Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Images lisses d'une variété abélienne simple

Olivier DEBARRE

Résumé — Soit A une variété abélienne complexe de dimension n. On montre que si A est simple, c'est-à-dire que tout sous-groupe infini de A est Zariski dense, et que $A \rightarrow X$ est un morphisme ramifié surjectif sur une variété lisse X de dimension $\geqq 1$, alors X est isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}^n$.

Smooth images of a simple abelian variety

Abstract — *Let* A *be a complex abelian variety of dimension n. We show that if* A *is simple, meaning that any infinite subgroup of* A *is Zariski dense, and if* $A \rightarrow X$ *is a ramified surjective morphism onto a smooth variety* X *of dimension* $\geqq 1$, *then* X *is isomorphic to the projective space* $\mathbf{P}^n$.

La caractérisation de Mori [5] des espaces projectifs complexes comme étant les seules variétés algébriques lisses dont le fibré tangent est ample a permis de démontrer plusieurs résultats du type de celui décrit dans le résumé et auquel est consacrée cette Note. Par exemple, Lazarsfeld utilise les résultats de Mori pour démontrer dans [4] une conjecture de Remmert et Van de Ven : si X est une variété lisse de dimension $\geqq 1$ et $\mathbf{P}^n \rightarrow X$ un morphisme surjectif, alors X est isomorphe à $\mathbf{P}^n$. Il conjecture l'extension suivante de ce résultat : si G est un groupe algébrique semi-simple, P un sous-groupe parabolique maximal, X une variété lisse de dimension $\geqq 1$ et $G/P \rightarrow X$ un morphisme surjectif de degré >1, alors X est isomorphe à un espace projectif. S'appuyant à leur tour sur les mêmes idées de Mori, Paranjape et Srinivas démontrent dans [7] cette conjecture dans le cas où G/P est une quadrique lisse de dimension $\geqq 3$. Ils proposent par la même occasion comme conjecture le résultat démontré dans cette Note.

Notre démonstration est exactement calquée sur celle de Lazarsfeld et repose de façon tout aussi fondamentale sur les résultats de Mori, qu'on rappelle ici sous une forme faible suffisante pour nos besoins (*cf.* [4]) :

THÉORÈME (Mori). — *Soit* X *une variété complexe projective lisse de dimension n dont le fibré anticanonique* $\Lambda^n TX$ *est ample. On suppose qu'il existe un ouvert dense* U *de* X *tel que pour tout morphisme non constant* $u : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ *dont l'image rencontre* U, *le fibré* $u^* TX$ *soit ample. Alors* X *est isomorphe à* $\mathbf{P}^n$.

Notre démonstration n'utilise que trois propriétés des variétés abéliennes simples :

PROPRIÉTÉ 1. — *Le fibré anticanonique d'une variété abélienne est engendré par ses sections.*

PROPRIÉTÉ 2. — *Tout diviseur effectif non nul sur une variété abélienne simple est ample.*

• Si D est un diviseur effectif non nul sur une variété abélienne simple A, le sous-groupe de A Zariski fermé $\{ x \in A \mid D + x = D \}$ est distinct de A donc fini. Il ressort alors de [6], p. 60, que D est ample. ■

PROPRIÉTÉ 3. — *Soit* $v : C \rightarrow A$ *un morphisme non constant d'une courbe projective lisse dans une variété abélienne simple. Alors le fibré vectoriel* $M_{C/A}$ *sur la courbe* C, *défini comme le quotient du faisceau normal* $v^* TA/TC$ *par son sous-faisceau de torsion, est ample.*

• Notre démonstration reproduit celle de Hartshorne ([2], p. 87), qui traite le cas où v est un plongement. Le fibré $M_{C/A}$ étant un quotient du fibré trivial $v^* TA$, il est engendré

