Chapitre 4

Théorie des représentations des groupes finis

Dans ce chapitre G est un groupe fini. *On considère des espaces vectoriels uniquement sur* $\mathbb{C}$, la théorie qu'on expose reste valable avec les mêmes preuves sur n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Pour V et V' deux espaces vectoriels complexes on note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ l'espace des applications linéaires V dans V', et on pose $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$.

4.1 Représentations et morphismes entre représentations

La définition la plus importante :

Définition 4.1.1. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes. On dit que la paire (π, V) est une représentation de G (sur V). On appelle* $\dim(V)$ *la dimension de (π, V).*

Remarque 4.1.1. *On notera souvent simplement V ou π la représentation (π, V). Si π est une représentation G alors V_π désigne son espace vectoriel sous-jacent. On pose alors* $\dim(\pi) := \dim(V_\pi)$.

Remarque 4.1.2. *Une représentation (π, V) de G n'est rien d'autre que la donnée d'une action de G sur V qui est linéaire : c'est une action de groupe car $\pi(gh)v = \pi(g)(\pi(h)v)$ et $\pi(1_G)v = v$ pour $g,\ h \in G$ et $v \in V$, et dire qu'elle est linéaire signifie que $\pi(g)$ est un endomorphisme de V pour tout $g \in G$.*

Notation 4.1.1. *Soit X un ensemble fini, On note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{C}$.*

L'espace $\mathbb{C}[X]$ admet pour base canonique celle des fonctions de Dirac $(\delta_x)_x \in X$, où

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 \; if \; y = x \\ 0 \; if \; y \neq x \end{cases}$$

En particulier $\mathbb{C}[X]$ a pour dimension $|X|$.

Exemple 4.1.1. — *Soit $V = \mathbb{C}^n$ dont on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique et $G = S_n$. À $\sigma \in S_n$ on associe $\pi_n(\sigma) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ défini par $\pi_n(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors l'application $\pi_n : S_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ est telle que $(\pi_n, \mathbb{C}^n)$ est une représentation de G.*

— *Soit $V = \mathbb{C}[I_n]$ avec $I_n = \{1, \dots, n\}$. Alors S_n agit sur I_n par $\sigma.i = \sigma(i)$. Pour $f \in \mathbb{C}[I_n]$ et $\sigma \in S_n$, on pose $\lambda(\sigma)f = f(\sigma^{-1}\ .\ )$ la translatée de f à gauche par σ^{-1}. Alors $\lambda(\sigma)$ est une bijection linéaire de $\mathbb{C}[I_n]$ d'inverse $\lambda(\sigma^{-1})$, et $\lambda : S_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}[I_n])$ est morphisme de groupe. En particulier $(\lambda, \mathbb{C}[I_n])$ est une représentation de S_n.*

La seconde définition centrale de ce chapitre est celle de morphisme entre représentations.

Définition 4.1.2. *Soient (π, V) et (π', V') deux représentations de G, alors une application $u : V \mapsto V'$ est appelée morphisme ou opérateur d'entrelacement si u est $\mathbb{C}$-linéaire et si pour tout $g \in G$:*

$$u \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ u.$$

On note

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') \text{ ou } \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi')$$

l'espace vectoriel (de dimension finie) des opérateurs d'entrelacement entre V et V', on utilisera de plus les notations

$$\mathrm{End}_G(V) = \mathrm{Hom}_G(V, V),\ \mathrm{End}_G(\pi) = \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi).$$

Remarque 4.1.3. *L'espace $\mathrm{End}_G(V)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des éléments de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ qui commutent aux transformations $\pi(g)$ pour $g \in G$. C'est une $\mathbb{C}$-algèbre dont la multiplication est donnée par $\circ$.*

On a de manière évidente :

Lemme 4.1.1. *Soient V, V' et V'' des représentations de G, alors si $u \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$ et $u' \in \mathrm{Hom}_G(V', V'')$:*

$$u' \circ u \in \mathrm{Hom}_G(V, V'').$$

Clairement quand u ci-dessus est bijective alors u^{-1} est aussi un opérateur d'entrelacement de π' vers π. On dit que deux représentations π et π' de G sont *isomorphes* quand il existe un opérateur d'entrelacement bijectif entre elles (on dira un *isomorphisme de représentations*). On écrit dans ce cas

$$(\pi, V) \simeq (\pi', V')$$

or simply

$$\pi \simeq \pi' \text{ ou } V \simeq V'.$$

Quand $V \simeq V'$ on note

$$\mathrm{Iso}_G(V, V')$$

l'ensemble des isomorphismes de V vers V', ainsi $\mathrm{Iso}_G(V, V') \subset \mathrm{Hom}_G(V, V')$. On a souvent tendance à considérer que deux représentations isomorphes sont les mêmes.

Notation 4.1.2. *On note $\mathrm{Rep}(G)$ la collection de toutes les représentations de G.*

Exemple 4.1.2. *Les représentations $(\pi_n, \mathbb{C}^n)$ et $(\lambda, \mathbb{C}[I_n])$ de S_n dans l'exemple 4.1.1 sont isomorphes. En effet l'application $u : f \mapsto \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}[I_n]$ vers $\mathbb{C}^n$ fournit l'isomorphisme.*

Une généralisation naturelle et importante de la représentation de "permutation" $(\lambda, \mathbb{C}[I_n])$ de S_n est la suivante :

Exemple 4.1.3. *Soit X un enesmble fini muni d'une action* $\left\{ \begin{array}{l} G \times X \to X \\ (g,x) \mapsto g.x \end{array} \right.$ *de G. On définit la représentation de permutation*

$$(\lambda_X, \mathbb{C}[X])$$

de G associée à cette action par

$$\lambda_X(g)f = f(g^{-1}\ .\ ).$$

Le procédé de moyennisation suivant permet de produire des éléments de $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ à partir de simples applications linéaires dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$.

Lemme 4.1.2. *Soient (π, V) et (π', V') deux représentations de G et soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$. Alors l'application*

$$u^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi'(g) \circ u \circ \pi(g)^{-1}$$

appartient à $\mathrm{Hom}_G(V, V')$.

Démonstration. Soit $h \in G$, alors

$$u^G \circ \pi(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi'(g) \circ u \circ \pi(g)^{-1} \circ \pi(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi'(g) \circ u \circ \pi(h^{-1}g)^{-1}.$$

Par changement de variable cette somme devient

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi'(hg) \circ u \circ \pi(g)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi'(h) \circ \pi(g) \circ u \circ \pi(g)^{-1} = \pi'(h) \circ u^G$$

□

Remarque 4.1.4. *On remarque que $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ appartient à $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ si et seulement si $u = u^G$. Une direction découle du lemme 4.1.2 alors que si $u \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$, alors $\pi'(g) \circ u \circ \pi(g)^{-1} = u$ pour tout $g \in G$ et donc $u^G = u$. En particulier l'application $u \mapsto u^G$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ vers $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ est surjective puisque sa restriction à $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ est l'indentité. Autrement dit l'endomorphisme*

$$p^G : u \mapsto u^G$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ est un projecteur d'image $\mathrm{Hom}_G(V, V')$.

