UNE DEMONSTRATION ELEMENTAIRE DU THEOREME DE TORELLI POUR LES INTERSECTIONS DE TROIS QUADRIQUES GENERIQUES DE DIMENSION IMPAIRE

Olivier Debarre

Mathématique, Université Paris-Sud
F-91405 ORSAY CEDEX FRANCE

1. Qu'est-ce que le problème de Torelli ?

La jacobienne d'une courbe projective lisse C est le tore complexe :

$$JC = H^{0,1}(C)/H^1(C,\mathbb{Z}) .$$

Le cup-produit est une forme entière alternée non dégénérée sur $H^1(C,\mathbb{Z})$ qui induit une *polarisation principale* θ sur JC. Le théorème de Torelli classique énonce qu'une courbe lisse est déterminée par la variété abélienne principalement polarisée (JC,θ).

Si X est une variété projective lisse de dimension impaire $2n+1$, la théorie de Hodge entraîne que le quotient :

$$JX = H^{0,2n+1}(X)\oplus\ldots\oplus H^{n,n+1}(X) \;/\; H^{2n+1}(X,\mathbb{Z})$$

est encore un tore complexe, qu'on appelle la *jacobienne intermédiaire* de X. Elle n'admet cependant pas en général de structure algébrique. Néanmoins, si un seul des $H^{p,2n+1-p}(X)$ ($p\leq n$) est non nul, alors JX admet une polarisation principale. On peut alors poser le problème de Torelli : quand X est-elle déterminée à isomorphisme près par sa jacobienne intermédiaire munie de sa polarisation principale ?

Le but de cet exposé est de *répondre affirmativement à cette question lorsque* X *est une intersection complète lisse de trois quadriques dans* $\mathbb{P}^{2n+4}$. Plus exactement, on présente une version simplifiée de la démonstration complète de cette assertion (qui a paru dans [D 1]), qui ne s'applique que pour $n\geq 2$ et X *générique* (cf. 2.1). Sous cette forme, ce résultat est originellement dû à Friedman et Smith ([FS 1]). Mentionnons pour finir que le théorème de Torelli pour les intersections de trois quadriques *génériques de dimension paire* vient d'être démontré par Laszlo ([L]).

2. La jacobienne intermédiaire comme variété de Prym

Le point de départ commun à notre méthode et à celle de Friedman et Smith consiste à exprimer la jacobienne intermédiaire d'une intersection de trois quadriques comme *variété de Prym*. Cette idée, qui date du début du siècle ([Di]), a été reprise et complétée par des travaux plus récents ([B], [T]).

On considère donc une intersection complète lisse X de trois quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+4}$. Dans le plan projectif des quadriques contenant X, le lieu de celles qui sont singulières est une courbe C degré $2n+5$ (la courbe *discriminante*). Un point lisse de C correspond à une quadrique de rang exactement $2n+4$, qui contient donc 2 familles de $(n+1)$-plans. Le choix d'une de ces familles induit un revêtement double $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$.

(2.1) La courbe C n'est pas lisse en général mais l'est pour une variété X *générique* : on dit alors que X est *ordinaire* et nous nous limiterons ici à ce cas. Le revêtement π est alors *étale* et on peut lui associer une *variété de Prym* : le noyau du morphisme norme $\mathrm{Nm} : J\tilde{C} \longrightarrow JC$ a deux composantes connexes et la variété de Prym P est celle des deux qui contient l'origine. La polarisation principale de $J\tilde{C}$ induit le double d'une *polarisation principale* ξ *sur* P.

D'autre part, les groupes $H^{p,2n+1-p}(X)$ ($p \leq n$) sont nuls sauf pour $p=n$. La jacobienne intermédiaire JX de X admet donc une polarisation principale naturelle θ. Elle est reliée aux constructions géométriques précédentes grâce au théorème fondamental suivant ([B] Théorème 6.3) :

Théorème 2.2.- (i) *Les variétés abéliennes principalement polarisées* (JX,θ) *et* (P,ξ) *sont isomorphes.*

(ii) *Deux intersections complètes lisses de trois quadriques* X *et* X' *sont isomorphes si et seulement si les revêtements associés* π *et* π' *le sont.*

On a ainsi ramené notre préoccupation initiale, le problème de Torelli pour les intersections de trois quadriques ordinaires, à ce qu'on peut appeler le *problème de Torelli pour les variétés de Prym* : quand un revêtement double étale d'une courbe lisse est-il déterminé par sa variété de Prym ?

