# SUR LE PROBLEME DE TORELLI POUR LES VARIETES DE PRYM

Par Olivier Debarre

Le problème de Torelli pour les courbes est la question de savoir si une courbe projective lisse connexe est déterminée par sa jacobienne. La réponse à cette question est affirmative et une des nombreuses démonstrations de ce théorème est la suivante.

Soient $C$ une courbe lisse de genre $g$ non hyperelliptique, $JC$ sa jacobienne et $\Theta$ un diviseur thêta. Le morphisme $C \to \mathbf{P}H^0(C, K_C)^* \simeq \mathbf{P}^{g-1}$ associé au système canonique induit un isomorphisme de $C$ sur son image $X$. D'autre part, les cônes tangents à $\Theta$ en ses points singuliers $x$ de multiplicité 2 sont des quadriques dans $\mathbf{P}T_xJC$, canoniquement isomorphe à $\mathbf{P}H^0(C, K_C)^*$. Ces quadriques sont de rang au plus quatre et contiennent la courbe canonique $X$.

Un très joli théorème de M. Green ([Gr 1]) montre que ces quadriques engendrent l'espace vectoriel des quadriques contenant $X$. Ensuite, le théorème de Petri énonce que l'idéal de $X$ dans $\mathbf{P}^{g-1}$ est engendré par des quadriques, pourvu que la courbe $C$ n'ait ni $g_3^1$, ni $g_5^2$ (ce qui impose $g \geq 5$).

Il suffit donc, pour ces courbes-là, de prendre l'intersection des quadriques $\mathbf{P}T_x\Theta$, où $x$ est de multiplicité deux sur $\Theta$, dans $\mathbf{P}T_0JC$, pour retrouver la courbe $C$ à partir de sa jacobienne.

Venons-en au problème analogue pour les variétés de Prym. On sait qu'on peut associer à tout revêtement double étale $\pi : \tilde{C} \to C$ de courbes lisses une variété abélienne principalement polarisée de dimension $p = g_C - 1$, sa variété de Prym. Il est alors naturel de se demander dans quels cas le revêtement double est déterminé par sa variété de Prym.

Pour des raisons de dimension d'espaces de modules, la réponse est toujours négative pour $p \leq 5$ : pour tout revêtement double étale, il en existe un autre non isomorphe qui a même variété de Prym.

D'autre part, la construction tétragonale de Donagi ([Do], [Be 1])

Manuscript received 6 October 1987.
*American Journal of Mathematics* 111 (1989), 111–134.

montre que tout revêtement étale double d'une courbe admettant un $g_4^1$ a même variété de Prym qu'un revêtement d'une autre courbe (admettant aussi un $g_4^1$), en général non isomorphe au premier (cf. [De 1]). Le problème de Torelli a donc une réponse négative en toute dimension.

Néanmoins, on sait que pour $p \geq 6$, la réponse est génériquement oui ([Ka] pour $p \geq 8$, [Fr-S] pour $p \geq 6$) : un revêtement double étale d'une courbe *générique* de genre au moins 7 est déterminé par sa variété de Prym.

Actuellement, cependant, la seule démonstration constructive existante de ce théorème est celle de Welters ([We 1]), qui donne, en dimension $p \geq 16$, un moyen géométrique de retrouver un revêtement double générique à partir de sa variété de Prym.

La méthode que nous allons exposer est calquée sur les principes détaillés au début de cette introduction (théorèmes de Green et de Petri) et s'applique en toute dimension $p \geq 7$.

A tout revêtement double étale $\pi : \tilde{C} \to C$ est associée une classe de diviseurs $\eta$ d'ordre 2. L'analogue de la courbe canonique est la courbe semi-canonique $X$, image du morphisme $C \to \mathbf{P}H^0(C, K_C + \eta)^* \simeq \mathbf{P}^{g_C - 2}$ associé au système linéaire $|K_C + \eta|$ (sans point base si $C$ n'est pas hyperelliptique).

Les singularités du diviseur thêta de la variété de Prym associée $(P, \Xi)$ sont de deux types : stables (existent toujours lorsque $p = \dim P = g_C - 1 \geq 6$) ou exceptionnelles (n'existent pas pour un revêtement générique). De nouveau, les cônes tangents au diviseur $\Xi$ en les points singuliers *stables* $x$ de multiplicité 2 sont des quadriques dans $\mathbf{P}T_xP$, canoniquement isomorphe à $\mathbf{P}H^0(C, K_C + \eta)^*$. Ces quadriques sont de rang au plus 6 et contiennent la courbe semi-canonique $X$.

On commence par déduire des résultats de [De 2] un analogue générique du théorème de Green, en montrant que *ces quadriques engendrent, pour un revêtement générique, l'espace vectoriel des quadriques contenant* $X$ (qui est nul pour $p \leq 5$). C'est l'objet de la première partie. On en profite pour montrer que *génériquement, le lieu singulier du diviseur* $\Xi$ *est non vide de dimension* $p - 6$ *pour* $p \geq 6$, *réduit pour* $p = 6$, *intègre pour* $p \geq 7$, *de classe de cohomologie* $16\frac{1}{6!}\,[\Xi]^6$.

Dans la seconde partie, on montre que *génériquement, l'idéal de la courbe semi-canonique est engendré par des quadriques pour* $p \geq 8$ (il nous suffit d'exhiber *une* telle courbe) : c'est l'analogue du théorème de Petri. Pour $p = 7$, on doit se contenter d'un résultat plus faible : l'intersection des quadriques contenant $X$ est réunion de $X$ et de au plus deux points.

Comme pour les courbes, on en déduit immédiatement le théorème de Torelli pour les variétés de Prym génériques de dimension $p \geq 7$. En dimension 6, seulement 3 quadriques indépendantes de $\mathbf{P}^5$ contiennent $X$, qui ne peut donc être déterminé par leur intersection.

Pour terminer, je voudrais signaler dans quelle mesure la méthode employée pourrait aider à préciser le terme "générique" dans les énoncés ci-dessus.

Tout d'abord, il résulte de [Gr-L] et de [Ke] que sur une courbe lisse de genre $g \geq 11$ sans $g^1_4$, les systèmes semi-canoniques sont projectivement normaux. Ensuite, la conjecture (3.4) de [Gr-L] affirme que si l'index de Clifford de la courbe est au moins 4 (c'est-à-dire essentiellement si la courbe n'a pas de $g^1_5$), alors l'idéal de la courbe semi-canonique est engendré par des quadriques, sauf si celle-ci a une trisécante. En effet, la présence d'une trisécante, qui est équivalente à l'existence de deux diviseurs effectifs $D$ et $E$ de degré trois vérifiant $\eta \equiv D - E$, empêche bien sûr la courbe semi-canonique d'être intersection de quadriques. En particulier, il est clair que l'idéal de certaines courbes semi-canoniques projectivement normales n'est pas engendré par des quadriques.

Les conditions imposées par la conjecture mentionnée ci-dessus semblent un peu trop contraignantes, surtout si l'on a en vue la conjecture de Donagi ([Do]) qui énonce qu'un revêtement double étale d'une courbe lisse *sans* $g^1_4$ est déterminé par sa variété de Prym. Par exemple, des méthodes entièrement différentes m'ont permis de prouver récemment le théorème de Torelli pour les variétés de Prym dans le cas particulier mentionné ci-dessus.

Il suffirait en fait de montrer, en suivant Tjurin, que l'intersection des quadriques contenant la courbe semi-canonique est de dimension 1 et a une seule composante du bon degré.

Il resterait ensuite à montrer que les cônes tangents aux points doubles stables du diviseur thêta engendrent l'espace des quadriques contenant la courbe semi-canonique. Dans ce sens, il est encourageant de noter que lorsque la courbe n'a pas de $g^1_4$, les singularités exceptionnelles sont de codimension $>6$ dans la variété de Prym : on peut donc reconnaître a priori les singularités stables, ce qui est indispensable puisque les cônes tangents en les singularités exceptionnelles ne contiennent pas en général la courbe semi-canonique.