4.2 Sous-représentations, représentations irréductibles et semi-simplicité

4.2.1 Définitions

Définition 4.2.1. *Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$ et W un sous-espace G-stable de V, i.e. un sous-espace stabilisé par toutes les transformations $\pi(g)$ quand g varie dans G. Alors pour tous $g \in G$, la restriction $\pi(g)_{|W}$ appartient à $\mathrm{GL}(W)$ et définit une représentation $(\pi_{|W}, W)$ donnée par*

$$\pi_{|W} : g \in G \mapsto \pi(g)_{|W} \in \mathrm{GL}(W).$$

On dit que $(\pi_{|W}, W)$ est une sous-représentation de (π, V).

Remarque 4.2.1. *Si $u \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$ alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont G-stables, et sont donc des sous-représentations de V et V' respectivement. Plus généralement pour $P \in \mathbb{C}[T]$, les espaces $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont des sous-représentations de V et V' respectivement.*

On arrive naturellement à la notion suivante.

Définition 4.2.2. *Soit* $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$ *avec* $V \neq \{0\}$*. On dit que* V *est irréductible si ses seuls sous-représentations sont* $\{0\}$ *et* V*.*

Remarque 4.2.2. *L'obesrvation suivant est parfois utile : une représentation* V *est irréductible si elle est non nulle, et si pour tout* $v \neq 0 \in V$ *l'espace* $\langle \pi(g)v,\ g \in G \rangle$ *est égal à* V*.*

Notation 4.2.1. *On note* $\mathrm{Irr}(G)$ *l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de* G*. Par abus de notation on écrira parfois* $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ *pour signifier que* $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$ *est irréductible (i.e.* π *désigne alors une représentation et non une classe d'isomorphisme).*

Exemple 4.2.1. *Si* (π, V) *est une représentation unidimensionnelle de* V *alors elle est irréductible.*

Soit χ un morphisme de G vers $(\mathbb{C}^\times, \times)$, i.e. élément de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$. On utilisera régulièrement la notation

$$\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times).$$

On dit alors que χ est un *caractère* de G. *L'ensemble* $\widehat{G}$ *des caractères de* G *est un groupe pour la multiplication point par point des fonctions :*

$$(\chi_1\chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g).$$

On remarque que $\mathbb{C}^\times \simeq \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$, donc $(\chi, \mathbb{C})$ est une représentation de dimension 1 de G ($\chi(g)(z) = \chi(g).z$ par définition).

Exercice 4.2.1. *Montrer que si* $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$ *est de dimension* 1*, elle est isomorphe à* $(\chi, \mathbb{C})$ *pour un unique caractère* χ *de* G*.*

Exercice 4.2.2. *Soit* $n \geq 2$*. Pour* $k \in \mathbb{Z}$ *on définit* $\phi_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ *par*

$$\phi_k(\bar{l}) = e^{\frac{2i\pi kl}{n}}.$$

1) Montrer que ϕ_k *est bien définie et que* $\phi_k \in \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$*.*
2) Vérifier ensuite que ϕ_k *ne dépend que de* $\overline{k}$*.*
On pose $\phi_{\overline{k}} = \phi_k$*.*
3) Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \\ & \overline{k} & \mapsto & \phi_{\overline{k}} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

La représentation la plus simple de G est la suivante.

Définition 4.2.3. *Soit* $\mathbf{1} : G \to \mathbb{C}^\times$ *le caractère trivial (parfois noté* $\mathbf{1}_G$*), on appelle* $(\mathbf{1}, \mathbb{C})$ *la représentation triviale de* G *(a.k.a. "la triviale").*

Définition 4.2.4. *Soit* μ *un caractère de* G *et* $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$*, on note* $\mu.\pi$ *ou encore* $\mu \otimes \pi$ *la représentation de* G *sur* V *définie par* $(\mu \otimes \pi)(g)v = \mu(g)\pi(g)v$ *pour* $g \in G$ *et* $v \in V$*.*

4.2.2 Semi-simplicité

Un cas important du lemme 4.1.2 est lorsque l'application u du lemme est un projecteur sur un sous-espace G-stable. On rappelle qu'un projecteur p dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ est un élément qui vérifie $p \circ p = p$: de manière équivalente p agit comme l'identité sur son image $\mathrm{Im}(p)$. Alors $V = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et $p(i+k) = i$ pour $i \in \mathrm{Im}(p)$ et $k \in \mathrm{Ker}(p)$, et dans une base B adaptée à cette décomposition en somme directe on a

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \mathrm{diag}(I_r, 0_{n-r}) = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où $n = \dim(V)$ et $r = \mathrm{rg}(p)$.

Proposition 4.2.1. *Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$ et $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ un projecteur sur $W = \mathrm{Im}(p)$ qu'on suppose G-stable. Alors $p^G \in \mathrm{End}_G(V)$ est à nouveau un projecteur et $\mathrm{Im}(p^G) = \mathrm{Im}(p)$.*

Démonstration. On a $p^G \in \mathrm{End}_G(V)$ d'après le lemme 4.1.2. Soit $v \in V$, alors pour tout $g \in G$, on a $p(\pi(g)^{-1}v) \in \mathrm{Im}(p) = W$, et donc $\pi(g)p(\pi(g)^{-1}v) \in W$ car W est G-stable. Ceci implique $\mathrm{Im}(p^G) \subset W$. De plus pour $w \in W$ on a $\pi(g)^{-1}w \in W$, et donc $p(\pi(g)^{-1}w) = \pi(g)^{-1}w$ car p est un projecteur. Ainsi $\pi(g)p(\pi(g)^{-1}w) = w$, ce dont il découle d'une part que $\mathrm{Im}(p^G) = W = \mathrm{Im}(p)$, et d'autre part que p^G agit comme l'indentité sur $W = \mathrm{Im}(p^G)$, de sorte que p^G est en effet un projecteur. □

Ceci implique que les représentations de G sont "semi-simples", i.e. des sommes directes de représentations irréductibles. Ce résultat porte le nom de "théorème de Mashcke".

Corollaire 4.2.1 (Théorème de Mashcke)**.** *Soit (π, V) une représentation de G, et W une sous-représentation de V. Alors il existe une autre sous-représentation W' de V telle que $V = W \oplus W'$.*

Démonstration. Soit $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ un projecteur d'image W (par rapport à un supplémentaire quelconque), alors p^G est à nouveau un projecteur d'image W, et il suffit de poser $W' = \mathrm{Ker}(p^G)$. □

Par récurrence immédiate on a.

Corollaire 4.2.2. *Soit V une représentation de G, alors il existe $V_1, \ldots, V_r$ des soues-représentations irréductibles de V telles que*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

La notation suivante s'avère pratique.

Notation 4.2.2. *Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$. Alors comme espaces vectoriels on a $V^m \simeq V \oplus \cdots \oplus V$ (où on idéntifie chaque copie de V à un sous-espace de V par $v \mapsto (0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0)$). L'action de G sur V^m donnée par $g.(v_1, \ldots, v_r) = (\pi(g)v_1, \ldots, \pi(g)v_r)$ (où $g.(v_1 + \cdots + v_r) = \pi(g)v_1 + \cdots + \pi(g)v_r$ si on considère V^m comme une somme directe) définit une représentation de G sur V^m (ou $\oplus_{i=1}^m V$). On note $(m\pi, mV)$ cette représentation de G.*

Dans le corollaire 4.2.2 on peut alors regrouper les V_i selon leur classe d'isomorphisme pour en obtenir la forme suivante.

