Chapitre 2

Dualité

2.1 Orthogonalité

Dans ce chapitre V désigne un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension fini d, et V^* son dual algébrique. On rappelle que si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de V, alors V^* possède une unique base $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ telle que pour $i, j = 1, \ldots, d$:

$$e_i^*(e_j) = \delta_i^j$$

et qu'on appelle $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ *la base duale* de $(e_1, \ldots, e_d)$. De même si $(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ est une base de V^*, alors il existe une unique base $(e_1, \ldots, e_d)$ de V telle que $(\phi_1, \ldots, \phi_d) = (e_1^*, \ldots, e_d^*)$ et on dit que $(e_1, \ldots, e_d)$ est la base duale de $(\phi_1, \ldots, \phi_d)$.

On rappelle les expressions utiles suivantes pour $v \in V$ et $\phi \in V^*$:

$$v = \sum_{i=1}^{d} e_i^*(v)e_i \ , \ \phi = \sum_{i=1}^{d} \phi(e_i)e_i^*. \tag{2.1}$$

Définition 2.1.1. *1. Soit $X \subset V$, on pose*

$$X^\perp := \{\phi \in V^*, \ \phi_{|X} \equiv 0\} = \{\phi \in V^*, \ \forall x \in X, \ \phi(x) = 0\}.$$

2. Soit $Y \subset V^*$, on pose

$$Y^\perp := \{v \in V, \ \forall \phi \in Y, \ \phi(v) = 0\} = \bigcap_{\phi \in Y} \mathrm{Ker}(\phi).$$

Exemple 2.1.1. $\{0_V\}^\perp = V^*$ *et* $V^\perp = \{0_{V^*}\}$.

On a de manière immédiate :

1) $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ et $Y^\perp = \mathrm{Vect}(Y)^\perp$.
2) Le passage à l'orthogonal inverse les inclusions.

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit $W < V$, resp. $U < V^*$, un sous-espace vectoriel, et $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de W qu'on complète en une base de de $(e_1, \ldots, e_d)$ de V, et de même $(\phi_1, \ldots, \phi_s)$ une base de U qu'on complète en une base de de $(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ de V^* de base duale $(f_1, \ldots, f_d) \in V^d$. Alors*

$$W^\perp = \mathrm{Vect}(e_{r+1}^*, \ldots, e_d^*)$$

et
$$U^{\perp} = \mathrm{Vect}(f_{s+1}, \dots, f_d).$$
En particulier
$$\dim(W^{\perp}) + \dim(W) = d = \dim(U^{\perp}) + \dim(U).$$

Démonstration. Il est clair que $e^*_{r+1}, \dots, e^*_d$ sont dans $W^{\perp}$ puisqu'ils sont nuls sur une base de W, donc $W^{\perp} \supseteq \mathrm{Vect}(e^*_{r+1}, \dots, e^*_d)$. Inversement si $\phi \in W^{\perp}$, on a $\phi = \sum_{i=r+1} \phi(e_i)e^*_i$ d'après l'équation (2.1) et donc $W^{\perp} \subseteq \mathrm{Vect}(e^*_{r+1}, \dots, e^*_d)$.

De même $f_{s+1}, \dots, f_d$ sont dans $U^{\perp}$ puisqu'ils sont annulés par la base $\phi_1 = f^*_1, \dots, \phi_s = f^*_s$ de U. Donc $U^{\perp} \supseteq \mathrm{Vect}(f_{s+1}, \dots, f_d)$. Inversement si $v \in U^{\perp}$, on a $v = \sum_{i=s+1} \phi_i(v) f_i$ d'après l'équation (2.1) et donc $U^{\perp} \subseteq \mathrm{Vect}(f_{s+1}, \dots, f_d)$. □

On en déduit :

Corollaire 2.1.1. *Soit $W < V$, resp. $U < V^*$, un sous-espace vectoriel, alors $(W^{\perp})^{\perp} = W$, resp. $(U^{\perp})^{\perp} = U$.*

Démonstration. Les incluisons $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ et $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$ sont évidentes. On conclut par égalité des dimensions. □

On déduit immédiatement de ce corollaire :