**1. Cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta d'une variété de Prym.** On s'est interessé dans [De 2] à la question de savoir si la famille des variétés de Prym de dimension $p$ est une composante de la sous-variété fermée suivante de l'espace des modules $\mathcal{A}_p$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $p$ :

$$\mathcal{N}_{p-6} = \{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_p \mid \dim \operatorname{Sing} \Theta \geq p - 6\}.$$

La méthode employée par Andreotti et Mayer dans [An-M] ramène aussitôt ce problème à la question suivante : pour une variété de Prym générique $(P, \Xi)$ de dimension $p$, les cônes tangents en les points doubles de $\Xi$ engendrent-ils l'espace vectoriel des quadriques contenant la courbe semi-canonique (cf. Introduction)?

Dans [De 2], on a adopté une approche un peu différente : on a préféré montrer tout d'abord que la méthode d'Andreotti et Mayer peut s'appliquer sur le bord de $\mathcal{A}_p$, et étudier ensuite un exemple simple sur ce bord pour conclure.

On montre dans cette section que ces deux approches sont essentiellement les mêmes : les résultats de [De 2] permettent de répondre affirmativement à la question ci-dessus.

Théorème 1.1. *Soit $(P, \Xi)$ une variété de Prym générique de dimension $p \geq 6$. On a alors :*

(i) Sing $\Xi$ *est de dimension $p - 6$, de classe de cohomologie $16\frac{[\Xi]^6}{6!}$, intègre pour $p \geq 7$, réduit pour $p = 6$.*

(ii) *Les cônes tangents à $\Xi$ en ses points singuliers de multiplicité* 2 *engendrent un espace vectoriel de codimension $3p$ dans $S^2T_0^*P$.*

On rappelle que si $(P, \Xi)$ est la variété de Prym d'un revêtement double étale d'une courbe lisse $C$ de genre $g = p + 1$, associé à l'élément $\eta$ d'ordre 2 de $JC$, l'espace des quadriques contenant la courbe semi-canonique $X = \phi_{|\omega_C \otimes \eta|}(C) \subset \mathbf{P}H^0(C, \omega_C \otimes \eta)^* \simeq \mathbf{P}T_0P$ est le noyau de l'application naturelle :

$$S^2H^0(C, \omega_C \otimes \eta) \to H^0(C, \omega_C^2),$$

qui pour $p \geq 6$ et $C$ générique, est de codimension $3p$. Les quadriques $T_x\Xi$, pour $x \in \operatorname{Sing}_2\Xi$, engendrent donc cet espace vectoriel.

■ On appellera variété quasi-abélienne (de rang 1) de dimension $p$ toute extension $G$ d'une variété abélienne principalement polarisée $(A, \Theta)$ de dimension $p - 1$ par $\mathbf{C}^*$. L'ensemble de ces extensions est en bijection avec les éléments de $A/\operatorname{Aut}(A)$.

On leur associe une compactification complète non normale $\overline{G}$, ainsi qu'un diviseur ample $D$ dans $\overline{G}$ : $\overline{G}$ est alors limite de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $p$ et $D$ celle de leur diviseur thêta ([Mu 1] pages 350-351).

On se donne maintenant une famille propre et plate $p : \overline{\mathcal{G}} \to U$, avec $\overline{\mathcal{G}}$ et $U$ lisses, et des diviseurs $\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{G}}$ et $T \subset U$, avec $T$ lisse, tels que:

• Pour $u \notin T$, $(\overline{\mathcal{G}}_u, \mathcal{D}_u)$ est une variété abélienne principalement polarisée de dimension $p$.

• Pour $u \in T$, $\overline{\mathcal{G}}_u$ est la compactification d'une variété semi-abélienne $\mathcal{G}_u$ et $\mathcal{D}_u$ son "diviseur thêta".

Mumford introduit alors un sous-schéma $\mathcal{S} = \mathrm{Sing}_{\mathrm{vert}}\, \mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$ qui satisfait entre autres à :

• Pour $u \notin T$, $\mathcal{S}_u = \mathrm{Sing}\, \mathcal{D}_u$

• Pour $u \in T$, si $\mathcal{G}_u$ est l'extension d'une variété abélienne principalement polarisée $A_u = \mathbf{C}^{p-1}/\mathbf{Z}^{p-1} \oplus \tau\mathbf{Z}^{p-1}$ par $\mathbf{C}^*$ associée à $a \in \mathbf{C}^{p-1}$, les équations locales définissant $\mathcal{S}_u$ au voisinage d'un point de $\mathcal{G}_u$ sont :

$$\begin{cases} f(z_0, z) = \theta(z, \tau) + z_0\theta(z - a, \tau) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z_j}(z_0, z) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots, p-1, \\[2ex] \text{où} \quad z_0 \in \mathbf{C}^*, \qquad z = (z_1, \ldots, z_{p-1}) \in \mathbf{C}^{p-1}. \end{cases}$$

En particulier, dans ce dernier cas, $\mathcal{S}_u$ se projette dans $A_u$ sur $\mathrm{Sing}(\Theta_u . \Theta_{u,a})$, injectivement hors de $\mathrm{Sing}\, \Theta_u$. $\mathrm{Sing}\, \Theta_{u,a}$ ($\Theta_u$ est le diviseur thêta de $A_u$).

Passons maintenant aux résultats de [De 2] concernant les intersections $\Xi . \Xi_a$ dans la variété de Prym d'un revêtement générique $\pi : \tilde{C} \to \tilde{C}/\sigma$, où $a$ est l'élément de $P$ associé à $\mathcal{O}_{\tilde{C}}\ (r + s - \sigma r - \sigma s)$ $(r, s \in \tilde{C})$.

On considère une famille $\mathcal{P} \to \Delta = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < 1\}$ de variétés de Prym de dimension $p - 1$, où $\mathcal{P}_0$ est une jacobienne générique $JN$ et $\mathcal{P}_t$ $(t \neq 0)$ la variété de Prym d'un revêtement générique $\pi_t : \tilde{C}_t \to \tilde{C}_t/\sigma_t$. On prend une section $a$ de $\mathcal{P} \to \Delta$ vérifiant :

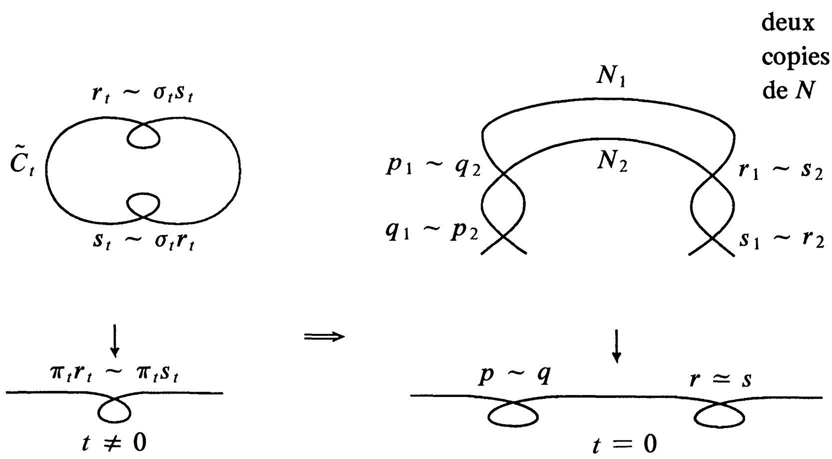
$\forall t \neq 0$ $a_t$ est l'élément de $\mathcal{P}_t$ associé à

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}_t}(r_t + s_t - \sigma_t r_t - \sigma_t s_t), \qquad \text{où} \quad r_t, s_t \in \tilde{C}_t.$$

$a_0$ est l'élément de $\mathcal{P}_0$ associé à

$$\mathcal{O}_N(p + q - r - s), \qquad \text{où} \quad p, q, r, s \in N.$$

La famille d'extensions par $\mathbf{C}^*$ associée, $\mathcal{G} \to \Delta$, n'est autre que la famille de variétés de Prym semi-abéliennes associée à la famille de revêtements doubles non admissibles :




On a montré dans [De 2] que pour $p > 7$, le sous-espace analytique $\mathcal{S}'$ ($\mathcal{S}^{r,s}$ dans les notations de *loc.cit.*) de $\mathcal{P}$ défini ensemblistement par :

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{t \in \Delta} \operatorname{Sing}(\Xi_t . \Xi_{t,a_t})$$

était irréductible de codimension 5 et dominait $\Delta$.