Corollaire 4.2.3. *Soit V une représentation de G, talors il existe des représentations irréductibles non isomorphes $V_1, \ldots, V_s$ de G, et $m_1, \ldots, m_s$ des entiers > 0 tels que*

$$V \simeq m_1 V_1 \oplus \cdots \oplus m_s V_s.$$

4.3 Lemme de Schur et quelques conséquences

4.3.1 Lemme de Schur

Les propriétés élémentaires suivantes des opérateurs d'entrelacement sont fondamentales en téhorie des représentations, leur ensemble forme le lemme de Schur dont les conséquences sont nombreuses et importantes.

Proposition 4.3.1 (Lemme de Schur)**.** *Soient (π, V) et (π, V') deux représentations irreductibles de G.*
1) Si $V \not\simeq V'$ alors $\mathrm{Hom}_G(V, V') = \{0\}$.
2) Si $V \simeq V'$, soit $u \in \mathrm{Iso}_G(V, V')$, alors

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') = \mathbb{C}.u$$

la droite engendrée par u, en particulier

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') - \{0\} = \mathbb{C}^*.u = \mathrm{Iso}_G(V, V').$$

Quand $V' = V$ on a donc

$$\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C}.\mathrm{Id}_V$$

et

$$\mathrm{Aut}_G(V) := \mathrm{Iso}_G(V, V) = \mathbb{C}^*.\mathrm{Id}.$$

Démonstration. Dans le cas 1), soit $u \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$. Alors $\mathrm{Im}(u)$ est une sous-représentation de V' c'est donc $\{0\}$ ou V'. De même pour son noyau $\mathrm{Ker}(u)$. La seule possiblité pour que u soit non nul serait donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(u) = V'$, ce qui contredirait $V \not\simeq V'$.
Dans le cas 2) clairement $\mathbb{C}.u \subset \mathrm{Hom}_G(V, V')$. Réciproquement si $u' \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$ et $u' = 0$ alors $u' \in \mathbb{C}.u$ donc on suppose $u' \neq 0$. On veut montrer que u' est un multiple non nul de u. Les argments de 1) montrent que $u' \in \mathrm{Iso}_G(V, V')$, et donc $\alpha = u^{-1} \circ u' \in \mathrm{Iso}_G(V, V)$. Soit λ une valeur propre de α, elle est non nulle donc $\mathrm{Ker}(\alpha - \lambda\mathrm{Id}_V) \neq \{0\}$. Comme $\alpha \in \mathrm{End}_G(V)$ on en déduit que $\mathrm{Ker}(\alpha - \lambda\mathrm{Id}_V)$ est G-stable, et donc que $\mathrm{Ker}(\alpha - \lambda\mathrm{Id}_V) = V$ par irréductibilité de V. Ainsi $\alpha = \lambda\mathrm{Id}_V$ et donc $u' = \lambda u$. □

4.3.2 Groupes abéliens

Un corollaire important du lemme de Schur est l'existence d'un caractère central pour les représentations irréductibles. On note Z le centre de G.

Corollaire 4.3.1. *Soit (π, V) une représentation irréductible de G, il existe*

$$c_\pi \in \widehat{Z}$$

tel que

$$\pi(z) = c_\pi(z).\mathrm{Id}_V$$

pour $z \in Z$. On appelle c_π le caractère central de π. Il dépend seulement de la classe d'isomorphisme de π.

Démonstration. Pour $z \in Z$ on $\pi(z) \in \mathrm{End}_G(V)$ car z est central. D'après le lemme de Schur il existe $\lambda_z \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\pi(z) = \lambda_z\mathrm{Id}_V$. On vérifie que $c_\pi : z \mapsto \lambda_z$ est bien un caractère. Enfin si $(\pi', V') \overset{u}{\simeq} (\pi, V)$ alors pour $z \in Z$ et $v' \in V'$ on a

$$c_\pi(z)u(v') = \pi(z)u(v') = u(\pi'(z)v') = u(c_{\pi'}(z)v') = c_{\pi'}(z)u(v')$$

ce qui implique $c_{\pi'} = c_\pi$ en prenant $v' \neq 0$. □

Un autre corollaire immédiat du lemme de Schur est le suivant.

Corollaire 4.3.2. *Soit A un groupe abélien fini, alors* $\mathrm{Irr}(A) = \widehat{A}$.

Démonstration. On a déjà vu $\mathrm{Irr}(G) \supset \widehat{G}$ pour n'importe quel groupe fini G. Si $G = A$ est abélien, et que (π, V) est une représentation irréductible de A, alors comme $A = Z(A)$ on a $\pi(a) = c_{\pi(a)}.\mathrm{Id}_V$ d'après le corollaire 4.3.1 et donc tout sous-espace de V est A-stable. Pour que V soit irréductible il faut donc qu'elle soit de dimension 1. □

Exercice 4.3.1. *Déterminer* $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *pour* $n \geq 2$.

4.3.3 Composantes isotypiques

On peut étendre l'énoncé du cas 1) du lemme de Schur comme suit :

Corollaire 4.3.3. *Soit $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ et $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{r'}$ dans* $\mathrm{Rep}(G)$ *decomposées en somme directe de représentations irréductibles, et supposons que $V_k \not\simeq W_l$ pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$ et $l \in \{1, \ldots, r'\}$. Alors* $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{0\}$.

Démonstration. Soit i_l l'inclusion naturelle de V_l dans V en tant que l-ième composante, et p_k la projection de W de W_k définie par $p_k(w_1 + \cdots + w_{r'}) = w_k$. En particulier $i_l \in \mathrm{Hom}_G(V_l, V)$ et $p_k \in \mathrm{Hom}_G(W, W_k)$. Soit $u \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ et posons $u_{k,l} = p_k \circ u \circ i_l \in \mathrm{Hom}_G(V_l, W_k)$. Comme $V_k \not\simeq W_l$ on a $\mathrm{Hom}_G(V_l, W_k) = \{0\}$ d'après laproposition 4.3.1, ainsi $u_{k,l} = 0$ et u aussi. □

Pour $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$ on peut écrire

$$V = (V_{1,1} \oplus \cdots \oplus V_{1,a_1}) \oplus \cdots \oplus (V_{m,1} \oplus \cdots \oplus V_{m,a_m}),$$

où chaque V_{i,k_i} est irréductible,

$$V_{i,1} \simeq \cdots \simeq V_{1,a_i}$$

et

$$V_{i,1} \not\simeq V_{j,1}$$

quand $i \neq j$. Soit

$$V = (W_{1,1} \oplus \cdots \oplus W_{1,b_1}) \oplus \cdots \oplus (W_{n,1} \oplus \cdots \oplus W_{n,b_n})$$

une seconde décomposition du même type. Alors le corollaire 4.3.3 implique que $n = m$ et que $V_{i,1} \simeq W_{i,1}$ pour tout $i = 1, \ldots, m$ quitte à réordonner. De plus si on pose

$$V_i = V_{i,1} \oplus \cdots \oplus V_{1,a_i} \simeq a_i V_{i,1}$$

et

$$W_i = W_{i,1} \oplus \cdots \oplus W_{1,b_i} \simeq b_i W_{i,1},$$

le même corollaire implique que $\mathrm{Hom}_G(V_i, V) = \mathrm{Hom}_G(V_i, W_i)$, en particulier $V_i \subset W_i$ (considérer l'injection V_i dans V), et de manière symétrique $W_i \subset V_i$, d'où $V_i = W_i$. On appelle V_i la *composante isotypique de (type) $V_{i,1}$ dans V*.

