Complété Unitaire Universel d'une Série Principale pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Li Ma.
Sujet proposé par : M-F. Vignéras.

novembre 2008

Résumé.

Le but de cet article est d'écrire plus clairement les détails de la démonstration du Théorème 2.2.2 de [1], qui décrit le complété unitaire universel d'une certaine induite parabolique localement analytique. Dans [1], ce complété est une construction "locale", qui à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ potentiellement cristalline réductible de dimension 2 associe une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (correspondance de Langlands p-adique), et est conjecturé d'être compatible avec la correspondance de Langlands globale.

Table des matières

1 Introduction et notations

Soient p un nombre premier et L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On note $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et B le sous-groupe de G formé des matrices triangulaires supérieures.

Si $\chi : B \to L^*$ est un caractère continu de B, alors on peut considérer l'induite parabolique $\mathrm{Ind}_B^G \chi$, qui est définie comme l'espace des fonctions $F : G \to L$ telles que $F(bg) = \chi(b)F(g)$ pour tout $b \in B, g \in G$, et vérifiant une certaine condition topologique (e.g., continue, ou localement analytique, etc.). Il y a une action naturelle de G sur cet espace, donnée par $(g \cdot F)(g') := F(g'g)$.

Comme le quotient $B\backslash G$ est en bijection avec l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ pour $z \in \mathbb{Q}_p$ et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est la "limite" des matrices précédentes (modulo B) quand z tend vers infini, on peut regarder l'induite parabolique comme un espace de fonctions sur $\mathbb{Q}_p \cup \infty$ (la "droite projective" sur $\mathbb{Q}_p$).

Dans cet article, on va étudier les complétés unitaires universels des induites paraboliques.

On note $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L, π une uniformisante fixée de L, $\mathbb{F}$ le corps résiduel de L, et val la valuation p-adique sur L, normalisée par $val(p) = 1$. On note ε le caractère cyclotomique sur $\mathbb{Q}_p^*$, i.e., $\varepsilon(z) = z|z|$.

Pour un L-espace vectoriel topologique V, on note V' le dual de V, i.e., le L-espace vectoriel des formes linéaires continues sur V.

Un espace de Banach sur L est un L-espace vectoriel topologique complet, dont la topologie peut être définie par une norme. Si E est un espace de Banach, on appelle une "boule unité de E" un sous-$\mathcal{O}_L$-module de E qui est la boule unité quand E est muni d'une norme donnant la topologie de E. On dit aussi *la* boule unité de E, qui est bien définie comme une classe de commensurabilité.

2 Complété unitaire universel de l'induite parabolique localement polynomiale

2.1 Définitions

Soient k un entier ≥ 2 et χ_1, χ_2 deux caractères continus de $\mathbb{Q}_p^*$ vers L^*. On voit $\chi_1 \otimes \chi_2$ comme caractère de B : $\chi_1 \otimes \chi_2(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}) = \chi_1(a)\chi_2(d)$. Notons que tout caractère de B est de cette forme. On suppose que $\chi_1 \otimes \chi_2$ est de poids classique k, i.e., que le caractère $z^{2-k}\chi_2\chi_1^{-1}$ est localement constant.

Maintenant on définit les induites paraboliques.

Définition 2.1.1. *L'induite parabolique localement polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytique, resp. continue, resp. $\mathcal{C}^{k-1}$) associée au caractère $\chi_1 \otimes \chi_2$ est le L-espace vectoriel des fonctions $F : G \to L$ telles que $F(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = \chi_1(a)\chi_2(d)F(g)$ et vérifiant la condition suivante : l'application $z \mapsto F(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}) =: f(z)$ est localement polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytique, resp. continue, resp. $\mathcal{C}^{k-1}$), et l'application $z \mapsto \chi_2\chi_1^{-1}(z)f(1/z)$ l'est aussi. Elle est notée $\mathrm{Ind}^{lp}\chi_1 \otimes \chi_2$ (resp. $\mathrm{Ind}^{an}\chi_1 \otimes \chi_2$, resp. $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\chi_1 \otimes \chi_2$, resp. $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^{k-1}}\chi_1 \otimes \chi_2$).*

L'action de G sur cet espace est donnée par $(g \cdot F)(g') := F(g'g)$, qui est bien définie (cf. [2] §4.2).