Comme on l'a remarqué plus haut, la projection de $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{G}}$ sur $\mathcal{S}'$ est injective hors de $\operatorname{Sing} \Xi_t . \operatorname{Sing} \Xi_{t,a_t}$, qui est de codimension $\geq 7$ pour $t \neq 0$ (cf. démonstration de 7.1 de *loc.cit.*).

On en déduit qu'une seule composante $\mathcal{S}^0$ de $\mathcal{S}$ domine $\Delta$ et qu'elle est de codimension 6 dans $\overline{\mathcal{G}}$. Pour $t \neq 0$, $\mathcal{S}_t$ est irréductible de dimension $p - 6$ (cf. démonstration de 6.5 de *loc.cit.*). Il est aussi réduit : la matrice jacobienne correspondant aux équations $f(z_0, z) = (\partial f/\partial z_j)(z_0, z) = 0$ pour $j = 0, \ldots, p - 1$, est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial\theta(z-a,\tau)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta(z-a,\tau)}{\partial z_{p-1}} \\ \dfrac{\partial\theta(z-a,\tau)}{\partial z_1} & & & \\ \vdots & & \dfrac{\partial^2\theta(z,\tau)}{\partial z_i\partial z_j} + z_0\cdot\dfrac{\partial^2\theta(z-a,\tau)}{\partial z_i\partial z_j} & \\ \dfrac{\partial\theta(z-a,\tau)}{\partial z_{p-1}} & & & \end{pmatrix}$$

Or, pour $z \in \operatorname{Sing} \Xi_t \subset \mathcal{S}_t'$, $(0, z)$ est dans $\mathcal{S}_t$ et le rang de cette matrice en ce point est $\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial z_i\partial z_j}(z, \tau)\right)$, soit 6 pour $z$ générique dans $\operatorname{Sing} \Xi_t$ ([We 2]) : le schéma $\mathcal{S}_t$ est donc génériquement lisse. Etant de Cohen-Macaulay, il est en particulier réduit.

Enfin, on a aussi considéré dans *loc. cit.* les applications rationnelles :

$$\Phi_t : \mathcal{S}_t^0 \dashrightarrow \mathbf{P}^{\binom{p+1}{2}-2}$$

$$(z_0, z) \longmapsto \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}(z_0, z)\right]_{\substack{0\le i,j\le p-1\\ (i,j)\neq(0,0)}}$$

On a montré que l'image de $\Phi_0$ engendrait un espace projectif de dimension $\binom{p+1}{2} - 2 - 3(p-1) - 2 = N$ (démonstration de 7.1 de *loc. cit.*), de sorte qu'il existe $x_0, \ldots, x_N$, qu'on peut supposer lisses sur $\mathcal{S}_0^0$, tels que :

$$\operatorname*{Rang}_{0\le\alpha\le N}\left(\ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}(x_\alpha), \ldots\right) = N + 1.$$

L'application $\mathcal{S}^0 \to \Delta$ est lisse en les $x_\alpha$. On peut donc trouver des sections $x_0^t, \ldots, x_N^t$ de $\mathcal{S} \to \Delta$ valant $x_0, \ldots, x_N$ en 0. La dimension de l'espace projectif engendré par les $\Phi_t(x_\alpha^t)$ est alors au moins $N$ (en fait égale à $N$). Pour $t \neq 0$, l'espace projectif engendré par $\Phi_t(\mathcal{S}_t)$ est donc de dimension $\binom{p+1}{2} - 1 - 3p$.

On peut maintenant faire une deuxième "générisation". Soient $G_0$ une variété semi-abélienne de Prym générique de dimension $p \geq 7$ et $\mathcal{G} \to \Delta$ une famille de variétés de Prym vérifiant :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_0 = G_0 \\ \mathcal{G}_t, \text{ pour } t \neq 0, \text{ est une variété (abélienne) de Prym générique.} \end{cases}$$

Il découle de ce qui précède que le sous-schéma $\mathcal{S}$ de $\overline{\mathcal{G}}$ associé satisfait à :

(i) $\mathcal{S}_0$ est irréductible réduit de dimension $p - 6$, donc aussi $\mathcal{S}_t$ pour $t$ proche de 0, puisque ses composantes irréductibles sont toutes de dimension au moins $p - 6$.

(ii) L'image de l'application rationnelle :

$$\Psi_t : \mathcal{S}_t \dashrightarrow \mathbf{P}^{\binom{p+1}{2}-1}$$

$$x \longmapsto \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(x)\right]_{0 \leq i,j \leq p-1}$$

engendre un espace projectif de dimension au moins $\binom{p+1}{2} - 1 - 3p$ (c'est vrai pour $t = 0$ donc aussi pour $t$ proche de 0 par le même raisonnement que celui utilisé plus haut).

On a donc montré que pour une variété de Prym générique $(P, \Xi)$ de dimension $p \geq 7$, Sing $\Xi$ était irréductible de dimension $p - 6$, et que les quadriques $Q_x = T_x\Xi$, pour $x$ point singulier de multiplicité 2 sur $\Xi$, engendraient un espace vectoriel de codimension $3p$ dans $S^2T_0^*P$.

Il reste à calculer la classe de cohomologie de Sing $\Xi$ et à traiter le cas $p = 6$. Pour une jacobienne générique (donc aussi pour une variété de Prym générique), la cohomologie analytique est engendrée par la classe $\theta$ du diviseur thêta ([A-C-G-H 2], Chapitre X). Il existe donc un entier $n$ positif tel que, pour une variété de Prym générique $(P, \Xi)$, on ait :

$$[\mathrm{Sing}\ \Xi] = n\,\frac{\theta^6}{6!}.$$

Pour calculer $n$, on revient à notre variété semi-abélienne de Prym $G_0$. La normalisée de $\overline{G}_0$ est un fibré projectif $\rho : \mathbf{P}(\mathcal{O}(\Xi_0) \oplus \mathcal{O}(\Xi_{0,a})) \to P_0$, où

$(P_0, \Xi_0)$ est une variété de Prym générique de dimension $p - 1$ ([Mu 1], page 351). Si $\xi$ est la classe de $\rho^*\Xi_0$, $x$ celle de $\mathcal{O}(1)$, on a :

(i) Si $D_0 \subset G_0$ est le "diviseur thêta" défini au début de la démonstration, la classe de $D_0$ est $x$ ([Mu 1], page 351).

(ii) La classe de $\mathcal{S}_0^0$ satisfait à ([De 2], Corollaire 6.8) :

$$[\mathcal{S}_0^0]\,.\,\xi^{p-6} = \frac{2}{15}(p - 1)!.$$

(iii) On a :

$$x\,.\,\xi^{p-1} = (p - 1)!$$

$$(x - \xi)^2 = 0,$$

puisque les sections 0 et $\infty$ de $\rho$ sont disjointes et de même classe $(x - \xi)$.

On a donc :

$$\frac{2}{15}(p - 1)! = [\mathcal{S}_0^0]\,.\,\xi^{p-6} = n\,\frac{x^6}{6!}\,\xi^{p-6}$$

$$= \frac{n}{6!}(x - \xi + \xi)^6\xi^{p-6}$$

$$= \frac{n}{6!}\,6(x - \xi)\xi^{p-1} = \frac{n}{5!}(p - 1)!$$

de sorte que $n = 16$.