Identifions la composante isotypique de la représentation triviale :

Proposition 4.3.2. *Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$. Alors la composante isotypique de V de type $(\mathbf{1}_G, \mathbb{C})$ n'est rien d'autre que le sous-espace V^G des vecteurs $v \in V$ tels que $\pi(g)v = v$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. Toute sous-représentation de V^G est forcément une droite isomorphe à la représentation triviale (car elle est fixée par G), donc V^G est un sous-espace de la composante isotypique de V de type $\mathbf{1}_G$. De plus, d'après le corollaire 4.2.2 (Maschke's Theorem), on peut écrire $V = V^G \oplus V'$ pour V' une sous-représentation qui vérifie forcément $V'^G = \{0\}$. Ainsi si on décompose $V' \simeq V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ en composantes isotypiques, aucune V_i n'est de type $\mathbf{1}_G$ et donc $V = V^G \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ est bien la décomposition de V en composante isotypiques, et donc V^G est la composante isotypique de type $\mathbf{1}_G$. $\square$

4.3.4 Algèbre d'endomorphismes d'une représentation

On utilisera de manière répétée le lemme évident suivant.

Lemme 4.3.1. *Soit V un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, et $V_1, \ldots, V_r$ des sous-espaces vectoriels de V tels que*

$$V = \oplus_{i=1}^r V_i,$$

et notons $p_k : V \to V_k \subset V$ la projection sur V_k parallèlement à $\oplus_{i \neq k} V_j$, et i_l l'injection de V_l dans V, alors $p_k \circ i_l = 0$ si $l \neq k$ et $p_k \circ i_k = \mathrm{Id}_{V_k}$, et

$$\mathrm{Id}_V = \sum_{k=1}^n i_k \circ p_k.$$

On a alors le premier résultat décrivant les algèbres d'endomorphismes "simples".

Proposition 4.3.3. *Soit V une représentation irréductible de G, et $W \simeq mV$, alors*

$$\mathrm{End}_G(W) \simeq \mathcal{M}_m(\mathbb{C}).$$

Démonstration. Si $W \overset{\phi}{\simeq} mV$ alors l'application $u \mapsto \phi \circ u \circ \phi^{-1}$ est un isomorphisme d'algèbre entre $\mathrm{End}_G(W)$ et $\mathrm{End}_G(mV)$ on peut donc supposer que $W = mV$. On écrit donc $W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ avec $V_i = V$ et pour $u \in \mathrm{End}_G(W)$ on pose $u_{k,l} = p_k \circ u \circ i_l \in \mathrm{End}_G(V)$. Alors comme V est irréductible on a $u_{k,l} = m_{k,l}(u)\mathrm{Id}_V$ pour $m_{k,l}(u) \in \mathbb{C}$ d'après le lemme de Schur. On pose $M(u) = (m_{k,l}(u))_{k,l=1,\ldots,m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Montrons que $M : u \mapsto M(u)$ est un isomorphisme d'algèbres. Tout d'abord M est clairement linéaire. Posons $T : \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}_G(mV)$ définie par

$$T(M) = \sum_{k,l=1}^m m_{k,l} i_k \circ p_l.$$

On a

$$T(M(u)) = \sum_{k,l=1}^m m_{k,l}(u) i_k \circ p_l = \sum_{k,l=1}^m i_k \circ m_{k,l}(u) p_l = \sum_{k,l=1}^m i_k \circ p_k \circ u \circ i_l \circ p_l$$

$$= (\sum_{k=1}^m i_k \circ p_k) \circ u \circ (\sum_{l=1}^m i_l \circ p_l) = u.$$

Inversement calculons $B = M(T(A))$ pour $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. On pose $v = T(A) \in \mathrm{End}_G(V)$. On a par définition

$$b_{k_0,l_0}\mathrm{Id}_V = p_{k_0} \circ v \circ i_{l_0} = p_{k_0} \circ (\sum_{k,l=1}^m a_{k,l} i_k \circ p_l) \circ i_{l_0} = \sum_{k,l=1}^m a_{k,l}(p_{k_0} \circ i_k) \circ (p_l \circ i_{l_0})$$

$$= a_{k_0,l_0}(p_{k_0} \circ i_{k_0}) \circ (p_{l_0} \circ i_{l_0}) = a_{k_0,l_0}\mathrm{Id}_V \circ \mathrm{Id}_V = a_{k_0,l_0}\mathrm{Id}_V,$$

et donc $B = A$. Ainsi Mest un isomorphisme linéaire d'inverse T. Il reste à voir que M transforme $\circ$ en $\times$. Calculons $M(u \circ v)_{s,t}$. Par définition

$$M(u \circ v)_{s,t}.\mathrm{Id}_V = p_s \circ u \circ v \circ i_t = p_s \circ u \circ (\sum_{k=1}^{m} i_k \circ p_k) \circ v \circ i_t = \sum_{k=1}^{m} (p_s \circ u \circ i_k) \circ (p_k \circ v \circ i_t)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (M(u)_{s,k}\mathrm{Id}_V) \circ (M(v)_{k,t}\mathrm{Id}_V) = (\sum_{k=1}^{m} M(u)_{s,k} M(v)_{k,t})\mathrm{Id}_V$$

d'où $M(u \circ v)_{s,t} = \sum_{k=1}^{m} M(u)_{s,k} M(v)_{k,t}$ et donc $M(u \circ v) = M(u)M(v)$. □

On en déduit le résultat général suivant.

Proposition 4.3.4. *Soit $V \simeq m_1 V_1 \oplus \cdots \oplus m_s V_s$ une représentation de G, avec les V_i irréductibles non isomorphes les unes aux autres. On a alors un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathrm{End}_G(V) \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}).$$

Démonstration. Tout d'abord comme dans la démonstration du lemme 4.3.1 on peut supposer que $V = m_1 V_1 \oplus \cdots \oplus m_s V_s$. Ensuit toujours d'après le lemme 4.3.1 il suffit de montrer que si $W_i := m_i V_i$, alors

$$\mathrm{End}_G(V) \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathrm{End}_G(W_i).$$

On pose alors i_l l'injection de W_l dans V, et p_k la projection de V sur W_k selon $\oplus_{i \neq k} W_i$. Ceci définit une application

$$I : u \mapsto (p_1 \circ u \circ i_1, \ldots, p_s \circ u \circ i_s) \in \prod_{i=1}^{s} \mathrm{End}_G(W_i).$$

Inversement pour $(u_1, \ldots, u_s) \in \prod_{i=1}^{s} \mathrm{End}_G(W_i)$ on pose

$$J(u_1, \ldots, u_s) = \sum_{k=1}^{s} i_k \circ u_k \circ p_k \in \mathrm{End}_G(V).$$

On vérifie par des calculs très similaires à ceux de la démonstration du lemme 4.3.1 que les applications I et J sont inverses l'une de l'autre, et que I est un isomorphisme d'algèbres. □

4.4 L'algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$ et son centre $\mathbb{C}[G]^G$

4.4.1 La structure d'algèbre

On rappelle que $\mathbb{C}[G]$ a pour base les fonctions de Dirac δ_g avec $g \in G$. Cette base ainsi que la structure de groupe sur G munissent naturellement $\mathbb{C}[G]$ d'une structure d'algèbre : on pose d'abord

$$\delta_g * \delta_h = \delta_{gh},$$

et on étend la loi $*$ à $\mathbb{C}[G]$ par bilinéarité, i.e. on pose

$$(\sum_{g \in G} a_g \delta_g) * (\sum_{h \in G} b_h \delta_h) = \sum_{(g,h) \in G^2} a_g b_h \delta_{gh}.$$

Alors $(\mathbb{C}[G], +, *)$ devient une $\mathbb{C}$-algèbre d'unité δ_1, et il est immédiat que $(\mathbb{C}[G], *)$ est commutative si et seulement si G l'est. On remarque au passage que $g \mapsto \delta_g$ fournit un morphisme injectif du groupe G dans le groupe $\mathbb{C}[G]^\times$ des inversibles de $\mathbb{C}[G]$.