Cet espace est naturellement muni d'une topologie localement convexe la plus fine (resp. de type compact définie dans [8], resp. associée à la norme $\sup_{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} |f(g)|$, resp. associée à la norme $\mathcal{C}^{k-1}$) pour laquelle l'action de G est continue (cf. [8], [6], [2] §4.2).

Comme expliqué dans l'introduction, on peut identifier l'induite parabolique avec un espace de fonctions sur la "droite projective" sur $\mathbb{Q}_p$. En effet, l'application $F \mapsto (z \mapsto F(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}))$ est un isomorphisme topologique de l'induite parabolique localement polynomiale (resp. localement analytique, resp. continue, resp. $\mathcal{C}^{k-1}$) vers l'espace des fonctions localement polynomiales de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytiques, resp. continues, resp. $\mathcal{C}^{k-1}$) $f : \mathbb{Q}_p \to L$ telles que $\chi_2\chi_1^{-1}(z)f(1/z)$ se prolonge en $z = 0$ à une fonction localement polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytique, resp. continue, resp. $\mathcal{C}^{k-1}$). Dans la suite, on identifie ces deux espaces.

Lemme 2.1.1. *L'action de G est donnée par :*

$$(g\cdot f)(z)=\chi_1(ad-bc)\chi_2\chi_1^{-1}(-cz+a)f(\frac{dz-b}{-cz+a}),$$

$$\forall g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G, f\in \mathrm{Ind}^*\chi_1\otimes\chi_2,$$

où $*$ est lp, an, $\mathcal{C}^0$ ou $\mathcal{C}^{k-1}$, et on regarde f comme fonction sur $\mathbb{Q}_p\cup\infty$.

Démonstration Notons F la fonction sur G associée à f. On a alors :

$$\begin{aligned}
& (g\cdot f)(z) \\
= & (g\cdot F)(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}) \\
= & F(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \\
= & F(\begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{-cz+a} & -c \\ 0 & -cz+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{dz-b}{-cz+a} \end{pmatrix}) \\
= & \chi_1(ad-bc)\chi_2\chi_1^{-1}(-cz+a)f(\frac{dz-b}{-cz+a})
\end{aligned}$$

pour tout $z\in\mathbb{Q}_p, z\neq\frac{a}{c}$. On en déduit la formule voulue par continuité. □

Notons enfin que la topologie de l'induite parabolique peut aussi être décrite de façon suivante : l'application

$$f\mapsto((z\mapsto f(pz)),(z\mapsto\chi_2\chi_1^{-1}(z)f(1/z)))$$

est un isomorphisme topologique de $\mathrm{Ind}^*\chi_1\otimes\chi_2$ vers $\mathcal{C}^*(\mathbb{Z}_p,L)^2$, où $*$ est *lp* (resp. *an*, resp. $\mathcal{C}^0$, resp. $\mathcal{C}^{k-1}$), et $\mathcal{C}^*(\mathbb{Z}_p,L)$ est l'espace des fontions localement polynomiale (resp. localement analytique, resp. continue, resp. $\mathcal{C}^{k-1}$) de $\mathbb{Z}_p$ vers L, muni de la topologie localement convexe la plus fine (resp. de type compact définie dans [8], resp. associée à la norme sup, resp. associée à la norme $\mathcal{C}^{k-1}$ (cf. [4] §29)). Sous cette description concrète, on voit clairement la topologie de l'induite parabolique. Mais on ne comprend plus l'action de G.

2.2 Comlété unitaire universel de l'induite parabolique localement polynomiale

On va considérer les complétés unitaires universels (cf. [3] §1) des induites paraboliques. Dans la suite, on suppose que χ_2 est localement constant, $val(\chi_2(p)) = k-1$ et $val(\chi_1(p)) = 1-k$. Si $k=2$, on suppose de plus que $\chi_1 \neq \chi_2|\cdot|^2$. On pose $\eta_1 := \chi_1|\cdot|^{-1}z^{k-2}$ et $\eta_2 := \chi_2|\cdot|z^{2-k}$. Ils sont alors des caractères entiers.

On note aussi $\mathrm{Ind}^{lc}\chi_1 z^{k-2} \otimes \chi_2$ l'induite localement constante (i.e., lisse). Un sous-$\mathcal{O}_L$-module R d'un L-espace vectoriel E est appelé un *réseau* de E si l'injection $R \otimes_{\mathcal{O}_L} L \to E$ est un isomorphisme, i.e., si $LR = E$.