Reste le cas $p = 6$. On garde sans les rappeler les notations précédentes. La démonstration de 6.3 de [De 2] donne encore $\mathcal{S}_0^0 = [W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta] \cup [(-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta_a] \cup [W_{p,q} \cap (-W_{r,s})]$. Ces trois sous-schémas sont disjoints, de dimension 6 et de degrés respectifs 5, 5 et 6 (Lemme 3.7 et Proposition 3.10 de *loc. cit.*). Montrons qu'ils sont réduits.

Soit $C$ une courbe non hyperelliptique de genre 5, $p + q + r + s + p' + q' + r' + s'$ un diviseur canonique *réduit*. Les éléments de $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$ correspondent aux choix de deux points parmi $p'$, $q'$, $r'$ et $s'$. Il y en a donc 6. En ce qui concerne $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ et $(-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta_a = a - [W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta]$, la fin de la démonstration de la Proposition 3.2 de *loc. cit.* montre qu'ils sont lisses. On en déduit comme pour $p \geq 7$ le premier point du théorème.

Par 3.4 de *loc. cit.*, les images des points de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$ par l'application $\Phi$ définie plus haut engendrent un espace projectif de dimension 1. Celles des points de $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$ ne sont pas contenues dans cet espace. On en déduit (comme pour $p \gneqq 7$) que pour une variété de Prym générique $(P, \Xi)$ de dimension 6, les quadriques $T_x\Xi$, $x \in \operatorname{Sing}_2\Xi$, engendrent un espace vectoriel de dimension au moins 3. Cela termine la démonstration puisque $S^2T_0^*P$ est de dimension $\binom{6+1}{2} = 21$. ■

*Remarque* 1.2. Les résultats ci-dessus, joints à une extension facile du théorème d'Andreotti et Mayer ([An-M], [De 1], Théorème 5.4.3) permettent de montrer que la famille $\mathcal{P}_6$ des variétés de Prym de dimension 6 est une composante irréductible de l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées dont un diviseur thêta a 16 points singuliers, complétant par là les résultats de [De 2].

**2. Construction de courbes semi-canoniques.** Cette section est consacrée à la construction de courbes semi-canoniques projectivement normales, dont l'idéal soit engendré par des quadriques.

On aura besoin de certains complexes de Koszul étudiés dans [Gr 2] : si $X$ est une variété analytique compacte, $L$ et $M$ deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles, il existe des différentielles :

$$d_{p,q} : \Lambda^p H^0(X, L) \otimes H^0(X, M \otimes L^q) \to \Lambda^{p-1} H^0(X, L) \otimes H^0(X, M \otimes L^{q+1})$$

qui font de $(\Lambda^p H^0(X, L) \otimes H^0(X, M \otimes L^q))_{p+q=r}$ un complexe dont les groupes de cohomologie sont notés $K_{p,q}(X, M, L)$ ou $K_{p,q}(X, L)$ lorsque $M = \mathcal{O}_X$.

Il est facile de voir qu'on a en particulier :

$$|L| \text{ est projectivement normal} \Leftrightarrow \forall q \geq 2 \quad S^q H^0(X, L) \to H^0(X, L^q) \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall q \geq 2 \quad K_{0,q}(X, L) = 0 \quad (K_{0,1} \text{ est toujours nul}).$$

Dans ce cas, le système linéaire $|L|$, s'il est de plus ample, définit un plongement $\phi_L : X \to \mathbf{P}H^0(x, L)^*$. L'idéal $I$ de $\phi_L(X)$ est défini par la suite exacte suivante de modules gradués :

$$0 \to I \to SH^0(X, L) \to \bigoplus_{q \geq 0} H^0(X, L^q) \to 0.$$

On a alors :

$$K_{1,q}(X, L) \simeq I_{q+1}/H^0(X, L)I_q,$$

de sorte que :

$I$ est engendré par ses éléments de degré 2 $\Leftrightarrow$ $\forall q \geq 2 \quad K_{1,q}(X, L) = 0.$

On utilise une construction déjà étudiée dans [De 1]. Soient $B$ une courbe lisse connexe de genre $g_B$ et $p : C \to B$ un morphisme de degré 2 de ramification $\Delta$ lisse sur $B$. On a alors :

$$p_* \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(-\delta)$$

avec $\deg \delta = g_C - (2g_B - 1)$ et $\Delta \in |2\delta|$.

Pour toute décomposition $\Delta = \Delta' + \Delta''$ avec $\deg \Delta'$ et $\deg \Delta''$ pairs, il existe des diviseurs $\delta'$ et $\delta''$ sur $B$ vérifiant :

$$\Delta' \in |2\delta'|, \qquad \Delta'' \in |2\delta''|, \qquad \delta \equiv \delta' + \delta''.$$

Si on pose $R' = \frac{1}{2}p^*\Delta'$ et $R'' = \frac{1}{2}p^*\Delta''$, la classe de diviseurs $\eta = [R' - p^*\delta'] = [R'' - p^*\delta'']$ est d'ordre 2 sur $C$. Les revêtements doubles associés $\pi : \tilde{C} \to C$ ainsi obtenus sont exactement ceux pour lesquels le groupe de Galois du morphisme composé $p\pi : \tilde{C} \to B$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^2$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{C} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ C \arrow[dr, "p"'] & C' \arrow[d, "p'"] & C'' \arrow[dl, "p''"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

avec

$$p'_*\mathcal{O}_{C'} \simeq \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(-\delta') \qquad \operatorname{Ram} p' = \Delta'$$

$$p''_*\mathcal{O}_{C''} \simeq \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(-\delta'') \qquad \operatorname{Ram} p'' = \Delta''.$$

La courbe $C$ est classiquement construite comme diviseur dans la surface réglée $\mathbf{P}(\mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(-\delta))$ mais il est plus avantageux pour nous de la considérer dans :

$$S = \mathbf{P}(\mathcal{O}(\delta') \oplus \mathcal{O}(\delta'')) \xrightarrow{p} B$$

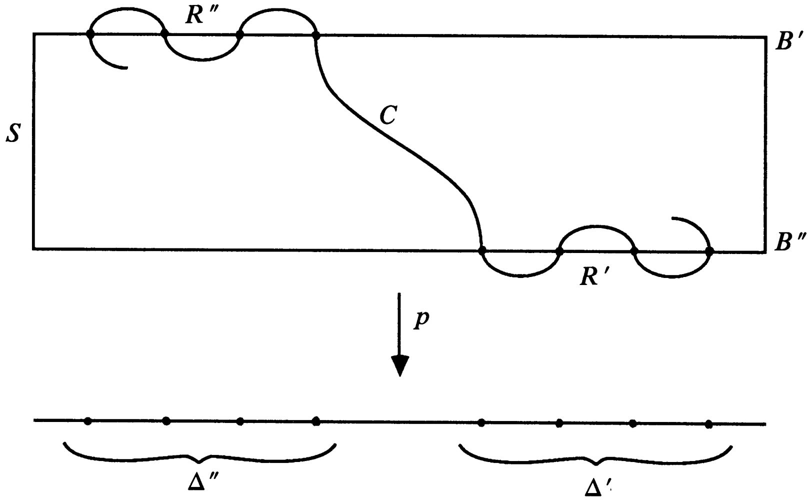
(on passe de l'un à l'autre point de vue par des transformations élémentaires). Plus précisément, on note $B'$ (resp. $B''$) la section de $p$ associée au sous-fibré $\mathcal{O}(\delta')$ (resp. $\mathcal{O}(\delta'')$) de $\mathcal{O}(\delta') \oplus \mathcal{O}(\delta'')$ et $s'$ (resp. $s''$) une section de $\mathcal{O}_S(B')$ (resp. $\mathcal{O}_S(B'')$) de diviseur $B'$ (resp. $B''$). On a alors :

$$B'' \equiv B' + p^*(\delta' - \delta'')$$

$$B'^2 = -B''^2 = \deg(\delta'' - \delta')$$

$$B'.B'' = 0.$$

La courbe $C$ est l'élément de $|2B' + p^*\Delta'| = |2B'' + p^*\Delta''|$ d'équation $s''^2 p^*s_{\Delta''} - s'^2 p^*s_{\Delta'}$, où $\operatorname{div} s_{\Delta'} = \Delta'$ et $\operatorname{div} s_{\Delta''} = \Delta''$. La figure est :