La loi $*$ sur $\mathbb{C}[G]$ peut aussi s'exprimer sans référence à une base de $\mathbb{C}[G]$. Pour f_1 et f_2 dans $\mathbb{C}[G]$ on pose

$$f_1 * f_2(g_0) = \sum_{g \in G} f_1(g) f_2(g^{-1} g_0).$$

Ceci munit $\mathbb{C}[G]$ d'une loi associative et $\mathbb{C}$-bilinéaire, et on vérifie que $\delta_x * \delta_y(g_0) = 0$ si $g_0 \neq xy$ et $\delta_x * \delta_y(xy) = 1$, i.e. que $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$.

Exercice 4.4.1. *Pour $x \in G$ et $f \in \mathbb{C}[G]$: $\delta_x * f = f(x^{-1}\ .\ ) = \lambda(x) f$ (où $\lambda(x)$ désigne la translation à gauche par x^{-1}), alors que $f * \delta_x = f(\ .\ x^{-1}) = \rho(x^{-1}) f$, où $\rho(y)$ désigne la translation à droite par y.*

On note $\mathbb{C}[G]^G$ le centre de $\mathbb{C}[G]$, qui est bien sûr une $\mathbb{C}$-algèbre commutative. On rappelle que si x et y sont dans G on dit que y est conjugué à x, ce qu'on note $y \sim x$, si il existe $h \in G$ tel que $y = hxh^{-1}$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur G et on note $\mathcal{C}(x)$ la classe de conjugaison de G. Les classes de conjugaison forment une partition (nécessairement finie) de G. On note $G/\sim$ l'ensemble des classes de conjugaison de G.

Proposition 4.4.1. *Une fonction f appartient à $\mathbb{C}[G]^G$ si et seulement si f est invariante sous conjugaison par les éléments de G, i.e. si elle est constante sur les classes de conjugaison de G. Ainsi une base naturelle de $\mathbb{C}[G]^G$ est donnée par $(\mathbf{1}_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C} \in G/\sim}$.*

Démonstration. La fonction f appartient à $\mathbb{C}[G]^G$ si et seulement si elle commute à la base $(\delta_x)_{x \in G}$, i.e. si et seulement si $(\delta_x)^{-1} * f * \delta_x = f$ pour tout $x \in G$, ce qui d'après l'exercice 4.4.1 équivaut à $f(xgx^{-1}) = f(g)$ pour x et g dans G. $\square$

4.4.2 La structure hilbertienne

Ici on considère un ensemnle X quelconque, et ce qu'on va dire s'applique en particulier à $X = G$. L'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ possède un produit scalaire (hermitien) naturel :

$$\langle f_1,\ f_2 \rangle_X = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f_1(x) \overline{f_2(x)}.$$

Pour ce produit scalaire $(\delta_x)_{x \in X}$ est orthogonale mais pas orthonormale car $\langle \delta_x, \delta_x \rangle_X = \frac{1}{|X|}$. En particulier $(\sqrt{|X|}\delta_x)_{x \in X}$ forme une base orthonormale de $\mathbb{C}[X]$.

Dans le cas où $X = G$, par restriction on obtient un produit scalaire sur le centre $\mathbb{C}[G]^G$, et on vérifie à nouveau que la base naturelle des $(\mathbf{1}_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C} \in G/\sim}$ est orthogonale mais pas orthonormale.

4.5 La théorie du caractère

4.5.1 Définition et propriétés basiques

Définition 4.5.1. *Soit (π, V) une représentation de G, on appelle le caractère de π la fonction cnetrale $\chi_\pi \in \mathbb{C}[G]^G$ définie par*

$$\chi_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)).$$

On le notera aussi χ_V.

On rappelle que la trace d'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ est définie comme suit : si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V de base duale $B^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$, alors $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n e_i^*(u(e_i))$ et cette quantité ne dépend pas de la base choisie.

Exercice 4.5.1. *Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ et $\phi : V \mapsto W$ un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de sorte que $\phi \circ u \circ \phi^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$, alors $\mathrm{Tr}(\phi \circ u \circ \phi^{-1}) = \mathrm{Tr}(u)$.*

On déduit de l'exercice ci-dessus que

$$\pi \simeq \pi' \Rightarrow \chi_\pi = \chi_{\pi'}.$$

Ainsi le caractère d'une représentation ne dépend que de sa classe d'isomorphisme.

On rappelle que si G' un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ de cardinal m, alors $g'^m = \mathrm{Id}$ pour tout $g' \in G'$, et donc que $X^m - 1$ annule g'. Comme $X^m - 1$ est scindé à racines simples $\mathbb{U}_m$ (les racines m-ièmes de l'unité), on en déduit que g' est diagonalisable et $\mathrm{Spec}(g') \subset \mathbb{U}_m$. Ceci s'applique à $G' = \pi(G)$ quand $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$. En particulier $\chi_\pi(g)$ est la somme de $\dim(V)$ éléments de $\mathbb{U}_{|G|}$ (car $m = |G'| = \frac{|G|}{|\mathrm{Ker}(\pi)|}$ donc m divise $|G|$).

Exercice 4.5.2. *Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$. Démontrer la relation*

$$\chi_\pi(1) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V) = \dim(V).$$

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \{g \in G,\ \chi_\pi(g) = \dim(V)\}.$$

Une autre observation évidente mais utile est que si $V, V_1, \ldots, V_s \in \mathrm{Rep}(G)$ avec

$$V \simeq m_1 V_1 \oplus \cdots \oplus m_s V_s,$$

alors

$$\chi_V = m_1 \chi_{V_1} + \cdots + m_s \chi_{V_s}.$$

Exercice 4.5.3. *Soit μ un caractère de G, de sorte que $\mu \in \mathrm{Irr}(G)$. Vérifier que $\chi_\mu = \mu$. Plus généralement montrer que si $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$, alors $\chi_{\mu \otimes \pi} = \mu \chi_\pi$.*

Il y a une projection G-équivariante naturelle de V sur la composante isotypique V^G de la représentation triviale $\mathbf{1} := \mathbf{1}_G$.

