissons deux

générateurs α_i et β_i du groupe des points d'ordre 2 de E_i . Il existe alors une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) et une isogénie $\rho : E_1 \times \dots \times E_g \rightarrow A$ dont le noyau est engendré par les éléments $(\beta_1, \dots, \beta_g)$, et $\alpha_{ij} = (0, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, 0)$ pour $1 \leq i < j \leq g$. On peut trouver pour $1 \leq i \leq g$ une base (s_i, t_i) de $H^0(E_i, M_i)$ de façon que le diviseur $\rho^* \Theta$ ait pour équation $s_1 s_2 \dots s_g + t_1 t_2 \dots t_g = 0$.

Pour tout sous-ensemble I de $\{1, \dots, g\}$, notons X_I le quotient de $\prod_{i \in I} E_i$ par

le sous-groupe engendré par les α_{ij} pour i et j dans I . L'image dans X_I de $(0, \dots, \alpha_i, \dots, 0)$ est indépendante de $i \in I$; on la notera α_I . Notons β_I l'image dans X_I de $(\beta_i)_{i \in I}$.

Si J désigne le complémentaire de I dans $\{1, \dots, g\}$, l'isogénie $\pi : X_I \times X_J \rightarrow A$ est du type étudié précédemment; son noyau est engendré par (α_I, α_J) et (β_I, β_J) . Supposons que I et J aient au moins deux éléments. On vérifie facilement que les lieux de base B_I et B_J sont réduits et de codimension 2; la sous-variété $\pi(B_I \times B_J)$ de $\text{Sing } \Theta$ est réunion de translats de sous-variétés abéliennes de codimension 4 de A par des points d'ordre 2, de sorte que ses composantes irréductibles sont symétriques. On en déduit (cf. §3,d)) que pour $x \in V(\Gamma_{oo})$ on a $\pi(B_I \times B_J) \subset \Theta_x$, d'où d'après le lemme 2

$$V(\Gamma_{oo}) \subset \pi(X_I) \cup \pi(X_J) \quad \text{pour } 2 \leq \text{Card}(I) \leq g-2.$$

Ceci entraîne aussitôt

$$V(\Gamma_{oo}) \subset \pi(E_1) \cup \dots \cup \pi(E_g).$$

On prouve de la même manière la version infinitésimale de cette inclusion:

$$V_{\text{inf}}(\Gamma_{oo}) \subset \mathbb{P}T_0(E_1) \cup \dots \cup \mathbb{P}T_0(E_g).$$

Pour $1 \leq i \leq g$, notons $\varphi_i : E_i \rightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme défini par la base (s_i, t_i) de $H^0(E_i, M_i)$. Posons $\psi_i = \varphi_i(o_i)$; c'est un nombre complexe (différent de 0, ± 1 et $\pm\sqrt{-1}$). Nous allons imposer entre les modules ψ_i des courbes elliptiques E_i la relation $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_g + 1 = 0$. L'origine de A est alors sur le diviseur Θ , ce qui entraîne

$$V(\Gamma_{oo}) \subset \Theta \cap \bigcup_{i=1}^g \pi(E_i) = \{0\},$$

puisque l'on a $\varphi_i^{-1}(\psi_i) = \{o_i\}$. D'autre part, il existe une coordonnée locale z_i sur E_i

au voisinage de o_i telle qu'on ait $\varphi_i = \mu_i + z_i^2$; le diviseur Θ admet donc comme équation au voisinage de l'origine

$$1 + \prod_{i=1}^g (\mu_i + z_i^2) = 0 .$$

Son cône tangent en 0 est la quadrique d'équation $\sum_i \mu_i^{-1} z_i^2 = 0$ dans $\mathbb{P}(T)$. Il ne

rencontre aucun des points $\mathbb{P}T_0(E_i)$, donc $V_{\text{inf}}(\Gamma_{oo})$ est vide. Cela achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEAUVILLE : *Prym varieties and the Schottky problem*. Invent. math. 41 (1977), 149-196.
- [2] A. BEAUVILLE : *Les singularités du diviseur Θ de la jacobienne intermédiaire de l'hypersurface cubique dans \mathbb{P}^4* . Algebraic threefolds (Proc. Varenna 1981), 190-208; Lecture Notes 947, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1982).
- [3] A. BEAUVILLE : *Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov*. Exp. 675 du sémin. Bourbaki, Astérisque 152-153 (1988), 101-112.
- [4] A. BEAUVILLE, O. DEBARRE, R. DONAGI, G. VAN DER GEER : *Sur les fonctions thêta d'ordre 2 et les singularités du diviseur thêta*. C. R. Acad. Sci. Paris t. 307, sér. I (1988), 481-484.
- [5] O. DEBARRE: *Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3*. Duke math. J. 57 (1988), 221-273.
- [6] R. DONAGI: *The Schottky problem*. Theory of moduli (Montecatini Terme 1985), 84-137; Lecture Notes 1337, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1988).
- [7] B. VAN GEEMEN, G. VAN DER GEER: *Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties*. Amer. J. of Math. 108 (1986), 615-642.
- [8] G. WELTERS: *The surface C-C on Jacobi varieties and 2nd order theta functions*. Acta math. 157 (1986), 1-22.