3. Le problème de Torelli pour les variétés de Prym

La reformulation de notre question initiale en termes de variétés de Prym ne nous avance en fait guère puisque le problème de Torelli pour les variétés de Prym n'est toujours pas résolu en toute généralité.

Faisons le tour des résultats connus à ce jour. Tout d'abord, un calcul de dimensions entraîne que la réponse est négative si le genre g de C est ≤ 6.

Lorsque $g \geq 7$, la réponse est *négative en général* (en particulier si C est *tétragonale*, c'est-à-dire admet un morphisme de degré ≤ 4 sur une courbe rationnelle lisse ([Do])) mais est *affirmative* si C est *générique* ([FS 2], [K], [W 1], [D 2]).

La conjecture suivante, due à Donagi ([Do]), me paraît tout à fait plausible :

Conjecture : *Soit* P *la variété de Prym d'un revêtement double étale* π *d'une courbe lisse non tétragonale. Alors tout revêtement double dont la variété de Prym est isomorphe à* P *est isomorphe à* π .

Ces considérations nous ont un peu éloignés des intersections de quadriques. Pire, les résultats mentionnés plus haut ne nous aident en aucune façon puisqu'on à affaire à des courbes *planes*, qui ne sont pas génériques parmi les courbes de leur genre.

Il a fallu attendre 1986 pour que Friedman et Smith démontrent ([FS 1]) le théorème de Torelli pour les variétés de Prym des revêtements doubles des courbes planes *génériques* de degré impair ≥ 7 (on remarquera qu'elles ne sont pas tétragonales!), c'est-à-dire le théorème de Torelli pour les intersections de trois quadriques génériques de dimension impaire. Ils utilisent des dégénérescences et ne peuvent donc pas préciser l'adjectif "générique".

La méthode qu'on expose dans la partie suivante convient pour toutes les *courbes planes lisses de degré* ≥ 9 et entraîne donc le théorème de Torelli pour les intersections de trois quadriques ordinaires de dimension impaire ≥ 5. Comme on l'a déjà mentionné, les mêmes idées permettent de lever ces deux restrictions, au prix de complications techniques considérables ([D 1]).

4. Comment démontrer le théorème de Torelli pour les variétés de Prym ?

Il est peut-être plus clair de commencer par expliquer la méthode dans le cadre plus familier des jacobiennes de courbes.

Soit donc C une courbe lisse de genre g. Dans la translatée $J^{g-1}C$ de sa jacobienne JC, définie comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles de degré $g-1$ sur C, il y a un diviseur thêta canonique :

$$\Theta = \{ L \in J^{g-1}C \mid h^0(C,L) \geq 1 \},$$

dont le lieu singulier est :

$$\operatorname{Sing}\Theta = \{ L \in J^{g-1}C \mid h^0(C,L) \geq 2 \}.$$

La surface suivante :

$$C - C = \{ \mathcal{O}_C(x-y) \mid x, y \in C \} \subset JC,$$

vérifie alors l'inclusion :

$$(C - C) + \operatorname{Sing}\Theta \subset \Theta.$$

Les trois termes qui apparaissent dans cette inclusion sont de nature différente : tandis que Θ et $\operatorname{Sing}\Theta$ ne dépendent que de la jacobienne JC, la surface $(C-C)$ est intimement liée à la courbe C elle-même (en fait, elle la détermine). Il est naturel d'attaquer alors le problème de Torelli pour les courbes en essayant de déterminer l'ensemble :

$$S(JC) = \{ a \in JC \mid a + \operatorname{Sing}\Theta \subset \Theta \}.$$

Cette méthode n'est pas (et de loin!) la plus simple et ce n'est que récemment que Welters a pu montrer ([W 2]) l'égalité :

$$S(JC) = C - C$$

pour $g \geq 5$. Cependant, elle a l'avantage de s'appliquer aussi dans le cadre des variétés de Prym.

Soit donc $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement double étale d'une courbe lisse de genre g . Dans la translatée suivante de sa variété de Prym :

$$P^* = \{ \tilde{L} \in J^{2g-2}\tilde{C} \mid \mathrm{Nm}\,\tilde{L} = \omega_C \text{ et } h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \text{ pair} \},$$

le diviseur :

$$\Xi = \{ \tilde{L} \in P^* \mid h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \geq 2 \},$$

représente la polarisation principale.