Proposition 4.5.1. *Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$, alors l'application $p^G : V \to V$ définie par*

$$p^G(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g) v$$

est un projecteur sur V^G. En particulier

$$\dim(V^G) = \langle \mathbf{1}_G, \chi_V \rangle_G.$$

Démonstration. Il est immédiat de vérifier que p^G vaut l'identité sur V^G, en particulier $V^G \subset \mathrm{Im}(p^G)$. De plus l'inclusion $\mathrm{Im}(p^G) \subset V^G$ découle d'un changement de variable simple. Ainsi $\mathrm{Im}(p^G) = V^G$ et p^G vaut l'identité sur son image c'est un projecteur. La deuxième partie de l'énoncé est obtenue en calculant la trace de p^G, tout en gardant à l'esprit que la trace d'un projecteur est égale à son rang. $\square$

4.5.2 Les représentations de permutation

Soit X un ensmble fini muni d'une G-action. On a défini en exemple 4.1.3 la représentation de permutation $(\lambda_X, \mathbb{C}[X])$. Pour $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}_X(g)$ l'ensemble des éléments de X fixés par g (i.e. les x tels que $g.x = x$). Un calcul complèetemet similaire à celui effectué pour $\mathbb{C}[G]$ donne

$$\lambda_X(g)\delta_x = \delta_{g.x}$$

pour $g \in G$ et $x \in X$. De cela on déduit que

$$\mathrm{Mat}_{(\delta_x)_{x\in X}}(\lambda_X(g))$$

est une matrice de permutation matrix, avec 0, resp. 1, sur la diagonale dans les colonnes correspondant à $\lambda_X(g)(\delta_x)$ et $g.x \neq x$, resp. $g.x = x$. Cela donne :

Proposition 4.5.2. *Pour X un ensemble fini muni d'une G-action, on a*

$$\chi_{\lambda_X}(g) = |\mathrm{Fix}_X(g)|.$$

Notation 4.5.1. *On notera χ_X plutôt que χ_{λ_X}.*

On remarque que G agit sur $X = G$ par translation à gauche $g._l x = gx$, et à droite $g._r x = xg^{-1}$. Ceci donne lieu à deux représentations de permutation de G sur $\mathbb{C}[G]$, la première notée λ_G et la seconde ρ_G. Par définition on a

$$\lambda_G(g)f = f(g^{-1}\ .\ ) = \delta_g * f$$

et

$$\rho_G(g)f = f(\ .\ g) = f * \delta_{g^{-1}}$$

pour $g \in G$.

Notation 4.5.2. *Pour $f \in \mathbb{C}[G]$, on note $f^\vee$ l'application $g \mapsto f(g^{-1})$ dans $\mathbb{C}[G]$.*

On vérifie :

Proposition 4.5.3. *L'application $f \mapsto f^\vee$ est un isomorphisme entre $(\lambda_G, \mathbb{C}[G])$ et $(\rho_G, \mathbb{C}[G])$.*

On appelle $(\lambda_G, \mathbb{C}[G])$ la *représentation régulière de G*. Une conséquence immédiate de la proposition 4.5.2 est la formule :

$$\begin{cases} \chi_G(g) = 0 \text{ if } g \neq 1 \\ \chi_G(1) = |G| \end{cases}$$

4.6 Contragrédiente

Définition 4.6.1. *Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$, on définit $(\pi^\vee, V^*) \in \mathrm{Rep}(G)$ par*

$$\pi^\vee(g)\phi = \phi \circ \pi(g^{-1}) = \phi \circ \pi(g)^{-1}.$$

En d'autres termes

$$\pi^\vee(g) = \pi(g^{-1})^* = (\pi(g)^{-1})^*.$$

On appelle cettte représentation la duale ou contragrédiente de (π, V).

Remarque 4.6.1. *On rappelle que* $(V^*)^*$ *est canoniquement isomorphe en tant que* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel à* V *via l'applicaiton :*

$$\mathrm{Ev} : x \in V \mapsto \mathrm{Ev}_x \in (V^*)^*$$

où

$$\mathrm{Ev}_x(\phi) = \phi(x).$$

On vérifie que Ev *est en fait un isomorphisme entre* (π, V) *et* $((\pi^\vee)^\vee, (V^*)^*)$*.*

Lemme 4.6.1. *Soit* $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$*, alors*

$$\chi_{\pi^\vee} = \chi_\pi^\vee = \overline{\chi_\pi}.$$

Démonstration. Soit $g \in G$, alors il existe une base B de V telle que

$$\mathrm{Mat}_B(\pi(g)) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d),$$

et de plus les λ_i sont des racines $|G|$-èmes de l'unité, en particulier $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$. Mais alors

$$\mathrm{Mat}_{B^*}(\pi^\vee(g)) = \mathrm{Mat}_{B^*}((\pi(g)^{-1})^*) = {}^t\mathrm{Mat}_B(\pi(g))^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_d^{-1}).$$

Il ne reste plus qu'à prendre la trace. □

Exercice 4.6.1. *Soit* $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$*, montrer que* $\pi^\vee \in \mathrm{Irr}(G)$*.*

4.7 Orthonormalité des caractères irréductibles et ses conséquences

4.7.1 Orthonormalité des caractères irréductibles

Soient (π, V) et (π', V') dansRep(G), on définit $(\pi_{V,V'}, \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V, W)) \in \mathrm{Rep}(G)$ par

$$\pi_{V,V'}(g).u = \pi(g) \circ u \circ \pi'(g^{-1}).$$

Le caractère

$$\chi_{V,V'} := \chi_{\pi_{V,V'}}$$

s'exprime simplement en fonction de χ_π et $\chi_{\pi'}$.

Proposition 4.7.1. *On a*

$$\chi_{V,V'} = \chi_{V^*}\chi_{V'} = \overline{\chi_V}\chi_W.$$

Démonstration. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $B' = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de W, on pose

$$e_i^* \otimes f_j : v \mapsto e_i^*(v) f_j \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V, W).$$

On vérifie que $B^* \otimes B' = (e_1^* \otimes f_1, \ldots, e_1^* \otimes f_m, \ldots, e_n^* \otimes f_1, \ldots, e_n^* \otimes f_m)$ est une base de $\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V, W)$ et de plus si on pose $X = \mathrm{Mat}_{B^*}(\pi^*(g))$ et $Y = \mathrm{Mat}_{B'}(\pi'(g))$, alors

$$\mathrm{Mat}_{B^* \otimes B'}(\pi_{V,V'}(g)) = (x_{i,j}Y)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

On en déduit que

$$\chi_{V,V'} = \sum_{i=1}^{n} x_{i,i}\mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(Y) = \chi_{V^*}\chi_W.$$

□

On remarque que pour cette nouvelle représentation, l'espace des opérateurs d'entrelacement de V vers W est l'espace des points fixes sous G, i.e. la composante isotypique de la représentation triviale

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')^G = \mathrm{Hom}_G(V, V').$$

On en déduit que $\dim(\mathrm{Hom}_G(V, V'))$ est a dimension de la composante isotypique de la représentation triviale dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$. Or on sait que cette dernière vaut

$$\langle \mathbf{1}, \chi_{V,V'} \rangle_G = \langle \mathbf{1}, \overline{\chi_V} \chi_{V'} \rangle_G = \langle \chi_V, \chi_{V'} \rangle_G$$

d'après la proposition 4.5.1

I.e. on a obtenu la formule fondamentale suivante :

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(V, V')) = \langle \chi_V, \chi_{V'} \rangle_G. \tag{4.1}$$

On en déduit immédiatement, en vue du lemme de Schur, le théorème suivant :

Théorème 4.7.1. *Soient π une représentation irréductible de G, alors*

$$\langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle_G = 1.$$

Si π' est une autre représentation irréductible de G non isomorphe à π, alors

$$\langle \chi_\pi, \chi_{\pi'} \rangle_G = 0.$$

4.7.2 Caractérisation de la classe d'isomorphisme par le caractère

Une conséquence immédiate du théorème 4.7.1 est que la classe d'isomorphisme d'une représentation irréductible est déterminée par son caractère, et que leur ensemble $\mathrm{Irr}(G)$ de ces classes est fini.

Corollaire 4.7.1. *Soient π et π' deux représentations irréductibles de G, alors*

$$\pi \simeq \pi' \Leftrightarrow \chi_\pi = \chi'_\pi,$$

et $|\mathrm{Irr}(G)| \leq |G/\sim|$.