La classe de diviseurs $\eta \equiv R' - p^*\delta' \equiv R'' - p^*\delta''$ sur $C$ provient d'une classe de diviseurs sur $S$ :

$$\eta \equiv (B'' - p^*\delta')|_C \equiv (B' - p^*\delta'')|_C.$$

Le système semi-canonique $|K_C + \eta|$ est la restriction à $C$ du système linéaire suivant sur $S$ :

$$H \equiv B' + p^*(K_B + \delta') \equiv B'' + p^*(K_B + \delta'').$$

On a enfin :

$$C \equiv 2H - 2p^*K_B$$

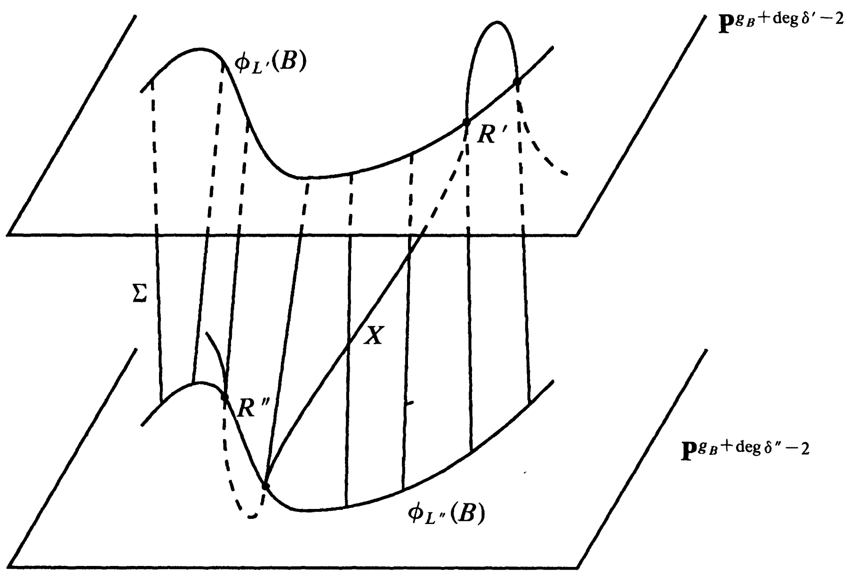
$$H^0(S, H) \rightrightarrows H^0(C, K_C + \eta) \simeq p^*H^0(B, L')s'' \oplus p^*H^0(B, L'')s'$$

avec

$$L' = \mathcal{O}_B(K_B + \delta') \quad \text{et} \quad L'' = \mathcal{O}_B(K_B + \delta'')$$

(cf. [De 1], Lemme 5.4.1).

La courbe semi-canonique $X = \phi_{|K_C+\eta|}(C)$ est donc contenue dans la surface réglée $\Sigma = \phi_{|H|}(S)$ :



On a $p_*\mathcal{O}(nH) \simeq S^n(L' \oplus L'')$, de sorte que l'idéal de $\Sigma$ est le noyau de l'application naturelle :

$$S(H^0(B, L') \oplus H^0(B, L'')) \to \bigoplus_{j,k} H^0(B, L'^j \otimes L''^k).$$

En ce qui concerne l'idéal $I$ de la courbe $X$, la situation est la suivante :

(i) En degré pair $2n$, on a :

$$H^0(C, 2n(K_C + \eta)) \simeq p^*H^0(B, 2n(K_B + \delta))$$
$$\oplus\ p^*H^0(B, 2n(K_B + \delta) - \delta)s,$$

avec $s = s's''$.

La partie $I_{2n}$ de degré $2n$ de $I$ est la somme des noyaux des morphismes suivants :

$$\rho_{2n}^+ : \bigoplus_{k=0}^{n} (S^{2k}H^0(L') \otimes S^{2n-2k}H^0(L'')) \longrightarrow H^0(2n(K_B + \delta))$$

$$u_1' \cdot \cdots \cdot u_{2k}' \otimes u_1'' \cdot \cdots \cdot u_{2n-2k}''$$
$$\longmapsto u_1' \cdots u_{2k}' s_{\Delta''}^{n-k} u_1'' \cdots u_{2n-2k}'' s_{\Delta'}^k$$

$$\rho_{2n}^- : \bigoplus_{k=0}^{n-1} (S^{2k+1}H^0(L') \otimes S^{2n-2k-1}H^0(L'')) \longrightarrow H^0(2n(K_B + \delta) - \delta)$$

$$u_1' \cdot \cdots \cdot u_{2k+1}' \otimes u_1'' \cdot \cdots \cdot u_{2n-2k-1}''$$
$$\longmapsto u_1' \cdots u_{2k+1}' s_{\Delta''}^{n-k-1} u_1'' \cdots u_{2n-2k-1}'' s_{\Delta'}^k.$$

(ii) En degré impair $2n + 1$, on a :

$$H^0(C, (2n + 1)(K_C + \eta)) \simeq p^*H^0(B, 2n(K_B + \delta) + K_B + \delta')s''$$
$$\oplus\ p^*H^0(B, 2n(K_B + \delta) + K_B + \delta'')s',$$

et $I_{2n+1}$ est la somme des noyaux de :

$$\rho'_{2n+1} : \bigoplus_{k=0}^{n} (S^{2k}H^0(L') \otimes S^{2n-2k+1}H^0(L''))$$

$$\longrightarrow H^0(2n(K_B + \delta) + K_B + \delta')$$

$$u'_1 \cdot \cdots \cdot u'_{2k} \otimes u''_1 \cdot \cdots \cdot u''_{2n-2k+1}$$

$$\longmapsto u'_1 \cdots u'_{2k} s_{\Delta''}^{n-k} u''_1 \cdots u''_{2n-2k+1} s_{\Delta'}^{k},$$

et du morphisme $\rho''_{2n+1}$ défini de façon analogue.

**Proposition 2.1.** *La courbe $X \subset \mathbf{P}^{g_C-2}$ construite plus haut est projectivement normale dans chacun des cas suivants :*

(i) $\deg \delta' \geq 3$ *et* $\deg \delta'' \geq 3$.
(ii) $g_B = 2$, $\deg \delta' = 2$, $\deg \delta'' \geq 3$ *et* $\delta' \neq g^1_2$.
(iii) $g_B = 2$, $\deg \delta' = 1$, $\deg \delta'' \geq 3$, $H^0(\delta') = 0$ *et* $\delta'' \neq g^1_2 + \delta'$.
(iv) $g_B = 2$, $\deg \delta' = 1$, $\deg \delta'' = 2$, $H^0(\delta') = H^0(\delta'' - \delta') = 0$, $\delta'' \neq g^1_2$ *et* $\Delta''$ *générique dans* $|2\delta''|$.

■ Comme on l'a rappelé plus haut, il suffit de montrer que les groupes $K_{0,q}(C, H)$ sont nuls pour $q \geq 2$. Comme $h^0(C, K_C - H) = 0$, le théorème 2.c.10 de [Gr 2] entraîne qu'ils sont nuls pour $q \geq 3$. Il reste à étudier la surjectivité de :

$$S^2H^0(C, K_C + \eta) \to H^0(C, 2K_C),$$

c'est-à-dire celle de :

$$\rho_2^+ : S^2H^0(B, L') \oplus S^2H^0(B, L'') \longrightarrow H^0(B, 2K_B + 2\delta)$$

$$(u' \cdot v', u'' \cdot v'') \longmapsto u'v's_{\Delta''} + u''v''s_{\Delta'}$$

et

$$\rho_2^- : H^0(B, L') \otimes H^0(B, L'') \longrightarrow H^0(B, L' \otimes L'').$$

Le morphisme $\rho_2^-$ est surjectif pour deg $\delta' \geq 2$ et deg $\delta'' \geq 3$ ([Gr 2], Corollary 4.e.4, page 163).