Le lieu singulier de Ξ est décrit dans [M 1]. Il est réunion de la famille des singularités *stables* :

$$\mathrm{Sing}_{st}\,\Xi = \{ \tilde{L} \in P^* \mid h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \geq 4 \},$$

qui existent toujours lorsque $\dim P \geq 6$ ([Be]), et de celle des singularités *exceptionnelles*, notée $\mathrm{Sing}_{ex}\,\Xi$ (pour plus de détails, le lecteur intéressé est renvoyé à [M 1]). La surface suivante :

$$\Sigma(\tilde{C}) = \{ \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{x} + \tilde{y} - \sigma\tilde{x} - \sigma\tilde{y}) \mid \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{C} \}$$

est contenue dans P (σ est l'involution de $\tilde{C}$ qui échange les feuillets de π) et vérifie :

$$\Sigma(\tilde{C}) + \mathrm{Sing}_{st}\,\Xi \subset \Xi .$$

De nouveau, la surface $\Sigma(\tilde{C})$ détermine le revêtement π ([D 1]) et on voit se dessiner une méthode d'attaque du problème de Torelli pour les variétés de Prym. Elle soulève cependant deux questions :

1) Peut-on reconnaître les singularités stables dans le lieu singulier du diviseur Ξ ?

2) La surface $\Sigma(\tilde{C})$ est-elle égale à :

$$S(P) = \{ a \in P \mid a + \mathrm{Sing}_{st}\,\Xi \subset \Xi \} \ ?$$

La question 1) n'a pas en général une réponse affirmative : c'est d'ailleurs de là que proviennent les exceptions connues au problème de Torelli pour les variétés de Prym ([D 3]). Cependant, $\mathrm{Sing}_{st}\,\Xi$ est *partout de codimension* ≤ 6

dans P et cela suffit pour conclure lorsque C est une courbe plane :

Proposition 4.1.- *Soit* (P,Ξ) *la variété de Prym d'un revêtement double étale d'une courbe plane lisse de degré* ≥ 7 *. Alors* $\mathrm{Sing}_{ex}\Xi$ *est de codimension* >6 *dans* P *, de sorte que* $\mathrm{Sing}_{st}\Xi$ *est la réunion des composantes de* $\mathrm{Sing}\,\Xi$ *de codimension* ≤ 6 *dans* P *.*

La démonstration de cette proposition est élémentaire : elle ne nécessite que de connaître les systèmes linéaires de bas degré sur les courbes planes.

La question 2) est beaucoup plus délicate car il est difficile en général de décrire $\mathrm{Sing}_{st}\Xi$. Je ne sais y répondre que lorsque la courbe C est plane :

Théorème 4.2.- *Soit* $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ *un revêtement double étale d'une courbe plane lisse de degré* $d \geq 9$ *vérifiant :*

(4.3)
$$H^0(\tilde{C}, \pi^*\mathcal{O}_C(3)) \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C(3)) .$$

Alors, on a l'égalité suivante dans la variété de Prym associée P *:*

$$\{ a \in P \mid a + \mathrm{Sing}_{st}\Xi \subset \Xi \} = \Sigma(\tilde{C}) .$$

Remarque 4.4.- (i) La condition (4.3) et le théorème de Riemann-Roch entraînent $d \geq 9$.

(ii) La condition (4.3) est vérifiée lorsque le revêtement π provient d'une intersection de trois quadriques ordinaire de dimension impaire ≥ 5 ([B] Lemme 6.12.(i)).

■ Même lorsque C est plane, on ne sait décrire que certains éléments de $\mathrm{Sing}_{st}\Xi$, comme ceux de :

$$S = \{ \tilde{L} = \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\pi^*H + \tilde{M}) \mid \tilde{L} \in P^* \text{ et } \tilde{M} \geq 0 \} ,$$

où H est le diviseur d'une droite sur C . Tout élément a de P qui vérifie :

$$a + \mathrm{Sing}_{st}\Xi \subset \Xi ,$$

vérifie aussi :

$$a + S \subset \Xi .$$

On peut traduire cette inclusion de la façon suivante : soient $\tilde{M}$ un diviseur effectif sur $\tilde{C}$ vérifiant $\pi_*\tilde{M} \in |\omega_C(-2)| = |(d-5)H|$, et $\tilde{L} = \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\pi^*H + \tilde{M})$. On a alors :

- soit $h^0(\tilde{C}, \tilde{L})$ est pair, c'est-à-dire $\tilde{L} \in P^*$, auquel cas $\tilde{L}(a) \in \Xi$ et

$h^0(\widetilde{C}, \widetilde{L}(a)) \geq 2$,

• soit $h^0(\widetilde{C}, \widetilde{L})$ est impair, c'est-à-dire $\widetilde{L} \notin P^*$, auquel cas $\widetilde{L}(a) \notin P^*$ et $h^0(\widetilde{C}, \widetilde{L}(a))$ est impair.