Démonstration. On a déjà vu l'implication directe. Inversement si $\chi_\pi = \chi'_\pi$, alors $\langle \chi_\pi, \chi_{\pi'} \rangle = 1$ d'après le théorème 4.7.1, et donc $\pi \simeq \pi'$ d'après la deuxième partie de ce même théorème. Enfin la famille $(\chi_\pi)_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)}$ est orthonormée donc libre dans $\dim(\mathbb{C}[G]^G)$, son cardinal et donc fini et majoré par

$$|G/\sim| = \dim(\mathbb{C}[G]^G).$$

□

Pour τ et π dans $\mathrm{Rep}(G)$, on pose

$$m(\tau, \pi) = \dim(\mathrm{Hom}_G(\tau, \pi)) = \langle \chi_\tau, \chi_\pi \rangle_G.$$

Comme $\dim(\mathrm{Hom}_G(\tau, \pi))$ est un nombre réel on a

$$m(\tau, \pi) = \overline{\langle \chi_\tau, \chi_\pi \rangle_G} = \langle \chi_\pi, \chi_\tau \rangle_G = m(\pi, \tau).$$

Lorsque τ est irréductible on appelle cet entier la multiplicité de τ dans π (cf. l'équation 4.1). On note que l'entier $m(\tau, \pi)$ ne dépend que des classes d'isomorphisme de τ et de π.

Corollaire 4.7.2. *Soit* (π, V_π) *une représentation de* G*, alors*

$$V_\pi = \oplus_{\tau\in\mathrm{Irr}(G)} V_{\pi,\tau},$$

où $V_{\pi,\tau}$ *est la composante isotypique de type* τ*, i.e.* $V_{\pi,\tau} \simeq a_{\pi,\tau} V_\tau$*. Avec ces notations on a alors*

$$a_{\pi,\tau} = m(\pi, \tau).$$

Démonstration. En effet $\chi_\pi = \sum_{\tau\in\mathrm{Irr}(G)} a_{\pi,\tau}\chi_\tau$, et l'énoncé découle du théorème 4.7.1. □

Le théorème 4.7.1 permet aussi de caractériser les représentations irréductibles par une condition sur leur caractère.

Corollaire 4.7.3. *Soit* π *une représentation de* G*, alors* π *est irréductible si et seulement si*

$$\langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle_G = 1.$$

Démonstration. Decomposons π en compasantes isotypiques $\pi \simeq \oplus_{\tau\in\mathrm{Irr}(G)} m(\pi, \tau)\tau$. Alors

$$\langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle_G = \sum_{\tau\in\mathrm{Irr}(G)} m(\pi, \tau)^2.$$

De plus $\langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle_G = 1$ si et seuelemnt si $\sum_{\tau\in\mathrm{Irr}(G)} m(\pi, \tau)^2$ i.e. si et seulement si il existe $\tau_0 \in \mathrm{Irr}(G)$ telle que $m(\pi, \tau_0) = 1$ et $m(\pi, \tau) = 0$ si $\tau \neq \tau_0 \in \mathrm{Irr}(G)$. □

Remarque 4.7.1. *Montrons grâce à la théorie du caractère que si* $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$*, alors* $\pi^\vee$ *aussi. En effet*

$$\langle \chi_{\pi^\vee}, \chi_{\pi^\vee} \rangle_G = \langle \overline{\chi_\pi}, \overline{\chi_\pi} \rangle_G = \overline{\langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle_G} = \langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle_G = 1.$$

Finalement on démontre que le caractère caractérise la classe d'isomorphisme de la représentation.

Proposition 4.7.2. *Deux représentations de* G *sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère.*

Démonstration. Soit $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$. On a $\pi \simeq \oplus_{\tau\in\mathrm{Irr}(G)} m(\pi, \tau)\tau$, donc la classe d'isomorphisme de π est déterminée par les multiplicités $m(\pi, \tau)$, mais $m(\pi, \tau) = \langle \chi_\tau, \chi_\pi \rangle_G$ et l'affirmation en découle. □

Remarque 4.7.2. *On retrouve alors facilement que* $(\pi^\vee)^\vee \simeq \pi$ *pour* $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$*. En effet* $\chi_{(\pi^\vee)^\vee} = \overline{\chi_{\pi^\vee}} = \overline{\overline{\chi_\pi}} = \chi_\pi$.

4.7.3 Décomposition de la représentation régulière et conséquences

Appliquons la théorie du caractère afin de comprendre la décomposition de la représentation régulière de G.

Théorème 4.7.2. *La représentation* $(\lambda_G, \mathbb{C}[G])$ *se décompose comme suit*

$$\mathbb{C}[G] \simeq \oplus_{\pi\in\mathrm{Irr}(G)} \dim(\pi)\pi.$$

En particulier $\sum_{\pi\in\mathrm{Irr}(G)} \dim(\pi)^2 = |G|$.

Démonstration. On doit montrer que pour $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ on a $\langle \chi_\pi, \lambda_G \rangle_G = \dim(\pi)$:

$$\langle \chi_\pi, \lambda_G \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\pi(g) \overline{\chi_G(g)} = \frac{1}{|G|} \chi_\pi(1) \overline{\chi_G(1)} = \chi_\pi(1) = \dim(\pi).$$

La suite est obtenue par égalité des dimensions. $\square$

On va matenant démontrer que la famille orthonormée $(\chi_\pi)_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)}$ est génératrice dans $\mathbb{C}[G]^G$, c'est à dire qu'elle en forme une base orthonormée.

Définition 4.7.1. *Pour $f \in \mathbb{C}[G]$ et $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$ on définit*

$$\pi(f) := \sum_{g \in G} f(g)\pi(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V).$$

En particulier

$$\pi(\delta_g) = \pi(g)$$

pour $g \in G$.

Tout d'abord on constate immédiatement que $f \mapsto \pi(f)$ est linéaire de $\mathbb{C}[G]$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

Lemme 4.7.1. *Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G)$, et $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$, on a*

$$\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1) \circ \pi(f_2) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V),$$

i.e. $f \mapsto \pi(f)$ est un morphisme d'algèbres entre $\mathbb{C}[G]$ et $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

Démonstration. Par bilinéarité des quantités $\pi(f_1 * f_2)$ et $\pi(f_1) \circ \pi(f_2)$ en f_1 et f_2, il suffit de vérifier $\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1) \circ \pi(f_2)$ pour f_1 de la forme δ_{g_1} et f_2 de la forme δ_{g_2}, ce qui découle alors de la relation $\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1) \circ \pi(g_2)$. $\square$

On constate ensuite que π envoie fonction centrale sur opérateur d'entrelacement.