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0249-6291/89/03090119 $ 2.00

par ses sections. On peut appliquer le critère de Gieseker [1] : $M_{C/A}$ est ample si et seulement si tout fibré en droites L quotient de $M_{C/A}$ est de degré >0. Supposons $\deg(L) \leqq 0$. Le fibré L, comme quotient de $M_{C/A}$, est aussi engendré par ses sections. On a donc $L \cong \mathcal{O}_C$, ce qui fournit une section non nulle du fibré trivial $v^* TA$ nulle sur TC. Celle-ci correspond à une 1-forme holomorphe non nulle sur A, dont la restriction à la courbe $v(C)$ est nulle. La contradiction provient alors du fait qu'une telle forme ne peut exister puisque, A étant simple, la courbe $v(C)$ engendre A. ■

On peut maintenant passer à la démonstration du résultat principal de cette Note. On se donne donc une variété abélienne simple A de dimension n, une variété lisse X de dimension $\geqq 1$ et un morphisme *ramifié surjectif* $f: A \to X$. Notre but est de vérifier que le théorème de Mori s'applique à la variété X, afin de montrer qu'elle est isomorphe à $\mathbf{P}^n$. On remarquera que la simplicité de A est indispensable : si A n'est pas simple, il existe une isogénie de A sur un produit de deux variétés abéliennes non triviales, donc un morphisme ramifié de A sur un produit de deux espaces projectifs, par exemple.

Premier pas. — *Le morphisme f est fini, de sorte que* X *est de dimension n, et le faisceau anticanonique* $\Lambda^n TX$ *est ample.*

• Soit H un diviseur effectif ample sur X (non nul puisque X est de dimension $\geqq 1$). Son image inverse $f^* H$ est ample sur A (propriété 2), donc f est fini. Le diviseur de ramification R (non nul puisque f est ramifié) est lui aussi ample (propriété 2) et le fibré anticanonique $\Lambda^n TA$ est engendré par ses sections (propriété 1). La formule d'adjonction $f^*(\Lambda^n TX) = \Lambda^n TA \otimes \mathcal{O}(R)$ entraîne que $f^*(\Lambda^n TX)$ est ample, donc aussi $\Lambda^n TX$ puisque f est fini et plat ([3], proposition 4.3). ■

Deuxième pas. — *Soit* U *un ouvert non vide de* X *au-dessus duquel f est étale et* $u: \mathbf{P}^1 \to X$ *un morphisme non constant dont l'image rencontre* U. *Alors le fibré* $u^* TX$ *est ample.*

• On suit la démonstration de [4]. Soit C la normalisation d'une composante de la courbe $\mathbf{P}^1 \times_X A$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} v: C & \rightarrow & A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ u: \mathbf{P}^1 & \rightarrow & X. \end{array}$$

Comme g est fini et plat, il suffit de montrer que $g^* u^* TX = v^* f^* TX$ est ample sur la courbe C. On définit les faisceaux normaux $N_{C/A}$ et $N_{\mathbf{P}^1/X}$ par les suites exactes :

$$0 \to TC \to v^* TA \to N_{C/A} \to 0$$
$$0 \to T\mathbf{P}^1 \to u^* TX \to N_{\mathbf{P}^1/X} \to 0.$$

Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & & TC & \to & v^* TA \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & & g^* T\mathbf{P}^1 & \to & g^* u^* TX = v^* f^* TX \end{array}$$

induit un morphisme de faisceaux $N_{C/A} \to g^* N_{\mathbf{P}^1/X}$ qui est un isomorphisme hors de la réunion de la ramification de g et de l'ensemble fini $v^{-1}(R)$. Il induit un morphisme $i: M_{C/A} \to g^* M_{\mathbf{P}^1/X}$ sur les quotients de ces deux faisceaux par leur sous-faisceau de torsion. Le morphisme i est un isomorphisme générique et son noyau est donc un sous-faisceau de torsion du faisceau sans torsion $M_{C/A}$, donc est nul. Il est par conséquent injectif et son conoyau est de torsion. D'autre part, le fibré $M_{C/A}$ est ample (propriété 3). On est dans la situation du lemme 4.5 de [4], qui entraîne que le fibré $g^* M_{\mathbf{P}^1/X}$ est ample. Le fibré $g^* T\mathbf{P}^1$ étant ample, il suffit alors d'appliquer le lemme suivant à la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to g^* T\mathbf{P}^1 \to v^* f^* TX \to g^* N_{\mathbf{P}^1/X} \to 0,$$

pour conclure que $v^* f^* TX$ est ample et terminer ainsi la démonstration du deuxième pas. ■