On a donc dans tous les cas :

$$h^0(\widetilde{C}, \pi^*H + \widetilde{M} + a) \geq 1 .$$

Le lemme suivant est alors crucial :

Lemme 4.5.- *Soient* $\pi : \widetilde{C} \longrightarrow C$ *un revêtement double étale d'une courbe stable,* $\widetilde{L}$ *un faisceau inversible sur* $\widetilde{C}$ *et* M *un élément réduit de* $|\omega_C \otimes (\mathrm{Nm}\,\widetilde{L})^{-1}|$. *On suppose que pour tout diviseur effectif* $\widetilde{M}$ *sur* $\widetilde{C}$ *vérifiant* $\pi_* \widetilde{M} = M$, *on a* $H^0(\widetilde{C}, \widetilde{L}(\widetilde{M})) \neq 0$. *Alors* $H^0(\widetilde{C}, \widetilde{L}) \neq 0$.

■ Supposons que la conclusion ne soit pas vérifiée. Il existe alors un diviseur effectif $\widetilde{X}$ sur $\widetilde{C}$ de degré maximal tel que $\pi_* \widetilde{X} < M$ et $H^0(\widetilde{C}, \widetilde{L}(\widetilde{X})) = 0$. Soit $\widetilde{Y} = \widetilde{y}_1 + \ldots + \widetilde{y}_r$ un diviseur effectif quelconque sur $\widetilde{C}$ vérifiant $\pi_* \widetilde{Y} = M - \pi_* \widetilde{X}$. Pour tout $i = 1, \ldots, r$, on a par construction $h^0(\widetilde{L}(\widetilde{X} + \widetilde{y}_i)) = 1$, ce qui donne une section $s_i \in H^0(\widetilde{L}(\widetilde{X} + \widetilde{Y}))$ qui s'annule en tous les points de $\widetilde{Y}$ excepté $\widetilde{y}_i$. Ces sections sont linéairement indépendantes, de sorte que $h^0(\widetilde{L}(\widetilde{X} + \widetilde{Y})) = r$, et ce pour tous les choix possibles de $\widetilde{Y}$. Mais la parité de $h^0(\widetilde{L}(\widetilde{X} + \widetilde{Y}))$ doit changer lorsqu'on remplace un $\widetilde{y}_i$ par $\sigma \widetilde{y}_i$ (cf. par exemple [M 2] page 187). On est donc arrivé à une contradiction.■

Lorsque $d \geq 6$, on en déduit qu'un élément a de P vérifie $a + S \subset \Xi$ si et seulement si il existe des diviseurs effectifs E et $\widetilde{F}$ sur C et $\widetilde{C}$ tels que :

$$\pi^*E + \widetilde{F} \in |\pi^*H(a)| ,$$

avec E de degré maximal. L'égalité $\mathrm{Nm}\,a = 0$ entraîne d'autre part :

$$2E + \pi_* \widetilde{F} \in |2H| . \tag{4.6}$$

On utilise maintenant une autre sous-variété de $\mathrm{Sing}_{st}\,\Xi$, à savoir :

$$\{ \widetilde{L} = \mathcal{O}_{\widetilde{C}}(\pi^*2H + \widetilde{M} + \widetilde{x} + \widetilde{y} + \widetilde{z} - \sigma \widetilde{x} - \sigma \widetilde{y} - \sigma \widetilde{z}) \mid \widetilde{L} \in P^* ; \widetilde{M} \geq 0 ; \widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z} \in \widetilde{C} \}.$$

Elle est non vide dès que $d \geq 8$ et le lemme précédent entraîne de nouveau :

$$\forall\, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{C} \qquad h^0(\tilde{C}, \pi^*2H + a + \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} - \sigma\tilde{x} - \sigma\tilde{y} - \sigma\tilde{z}) > 0 .$$

On vérifie facilement que cela est équivalent à :

$$h^0(\tilde{C}, \pi^*2H + a) = h^0(\tilde{C}, \pi^*(H+E) + \tilde{F}) \geq 4 .$$