Lemme 4.7.2. *Soit $f \in \mathbb{C}[G]^G$ et $(\pi, V) \in Rep(G)$, alors $\pi(f) \in \mathrm{End}_G(V)$.*

Démonstration. En effet pour $g \in G$ on a grâce au lemme 4.7.1

$$\pi(f) \circ \pi(g) = \pi(f) \circ \pi(\delta_g) = \pi(f * \delta_g) = \pi(\delta_g * f) = \pi(\delta_g) \circ \pi(f) = \pi(g) \circ \pi(f).$$

$\square$

Ceci permet d'établir le lemme technique suivant

Lemme 4.7.3. *Si $f \in \mathbb{C}[G]^G$ et $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}(G)$, alors*

$$\pi(f) = \frac{|G|}{\dim(V)} \langle f, \chi_{\pi^\vee} \rangle \mathrm{Id}_V.$$

Démonstration. D'après le lemme 4.7.2 on a $\pi(f) \in \mathrm{End}_G(V)$, ainsi

$$\pi(f) = \lambda \mathrm{Id}_V$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$ d'après le lemme de Schur. La valeur de λ est obtenue en prenant la trace dans l'équation précédente et en utilisant $\overline{\chi_\pi} = \chi_{\pi^\vee}$. $\square$

Théorème 4.7.3. *La famille $(\chi_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(G)}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{C}[G]^G$. En particulier $|\mathrm{Irr}(G)| = |G/\sim|$.*

Démonstration. Il reste à montrer que $(\chi_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(G)}$ engendre linéairement $\mathbb{C}[G]^G$. Cela revient à montrer que si $f \in \mathbb{C}[G]^G$ est orthogonale à $(\chi_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(G)}$ alors $f = 0$. Prenons une telle fonction f. D'après le lemme 4.7.3, on a $\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$. Mais comme toute représentation de G somme directe de représentations irréductibles on a $\pi(f) = 0$ pour toute représentation π de G, en particulier pour $\pi = \lambda_G$. Ansi $\lambda_G(f) = 0$ et donc $\lambda_G(f)(\delta_1) = 0$. Mais

$$\lambda_G(f)(\delta_1) = \sum_{g\in G} f(g)\delta_g = f$$

donc $f = 0$. □

4.8 Table de caractères d'un groupe fini

Soit χ le caractère d'une représentation de G, alors χ est une fonction centrale donc elle constante sur chaque classe de conjugaison. En particulier si $\mathcal{C}$ est une telle classe, la valeur $\chi(\mathcal{C})$ est bien définie. On rappelle par ailleurs qu'il y a autant de classes de conjugaisons dans G que de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles : c'est l'égalité $|G/\sim| = |\mathrm{Irr}(G)|$.

Ces observations permettent de définir ce qu'on appelle la table de caractère de G. On note $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r$ les classes de conjugaisons de G toujours avec la convention que $\mathcal{C}_1 = \{1\}$ est la classe de conjugaison de l'élément neutre de G. On note $\{\pi_1, \dots, \pi_r\}$ un système de représentatants de $\mathrm{Irr}(G)$ toujours avec la convention que $\pi_1 = \mathbf{1}_G$ est la représentation triviale. On pose alors $\chi_i := \chi_{\pi_i}$, de sorte que $(\chi_1, \dots, \chi_r)$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}[G]^G$ formée des caractères (des représentations) irréductibles de G.

Par définition la table de caractère de G (qui dépend de l'ordre mis sur $G/\sim$ et $\mathrm{Irr}(G)$) est le tableau suivant.

G	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\dots$	$\mathcal{C}_r$
χ_1	$\chi_1(\mathcal{C}_1)$	$\chi_1(\mathcal{C}_2)$	$\dots$	$\chi_1(\mathcal{C}_r)$
χ_2	$\chi_2(\mathcal{C}_1)$	$\chi_2(\mathcal{C}_2)$	$\dots$	$\chi_2(\mathcal{C}_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_r	$\chi_r(\mathcal{C}_1)$	$\chi_r(\mathcal{C}_2)$	$\dots$	$\chi_r(\mathcal{C}_r)$

On remarque que comme $\mathcal{C}_1 = \{1\}$ et $\chi_i(1) = \dim(\pi_i)$ la première colonne du tableau est donnée par la dimension des représentations irrédutibles et sa première ligne ne contient que des 1 car $\chi_1 = \mathbf{1}_G$:

G	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\dots$	$\mathcal{C}_r$
χ_1	$1 = \dim(\pi_1)$	1	$\dots$	1
χ_2	$\dim(\pi_2)$	$\chi_2(\mathcal{C}_2)$	$\dots$	$\chi_2(\mathcal{C}_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_r	$\dim(\pi_r)$	$\chi_r(\mathcal{C}_2)$	$\dots$	$\chi_r(\mathcal{C}_r)$

Le résultat suivant nous dit que le carré de la norme de la j-ème colonne du tableau vaut $\frac{|G|}{|\mathcal{C}_j|}$, et que ses colonnes sont orthogonales les unes aux autres.

Proposition 4.8.1. *Pour i, j et $k \neq j$ dans $[1, \ldots, r]$, on a :*

1. $\sum_{i=1}^{r} |\chi_i(\mathcal{C}_j)|^2 = \frac{|G|}{|\mathcal{C}_j|}$.
2. $\sum_{i=1}^{r} \chi_i(\mathcal{C}_j)\overline{\chi_i(\mathcal{C}_k)} = 0$.

Démonstration. On utilise que $(\chi_1, \ldots, \chi_r)$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}[G]^G$. Alors

$$\langle \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j} \rangle_G = \sum_{i=1}^{r} |\langle \chi_i, \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j} \rangle_G|^2,$$

mais

$$\langle \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j} \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j}(g)\overline{\mathbf{1}_{\mathcal{C}_j}(g)} = \frac{|\mathcal{C}_j|}{|G|}$$

et

$$\langle \chi_i, \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j} \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\mathbf{1}_{\mathcal{C}_j}(g)} = \frac{|\mathcal{C}_j|}{|G|}\chi_i(\mathcal{C}_j),$$

et la première égalité en découle. La deuxième découle de la même manière de la relation

$$0 = \langle \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}_k} \rangle_G = \sum_{i=1}^{r} \langle \chi_i, \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j} \rangle_G \overline{\langle \chi_i, \mathbf{1}_{\mathcal{C}_k} \rangle_G}.$$

□

On note que la première relation pour $j = 1$ redonne l'égalité $\sum_{i=1}^{r} |\dim(\pi_i)|^2 = |G|$. On remarque aussi que si

$$\mathcal{C}_j = \mathcal{C}(x_j) = \{g x_j g^{-1},\ g \in G\},$$

et qu'on note

$$C_G(x_j) = \{g \in G, g x_j g^{-1} = x_j\}$$

le centralisateur de x_j dans G (c'est à dire son stabilisateur pour l'action par conjugaison), alors

$$\frac{|G|}{|\mathcal{C}_j|} = |C_G(x_j)|.$$

Enfin à titre informatif, on indique pour tout i on a $\dim(\pi_i) \mid |G|$. C'est un résultat que nous ne démontrerons pas, mais qui peut aider à compléter la première colonne du tableau.

Terminons par la table de caractère du groupe symétrique S_3 dont on connaî déjà deux représentations irréductibles et non isomorphes de dimension 1, le caractère trivial et le caractère signature :

S_3	$\mathcal{C}(\mathrm{Id}) = \{\mathrm{Id}\}$	$\mathcal{C}((1,2))$	$\mathcal{C}((1,2,3))$
$\chi_{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$	1	1	1
$\chi_{\epsilon_3} = \epsilon_3$	1	-1	1
χ_{St_3}	$\dim(\mathrm{St}_3)$	a	b

Ici St_3 est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$, dont on va déterminer le caractère mais qui reste mystérieuse. On verra en TD des modèles explicites de cette représentation. La somme des éléments des carrés de la première colonne doit valoir $|S_3| = 3! = 6$, ce qui donne $\dim(\mathrm{St}_3) = 2$. En suite on détermine a en utilisant l'orthogonalité des C_1 et C_2, et b en utilisant l'orthogonalité des C_1 et C_3. On trouve $a = 0$ et $b = -1$.