LEMME. — *On considère une suite exacte :*

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

de faisceaux cohérents sur une courbe projective lisse irréductible. On suppose que E *et* E′ *sont localement libres, que* E′ *est ample et que le quotient de* E″ *par son sous-faisceau de torsion* E''_{tors} *est un fibré ample. Alors* E *est ample.*

• Le critère numérique de Hartshorne ([2], p. 84) montre qu'il est équivalent de montrer que tout fibré quotient non nul Q de E est de degré strictement positif. On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & E' & \to & E & \to & E'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Q' & \to & Q & \to & Q'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où le faisceau Q′ est l'image du morphisme composé $E' \to E \to Q$. Comme sous-faisceau du fibré Q, il est sans torsion donc localement libre. Comme E′ est ample, le critère de Hartshorne s'applique : soit $\deg Q' > 0$, soit $Q' = 0$.

Soit Q''_{tors} le sous-faisceau de torsion de Q″. La surjection $E'' \to Q''$ induit une surjection $E''/E''_{\text{tors}} \to Q''/Q''_{\text{tors}}$. Le critère de Hartshorne s'applique de nouveau au fibré quotient Q''/Q''_{tors} du fibré ample E''/E''_{tors} :

— soit $\deg(Q''/Q''_{\text{tors}}) > 0$, c'est-à-dire $\deg Q'' > \deg Q''_{\text{tors}} \geqq 0$;

— soit $Q'' = Q''_{\text{tors}}$, c'est-à-dire $\deg Q'' = \deg Q''_{\text{tors}} \geqq 0$.

Dans les deux cas, on a $\deg Q'' > 0$, sauf si $Q'' = 0$. On en conclut :

$$\deg Q = \deg Q' + \deg Q'' > 0 \qquad \text{sauf si} \quad Q' = Q'' = 0.$$

Tout fibré quotient non nul Q de E est donc bien de degré strictement positif, ce qui prouve l'amplitude de E. ■

Le théorème de Mori s'applique donc à la variété X et entraîne qu'elle est isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}^n$.

Pour faire le lien avec la conjecture de Lazarsfeld mentionnée au début de la Note, on remarquera que les propriétés 1 et 2 sont encore vérifiées pour le quotient d'un groupe semi-simple par un sous-groupe parabolique maximal, mais pas en général la propriété 3 : les quadriques lisses contiennent des courbes lisses dont le fibré normal a un facteur direct trivial [7].

Note remise et acceptée le 4 avril 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. GIESEKER, p-ample bundles and their Chern classes, *Nagoya Math. J.*, 43, 1971, p. 91-116.

[2] R. HARTSHORNE, Ample vector bundles on curves, *Nagoya Math. J.*, 43, 1971, p. 73-89.

[3] R. HARTSHORNE, Ample vector bundles, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 29, 1966, p. 63-94.

[4] R. LAZARSFELD, Some applications of the theory of positive vector bundles, *Complete intersections*, C.I.M.E., Acireale, 1983; *Lecture Notes in Math.*, n° 1092, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[5] S. MORI, Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. Math.*, 110, 1979, p. 593-606.

[6] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*, Tata Studies in Math., 5, Oxford, 1970.

[7] K. H. PARANJAPE et V. SRINIVAS, Self maps of homogeneous spaces (à paraître).

Mathématiques, Bât. n° 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex*.