Corollaire 2.1.2. *L'application $W \mapsto W^{\perp}$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V sur celui des sous-espaces vectoriels de V^*, de réciproque $U \mapsto U^{\perp}$. En particulier si W_1 et W_2, resp. U_1 et U_2 sont deux sous-espaces vectoriels de V, resp. de V^*, alors*
$$W_1 = W_2 \Leftrightarrow W_1^{\perp} = W_2^{\perp}$$
et
$$U_1 = U_2 \Leftrightarrow U_1^{\perp} = U_2^{\perp}.$$

Exemple 2.1.2. *Si $X \subset V$ resp. $Y \subset V^*$, alors $(X^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(X)$ et $(Y^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(Y)$.*

Exemple 2.1.3. *Soit $\phi \in V^*$ et $\phi_1, \dots, \phi_r \in V^*$. Alors $\phi \in \mathrm{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_r)$ si et seulement si $\bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ker}(\phi_i) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$. En effet cette dernière inclusion peut aussi se lire*
$$\{\phi_1, \dots, \phi_r\}^{\perp} \subset \{\phi\}^{\perp}$$
et on déduit le résultat en passant à l'orthogonal.

2.2 Dual d'un endomorphisme

On s'intéresse maintnenat au dual d'un endomorphisme. Les lettres E, F et G désigneront toujours des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 2.2.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on définit $u^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par*
$$u^*(\phi) = \phi \circ u.$$

On vérifie immédiatement la propriété suivante.

Proposition 2.2.1. *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors*
$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^* \in \mathcal{L}(G^*, F^*).$$

Matriciellement la dualité correspond à la transposition au sens suivant.

Proposition 2.2.2. *Soient $B = (e_1, \ldots, e_a)$ et $C = (f_1, \ldots, f_b)$ des bases de E et F, de bases duales $B^* = (e_1^*, \ldots, e_a^*)$ et $C^* = (f_1^*, \ldots, f_b^*)$. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M := \mathrm{Mat}_{B,C}(u)$, alors*

$$\mathrm{Mat}_{C^*,B^*}(u^*) = {}^tM.$$

Démonstration. Par définition de M on a

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{b} m_{i,j} f_i. \tag{2.2}$$

Par ailleurs $u^*(f_j^*) = f_j^* \circ u$ se décompose dans la base B^* de E^* comme suit d'après l'équation (2.1) :

$$f_j^* \circ u = \sum_{i=1}^{a} f_j^*(u(e_i)) e_i^*.$$

Mais d'après les équations (2.2) et (2.1) on a $f_j^*(u(e_i)) = m_{j,i}$. Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{C^*,B^*}(u^*) = (m_{j,i})_{i \in [1,a], j \in [1,b]} = {}^tM.$$

□

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1. *L'application $u \mapsto u^*$ établit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.*

Démonstration. En effet l'application $M \mapsto {}^tM$ établit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{F})$ et $\mathcal{M}_{b,a}(\mathbb{F})$. □

Un autre corollaire immédiat est qu'un endomorphisme et son dual ont même spectre.

Corollaire 2.2.2. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u et u^* ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres.*

Démonstration. Soit B une base de E, alors $M := \mathrm{Mat}_B(u)$ a le même polynome caractéristique de ${}^tM = \mathrm{Mat}_{B^*}(u^*)$. □

Une propriété importante des endomorphismes duaux est la suivante :

Proposition 2.2.3. *Soit A un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors A est u-stable si et seulement si $A^\perp$ est u^*-stable.*

Démonstration. Si A est u-stable, soit $\phi \in A^\perp$. Alors $u^*(\phi)(A) = \phi(u(A)) \subset \phi(A) = \{0\}$ car ϕ est nulle sur A, donc $A^\perp$ est u^*-stable. Inversement si $A^\perp$ est u^*-stable et $a \in A$. On considère $\phi \in A^\perp$, alors $\phi((u(v)) = u^*(\phi)(v) = 0$ car $u^*(\phi)$ est nulle sur A par hypothèse. On en déduit que $u(v) \in (A^\perp)^\perp = A$ et donc A est stable par u. □

Exercice 2.2.1. *Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ admet une droite stable si et seulement si il admet un hyperplan stable.*

Correction : u admet une droite stable si et seulement si il admet une valeur propre dans $\mathbb{F}$, et de même pour u^*. Ainsi u admet une droite stable si et seuelemnt si u^* admet une droite stable. Or d'après la proposition 2.2.3, l'endomorphisme u^* une droite stable si et seulement si u admet un hyperplan stable, ainsi u admet une droite stable si et seulement si u admet un hyperplan stable.