Lorsque $g_B = 2$ et deg $\delta' = 1$, le système linéaire $|L'|$ est un pinceau, sans point base si $H^0(\delta') = 0$. Le noyau de $\rho_2^-$ est alors isomorphe à $H^0(\delta' - \delta'')$, qui est de dimension deg $\delta'' - 2$ sous nos hypothèses. On en déduit :

$$\text{Rang } \rho_2^- = 2(\deg \delta'' + 1) - (\deg \delta'' - 2) = h^0(L' \otimes L''),$$

de sorte que $\rho_2^-$ est surjective.

Il reste à étudier $\rho_2^+$. Lorsque deg $\delta' \geq 3$ et deg $\delta'' \geq 3$, l'image de $\rho_2^+$ est aussi celle de ([Mu 2], [Gr 2]) :

$$\alpha : H^0(B, L'^2) \oplus H^0(B, L''^2) \longrightarrow H^0(B, 2K_B + 2\delta)$$

$$(u', u'') \longmapsto u's_{\Delta''} + u''s_{\Delta'},$$

dont le noyau est, puisque $\Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$, isomorphe à $H^0(B, L'^2(-\Delta')) \simeq H^0(B, 2K_B)$. La surjectivité de $\alpha$, donc celle de $\rho_2^+$, résulte alors d'un simple compte de dimensions.

Lorsque $g_B = 2$ et deg $\delta' = 2$, $\phi_{L'}(B)$ est une quartique dans $\mathbf{P}^2$ si $\delta' \neq g_2^1$. L'application naturelle :

$$S^2H^0(L') \longrightarrow H^0(L'^2)$$

$$Q' \longmapsto \underline{Q}',$$

est alors injective de corang 1.

Comme $H^0(L'(-\Delta')) = 0$, les quatre points de $\phi_{L'}(\Delta')$ ne sont pas alignés, de sorte que l'espace vectoriel $V'$ des coniques nulles sur $\phi_{L'}(\Delta')$ est de dimension 2.

Lorsque de plus deg $\delta'' \geq 3$, l'image de $\rho_2^+$ est aussi celle de :

$$\beta : S^2H^0(B, L') \oplus H^0(B, L''^2) \longrightarrow H^0(B, 2K_B + 2\delta)$$

$$(u' \cdot v', \underline{Q}'') \longmapsto \underline{Q}'s_{\Delta''} + \underline{Q}''s_{\Delta'}.$$

Le noyau de $\beta$ s'envoie surjectivement par la première projection sur $V'$. Ce morphisme est trivialement un isomorphisme, de sorte que le noyau de $\beta$ est de dimension 2. On en déduit la surjectivité de $\beta$ donc celle de $\rho_2^+$.

On raisonne de la même façon lorsque $g_B = 2$, $\deg \delta' = 1$ et $\deg \delta'' \geq 3$ : si $H^0(L'(-\Delta')) = 0$ (c'est-à-dire $H^0(\delta') = 0$), on a $\dim V' = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} \beta = 1$, ce qui entraîne la surjectivité de $\beta$ donc celle de $\rho_2^+$.

Lorsque $g_B = 2$, $\deg \delta' = 1$ et $\deg \delta'' = 2$, on a encore $\dim V' = 1$ (puisque $H^0(\delta') = 0$), engendré par $Q_0'$. On peut écrire $\underline{Q}_0' = u_0' v_0' s_{\Delta'}$ avec $u_0'$, $v_0' \in H^0(g_2^1)$. Pour tout élément $(Q_0', Q'')$ de $\operatorname{Ker} \rho_2^+$, on a alors $\underline{Q}'' = -u_0' v_0' s_{\Delta''}$, de sorte que la conique $Q''$ appartient au pinceau des coniques passant par les quatre points de $\operatorname{div}(u_0' v_0')$ sur la quartique $\phi_{L''}(B)$ ($\delta'' \neq g_2^1$).

Pour $\delta'$, $\Delta'$ et $\delta''$ fixés, les "mauvais" $\Delta''$ (ceux pour lesquels $\operatorname{Ker} \rho_2^+ \neq 0$, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe une conique contenant $\Delta''$ et $\operatorname{div}(u_0' v_0')$) forment donc une sous-variété de dimension 1 de $|2\delta''| \simeq \mathbf{P}^2$. Si on choisit $\Delta''$ en dehors de cette sous-variété, $\rho_2^+$ est injectif donc surjectif. ■

On en vient maintenant au résultat principal de cette section.

THÉORÈME 2.2. *La courbe $X \subset \mathbf{P}^{g_C - 2}$ construite plus haut est projectivement normale et son idéal est engendré par des quadriques dans chacun des cas suivants :*

(i) $\deg \delta' \geq 4$, $\deg \delta'' \geq 4$.

(ii) $g_B = 2$, $\deg \delta' \geq 3$, $\deg \delta'' \geq 3$ *et* $\delta'$, $\delta''$ *génériques.*

■ Comme on l'a rappelé plus haut, il suffit de montrer que les groupes $K_{1,q}(C, H)$ sont nuls pour $q \geq 2$. Le théorème de dualité 2.c.10 de [Gr 2] entraîne leur nullité pour $q \geq 3$.

Il suffit donc de montrer que $I_3$, somme des noyaux de :

$$\rho_3' : S^3 H^0(L'') \oplus [H^0(L'') \otimes S^2 H^0(L')] \longrightarrow H^0(3K_B + 3\delta' + 2\delta'')$$

$$(u'' \cdot v'' \cdot w'', t'' \otimes u' \cdot v') \longmapsto u'' v'' w'' s_{\Delta'} + t'' u' v' s_{\Delta''}$$

et du morphisme analogue $\rho_3''$ (avec $L'$ et $L''$ interchangés) est engendré par $I_2$ comme $H^0(L') \oplus H^0(L'')$-module.

On suppose $\deg \delta' \geq 3$ et $\deg \delta'' \geq 3$.

Soit $\alpha = (C'', \Sigma u_i'' \otimes Q_i')$ un élément du noyau de $\rho_3'$. La cubique $C''$

est "nulle sur $\Delta''$" : son image $\underline{C}'' \in H^0(L''^3)$ est dans $H^0(L''^3(-\Delta''))$. Puisque $\deg L'' \geq 2g_B + 1$, l'application naturelle :

$$H^0(L'') \otimes H^0(L''^2(-\Delta'')) \longrightarrow H^0(L''^3(-\Delta''))$$

est surjective ([Gr 2], Corollary 4.e.4, page 163). On peut donc écrire :

$$\underline{C}'' = \Sigma\, u_i'' \otimes r_i s_{\Delta''} \quad \text{avec} \quad r_i \in H^0(L''^2(-\Delta'')) = H^0(2K_B).$$

Comme $(r_i s_{\Delta''} - r_i s_{\Delta'}) \in \operatorname{Ker} \rho_2^+ \subset I_2$, on a :

$$\alpha \equiv \Sigma\, u_i'' \otimes (r_i s_{\Delta'} + Q_i') \pmod{I_2}$$
$$\in H^0(L'') \otimes S^2 H^0(L').$$

On pose alors, pour $q > 0$ :

$$I_{1,q} = \operatorname{Ker}\,[H^0(L'') \otimes S^q H^0(L'' \otimes L'^q)].$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$I_{1,1} = \operatorname{Ker} \rho_2^+ \subset I_2$$

$$\Sigma\, u_i'' \otimes (r_i s_{\Delta'} + Q_i') \in I_{1,2}$$

$$[I_{1,2} = H^0(L').I_{1,1}] \Leftrightarrow K_{1,1}(B, L'', L') = 0$$

Il nous suffit donc maintenant de montrer l'annulation de ce dernier groupe de cohomologie pour terminer la démonstration du fait que Ker $\rho_3'$ est engendré par $I_2$ comme $H^0(L') \otimes H^0(L'')$-module. Il en sera alors de même pour Ker $\rho_3''$, donc aussi pour $I_3 = \operatorname{Ker} \rho_3' \oplus \operatorname{Ker} \rho_3''$. La démonstration du théorème sera donc terminée.