Soit η l'élément d'ordre deux de JC associé au revêtement double π (défini par exemple par $\mathcal{O}_C(\eta) = \Lambda^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}$). La proposition page 338 de [M 1] donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(C, H+E) \longrightarrow H^0(\tilde{C}, \pi^*(H+E) + \tilde{F}) \longrightarrow H^0(C, H+E+\pi_*\tilde{F}+\eta) .$$

Par (4.6), ce dernier espace vectoriel est contenu dans $H^0(C, 3H+\eta)$, qui est nul par hypothèse. On a donc $h^0(C, H+E) \geq 4$, ce que le théorème de Riemann-Roch traduit en : E n'impose pas des conditions indépendantes sur les courbes de degré $(d-4)$. Or E est de degré au plus d (4.6) et il est classique (cf. [ACGH] Ex. 19 page 56 lorsque E est réduit) que cela entraîne que E contient au moins $(d-2)$ points alignés. On peut donc écrire :

$$E \equiv H - x_1 - x_2 + E' ,$$

avec :

$$x_1 , x_2 \in C \quad \text{et} \quad \deg E' \leq 2 .$$

La relation (4.6) entraîne alors :

$$\pi_*\tilde{F} + 2E' \equiv 2x_1 + 2x_2 .$$

Comme C n'est pas tétragonale, on en déduit :

$$\pi_*\tilde{F} = 0 , \; 2x_1 \; \text{ou} \; 2x_1 + 2x_2 ,$$

de sorte qu'il existe des points $\tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(x_1)$ et $\tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x_2)$ tels que :

$$\tilde{F} = 0 , \; 2\tilde{x}_1 \; \text{ou} \; 2\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2$$

$$a \equiv 0 , \; \tilde{x}_1 - \sigma\tilde{x}_1 \; \text{ou} \; \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \sigma\tilde{x}_1 - \sigma\tilde{x}_2 .$$

Or l'élément $\tilde{x}_1 - \sigma\tilde{x}_1$ de $\operatorname{Ker}Nm$ n'est pas dans P . On en conclut $a \in \Sigma(\tilde{C})$, ce qui termine la démonstration du théorème.■

BIBLIOGRAPHIE

[ACGH] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P.A. GRIFFITHS, J. HARRIS.- Geometry of Algebraic Curves, I. Springer Verlag (1985).

[B] A. BEAUVILLE.- Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires. Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. 10 (1977), 309-391.

[Be] A. BERTRAM.- An existence theorem for Prym special divisors. Invent. Math. 90 (1987), 669-671.

[D 1] O. DEBARRE.- Le théorème de Torelli pour les intersections de trois quadriques. Invent. Math. A paraître.

[D 2] O. DEBARRE.- Sur le théorème de Torelli pour les variétés de Prym. Am. J. of Math. A paraître.

[D 3] O. DEBARRE.- Sur les variétés de Prym des courbes tétragonales. Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. 21 (1988), 545-559.

[Di] A. DIXON.- Notes on the reduction of a ternary quartic to a symmetrical determinant. Proc. Camb. Phil. Soc. 11 (1902), 350-351.

[Do] R. DONAGI.- The tetragonal construction. Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1981), 181-185.

[FS 1] R. FRIEDMAN, R. SMITH.- Degenerations of Prym varieties and intersections of three quadrics. Invent. Math. 85 (1986), 615-635.

[FS 2] R. FRIEDMAN, R. SMITH.- The generic Torelli theorem for the Prym map. Invent. Math. 67 (1982), 473-490.

[K] V. KANEV.- The global Torelli theorem for Prym varieties at a generic point. Math. USSR Izvestija 20 (1983), 235-258.

[L] Y. LASZLO.- Théorème de Torelli pour les intersections complètes de trois quadriques de dimension paire. A paraître.

[M 1] D. MUMFORD.- Prym Varieties I. Contributions to Analysis. Acad. Press, New York (1974), 325-350.

[M 2] D. MUMFORD.- Theta characteristics of an algebraic curve. Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. 4 (1971), 181-192.

[T] A.N. TJURIN.- On the intersection of quadrics. Russian Math. Surveys 30 (1975).

[W 1] G. WELTERS.- Recovering the curve data from a general Prym variety. Amer. J. of Math. 109 (1987), 165-182.

[W 2] G. WELTERS.- The surface C-C on Jacobi varieties and 2nd order theta functions. Acta math. 157 (1986), 1-22.