Par le théorème de dualité 2.c.10 de [Gr 2], le groupe $K_{1,1}(B, L'', L')$ est isomorphe au dual de $K_{h^0(L')-3,1}(B, \omega_B \otimes L''^{-1}, L')$, qui est nul par Theorem 3.a.1 de *loc. cit.* si :

$$h^0(\omega_B \otimes L''^{-1} \otimes L') \leq h^0(L') - 3,$$

ce qui est équivalent, par le théorème de Riemann-Roch, à :

$$h^0(\delta'' - \delta') \leq \deg \delta'' - 3.$$

Si cette condition n'était pas réalisée, $\delta'' - \delta'$ serait alors spécial et on aurait par le théorème de Clifford :

$$\deg \delta'' - 3 < h^0(\delta'' - \delta') \leq \frac{1}{2}(\deg \delta'' - \deg \delta') + 1$$

soit $\deg \delta' + \deg \delta'' < 8$.

Ceci ne peut se produire, sous nos hypothèses, que dans le cas (ii) de l'énoncé du théorème. Mais on a alors $H^0(\delta'') \neq 0$ et, à $\delta'$ fixé, pour $\delta''$ générique :

$$h^0(\omega_B \otimes L''^{-1} \otimes L') = h^0(L'(-\delta''))$$

$$\leq \max(0, h^0(L') - \deg \delta'') \leq h^0(L') - 3.$$

Le groupe $K_{1,1}(B, L'', L')$ est donc toujours nul sous nos hypothèses, ce qui termine la démonstration du théorème. ■

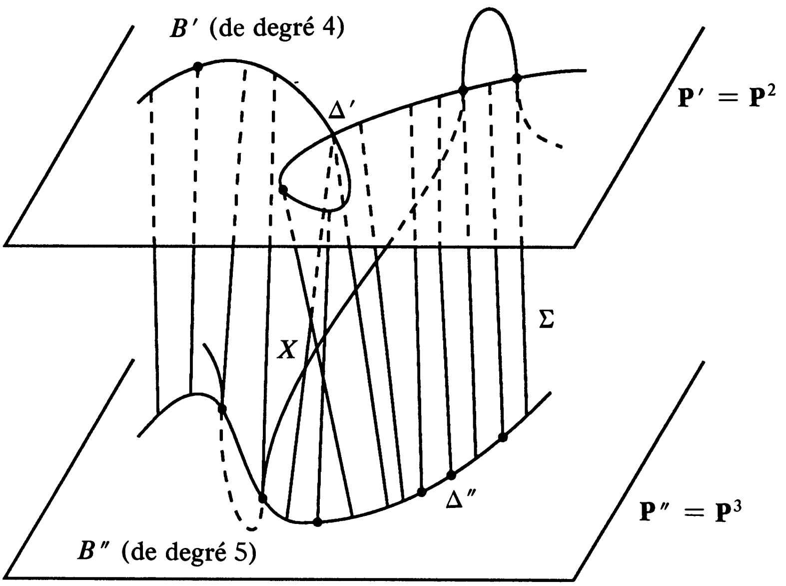
Des arguments standards de semi-continuité permettent de montrer que l'ensemble des courbes semi-canoniques $X$ projectivement normales (resp. projectivement normales et dont l'idéal est engendré par des quadriques) est un ouvert. Cet ouvert est non vide pour $g_X \geq 6$ : dans la proposition 2.1, on a $g_X = \deg \delta' + \deg \delta'' + 2g_B - 1$ et il suffit de prendre $g_B = 2$; $\deg \delta'' = 3$ et $\deg \delta' = 1, 2, \ldots$, ou $\deg \delta'' = 2$ et $\deg \delta' = 1$ (resp. non vide pour $g_X \geq 9$ : dans le théorème 2.2, on peut prendre $g_B = 2$, $\deg \delta'' = 3$ et $\deg \delta' = 3, 4, \ldots$). On a donc :

COROLLAIRE 2.3. *Soit $X \subset \mathbf{P}^{g_X-2}$ une courbe semi-canonique générique. Alors, pour $g_X \geq 6$, elle est projectivement normale et pour $g_X \geq 9$, son idéal est engendré par des quadriques.*

On rappelle que le fait pour $X$ d'être projectivement normale équivaut à l'injectivité de l'application tangente à l'application "Prym" qui à un revêtement double associe sa variété de Prym (de dimension $g_X - 1$) : on retrouve le fait déjà connu que c'est le cas si et seulement si $g_X - 1 \geq 5$ ([Be 2]).

Lorsque $g_X = 6$ (resp. $g_X = 7$), on a $X \subset \mathbf{P}^4$ et $\dim I_2(X) = 0$ (resp. $X \subset \mathbf{P}^5$ et $\dim I_2(X) = 3$) : l'idéal de $X$ ne peut être engendré par des quadriques dans ce cas. Le cas $g_X = 8$ reste ouvert (notre construction ne permet pas de conclure dans ce cas, comme le montre le théorème 2.4).

On va maintenant étudier la courbe semi-canonique $X$ construite précédemment, dans le cas $g_B = 2$, $\deg \delta' = 2$ et $\deg \delta'' = 3$. On est alors dans $\mathbf{P}^6$ et la situation est :




L'espace des quadriques contenant $X$ est somme de :

(i) $\operatorname{Ker}[\rho_2^- : H^0(L') \otimes H^0(L'') \to H^0(L' \otimes L'')]$, qui est de dimension 4. Ces quadriques contiennent $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$ et $\Sigma$.

(ii) $\operatorname{Ker}[\rho_2^+ : S^2H^0(L') \oplus S^2H^0(L'') \to H^0(2K_B + 2\delta)]$, qui est de dimension 3.

En particulier, l'intersection schématique $QX$ des quadriques contenant $X$ ne peut être égale à $X$ puisque sa restriction à $\mathbf{P}''$ est définie par au plus trois équations de degré deux, tandis que $X \cap \mathbf{P}'' = \Delta''$ est composé de six points (réduits). De façon précise, on a :

THÉORÈME 2.4. *Soient $B$ une courbe lisse de genre 2 et $X \subset \mathbf{P}^6$ la courbe semi-canonique de genre 8 construite ci-dessus avec* $\deg \delta' = 2$, $\delta' \neq g_2^1$, $\deg \delta'' = 3$ *et* $H^0(\delta'' - \delta') = 0$.

*Alors l'intersection schématique $QX$ des quadriques contenant $X$ est réunion de $X$ et de deux points situés hors de $X$.*

■ On commence par étudier l'intersection $QX^-$ des quadriques correspondant au noyau de $\rho_2^-$.

Soient $p'$ un point de $\mathbf{P}'$ et $(x_0', x_1', x_2')$ des coordonnées sur $\mathbf{P}'$ (c'est-à-dire une base de $H^0(L')$) telles que $p'$ soit le point (0, 0, 1). Tout élément de Ker $\rho_2^-$ s'écrit :

$$Q = x_0' l_0'' + x_1' l_1'' + x_2' l_2'',$$

où $l_0''$, $l_1''$, $l_2''$ sont des formes linéaires sur $\mathbf{P}''$. Considérons l'espace vectoriel engendré par les $l_2''$ lorsque $Q$ décrit Ker $\rho_2^-$. S'il est de dimension $\leq 3$, un des éléments de Ker $\rho_2^-$ s'écrit $x_0'' l_0'' + x_1' l_1''$, ce qui n'est possible, lorsque $H^0(\delta'' - \delta') = 0$, que si $\operatorname{div}(x_0')$ et $\operatorname{div}(x_1')$ ont un point commun (qui est alors $p'$). On a donc montré (lorsque $H^0(\delta'' - \delta') = 0$) :

* Si $p' \notin B'$, $\dim\{l_2''\} = 4$ et l'intersection de $QX^-$ avec l'espace projectif engendré par $p'$ et $\mathbf{P}''$ est réunion de $\{p'\}$ et de $\mathbf{P}''$.

* Si $p' \in B'$, $\dim\{l_2''\} = 3$ et cette même intersection est réunion de $\mathbf{P}''$ et d'une droite passant par $p'$.

Il s'ensuit que l'intersection $QX^-$ est ensemblistement $\mathbf{P}' \cup \mathbf{P}'' \cup \Sigma$ et qu'elle est réduite sur $\mathbf{P}' - B'$.

Soit $p'$ un point lisse de $B'$, $p''$ le point correspondant de $B''$, de sorte que la droite $\langle p'p'' \rangle$ est contenue dans $\Sigma$.

Une des quadriques de Ker $\rho_2^-$ s'écrit alors :

$$Q = x_0' l_0'' + x_1' l_1'' \quad \text{avec} \quad x_0'(p') = x_1'(p') = 0,$$

et il est facile de voir que l'espace tangent de Zariski à $QX^-$ est de dimension 2 en un point quelconque de $\langle p'p'' \rangle$ (autre que $p'$ et $p''$) si et seulement si on n'a pas $l_0''(p'') = l_1''(p'') = 0$.

Si ça n'était pas le cas, on pourrait écrire :

$$\operatorname{div} x_0' = p + D_0$$

$$\operatorname{div} x_1' = p + D_1$$

où

$$\phi_{L'}(p) = p'.$$

Comme $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ (puisque $p'$ est lisse sur $B'$), on aurait alors $D_1 \leq \operatorname{div} l_0''$. Comme $l_0''$ est nulle en $p$, on aurait aussi $\operatorname{div} x_0' \leq \operatorname{div} l_0''$, ce qui est absurde puisque $H^0(\delta'' - \delta') = 0$ et $l_0'' \neq 0$.

On a donc montré que $QX^-$ est génériquement réduit sur $\Sigma$, donc réduit sur $\Sigma - \mathbf{P}''$ puisqu'il y est de Cohen-Macaulay. On montre par les mêmes méthodes que $QX^-$ est réduit le long de $\mathbf{P}''$.

Une base de Ker $\rho_2^+$ est du type $\{(0, Q_0''), (Q_1', Q_1''), (Q_2', Q_2'')\}$. L'intersection de $QX^-$ avec la première de ces quadriques est réunion des surfaces $\mathbf{P}'$, $Q_0''$ et $\Sigma$ (de degrés respectifs 1, 2 et 9). L'intersection de $\Sigma$ avec la seconde est une courbe de degré 18. On rappelle que sur la surface $S$ (désingularisation de $\Sigma$), on a :

$$C \equiv 2H - p^*2K_B.$$

Cette courbe de degré 18 est donc réunion de $X$ (de degré 14) et des quatre droites :

$$\langle p_1', p_1'' \rangle, \ \langle \iota p_1', \iota p_1'' \rangle, \ \langle q_1', q_1'' \rangle, \ \langle \iota q_1', \iota q_1'' \rangle$$

où

$$Q_1'' \cdot B'' = \Delta'' + p_1'' + \iota p_1'' + q_1'' + \iota q_1''$$

$\iota$ est l'involution de $B$ associée au $g_2^1$.

Cela provient aussi du fait qu'on a les égalités :

$$i = 1, 2 \qquad \underline{Q}_i' = u_i v_i s_{\Delta'} \in H^0(L'^2) \qquad \operatorname{div} u_i = p_i + \iota p_i$$

$$\underline{Q}_i'' = -u_i v_i s_{\Delta''} \in H^0(L''^2) \qquad \operatorname{div} v_i = q_i + \iota q_i.$$

Les faits suivants permettent alors de conclure :

(i) Le pinceau $\{u_1 v_1, u_2 v_2\}$ est sans point base, puisque l'intersection des deux coniques $Q_1'$ et $Q_2'$ est exactement les quatre points de $\phi_{L'}(\Delta')$.

(ii) L'intersection $QX$ est, schématiquement, la réunion de $X$ et de $Q_0'' \cdot Q_1'' \cdot Q_2'' \subset \mathbf{P}''$. En effet, dans $\mathbf{P}'$ c'est $Q_1' \cdot Q_2' = \phi_{L'}(\Delta')$ et c'est $X$ dans $\Sigma$ (utiliser i)).

(iii) L'intersection $Q_0'' \cdot Q_1'' \cdot Q_2''$ est de dimension 0 et consiste en la réunion de $\Delta''$ et de deux points hors de $B''$. Supposons en effet que cette intersection ait une composante de dimension 1. Par i), on a alors $F \cdot B'' = \Delta''$ et on peut supposer $p_1''$, $\iota p_1''$, $q_1''$, $\iota q_1'' \notin F$. Comme $\Delta''$ n'est pas contenu dans un plan, on a deg $F \geq 3$. L'intersection $Q_0'' \cdot Q_1''$ est une courbe de degré 4 contenant $p_1''$, $\iota p_1''$, $q_1''$, $\iota q_1''$ et $F$. On en déduit que $p_1''$, $\iota p_1''$, $q_1''$ et $\iota q_1''$ sont alignés donc que $2 \leq h^0(L''(-2g_2^1)) = h^0(\delta'' - g_2^1)$, ce qui est impossible. L'intersection $Q_0'' \cdot Q_1'' \cdot Q_2''$ est donc composée de 8 points dont ceux de $\Delta''$. Les deux autres ne sont pas sur $B''$ par i).

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

## REFERENCES


[An-M] A. Andreotti and A. Mayer, On period relations for abelian integrals on algebraic curves, *Ann. Sc. Norm. Pisa* **21** (1967), 189-238.

[A-C-G-H 1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves*, I. Springer Verlag, New York.

[A-C-G-H 2] ———, ———, ———, and ———, *Geometry of Algebraic Curves*, II. A paraître.

[Be 1] A. Beauville, Sous-variétés spéciales des variétés de Prym, *Comp. Math.* **45** (1982), 357-383.

[Be 2] ———, Prym varieties and the Schottky problem, *Invent. Math.* **41** (1977), 149-196.

[De 1] O. Debarre, Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3, *Duke Math. J.*, **56** (1988), 221-273.

[De 2] ———, Variétés de Prym et ensembles d'Andreotti et Mayer. A paraître.

[Do] R. Donagi, The tetragonal construction, *Bull. Amer. Math. Soc.* **4** (1981), 181-185.

[Fr-S] R. Friedman and R. Smith, The generic Torelli theorem for the Prym map, *Invent. Math.* **67** (1982), 473-490.

[Gr 1] M. Green, Quadrics of rank four in the ideal of a canonical curve, *Invent. Math.* **75** (1984), 85-104.

[Gr 2] ———, Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, *J. Diff. Geom.* **19** (1984), 125-171.

[Gr-L] ——— and R. Lazarsfeld, On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve, *Invent. Math.* **83** (1986), 73-90.

[Ka] V. I. Kanev, The global Torelli theorem for Prym varieties at a generic point, *Math. USSR Izvestija* **20** (1983), 235-258.

[Ke] C. Keem, A remark on the variety of special linear systems on an algebraic curve. Ph.D. Thesis, Brown University, (1983).

[Mu 1] D. Mumford, On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety, *Springer Lecture Notes 997*, Springer Verlag, New York (1983), 348-375.

[Mu 2] ———, *Varieties defined by quadratic equations*, C.I.M.E., Varenna, 1969.

[We 1] G. Welters, Recovering the curve data from a general Prym variety, *Amer. J. of Math.* **109** (1987), 165–182.

[We 2] ———, A theorem of Gieseker-Petri type for Prym varieties, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **18** (1985), 671–683.