Proposition 2.2.1. *Le complété unitaire universel de l'induite localement polynomiale* $\mathrm{Ind}^{lp}\chi_1 \otimes \chi_2$ *s'identifie à* $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2 \otimes \eta_1$*, qui est un* G*-Banach unitaire admissible et topologiquement irréductible.*

Démonstration Notons d'abord que l'on a un isomorphisme topologique G-équivariant :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \otimes_L (\mathrm{Ind}^{lc}\chi_1 z^{k-2} \otimes \chi_2) & \to & \mathrm{Ind}^{lp}\chi_1 \otimes \chi_2 \\ f \otimes g & \mapsto & fg, \end{array}$$

où $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$ est la représentation algébrique de G formée des polynômes de degré $\leq k-2$ à coefficients dans L, avec l'action de G donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(z) = (ad-bc)^{2-k}(-cz+a)^{k-2}P(\frac{dz-b}{-cz+a}).$$

En utilisant l'entrelacement de la théorie de représentations lisses, on a :

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{Ind}^{lp}\chi_1 \otimes \chi_2 \\ = & \mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \otimes_L (\mathrm{Ind}^{lc}\chi_1 z^{k-2} \otimes \chi_2) \\ \simeq & \mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \otimes_L (\mathrm{Ind}^{lc}\chi_2|\cdot| \otimes \chi_1|\cdot|^{-1}z^{k-2}) \\ = & \mathrm{Ind}^{lp}\chi_2|\cdot|z^{2-k} \otimes \chi_1|\cdot|^{-1}z^{k-2} \\ = & \mathrm{Ind}^{lp}\eta_2 \otimes \eta_1 \end{array}$$

Il suffit donc de considérer le complété unitaire universel de $\mathrm{Ind}^{lp}\eta_2 \otimes \eta_1$. Notons que la représentation $\mathrm{Ind}^{lc}\eta_2 z^{k-2} \otimes \eta_1$ est irréductible par la théorie de représentations lisses et nos hypothèses, donc $\mathrm{Ind}^{lp}\eta_2 \otimes \eta_1$ l'est aussi, par l'appendice de [10] théorème 1.

Comme η_1 et η_2 sont entiers, on voit que la norme $\sup_{g\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} |F(g)|$ sur $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2\otimes\eta_1$ est égale à $\sup_{g\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} |F(g)|$. Cela montre que $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2\otimes\eta_1$ est un G-Banach unitaire. Notons que cette norme est aussi égale à $\sup_{z\in\mathbb{Q}_p}|f(z)|$ si on regarde f comme fonction sur $\mathbb{Q}_p$.

On a évidement une injection continue G-équivariante $\mathrm{Ind}^{lp}\eta_2\otimes\eta_1 \to \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2\otimes\eta_1$. Notons :

$$R := \{f\in \mathrm{Ind}^{lp}\eta_2\otimes\eta_1 : \|f\|\leq 1\},$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2\otimes\eta_1$. Comme $\mathrm{Ind}^{lp}\eta_2\otimes\eta_1$ est dense dans $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2\otimes\eta_1$, le complété de $\mathrm{Ind}^{lp}\eta_2\otimes\eta_1$ par rapport à R s'identifie à $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2\otimes\eta_1$.

Soient a dans $\mathbb{Q}_p$ et n un entier. Un ensemble de la forme $\{z\in\mathbb{Q}_p : |z-a|\leq|p^n|\}$ ou $\{z\in\mathbb{Q}_p : |z-a|\geq|p^{-n}|\}$ est appelé un "disque de rayon $|p^n|$". Alors pour chaque entier $n>0$, l'espace $\mathbb{Q}_p\cup\infty$ peut s'écrire comme réunion disjointe d'un nombre fini de disques de rayon $|p^n|$, dont il y en a un seul qui contient le point ∞ : le disque $\{z\in\mathbb{Q}_p : |z|\geq|p^{-n}|\}$.

Pour un disque D, on appelle "fonctions polynomiales de degré $\leq k-2$ sur D" les fonctions f dans $\mathrm{Ind}^{lp}\eta_2\otimes\eta_1$ telles que le support de f est contenu dans D, et que $f|_D$ est un polynôme de degré $\leq k-2$ (si D ne contient pas ∞) ou $\eta_2\eta_1^{-1}(z)(f|_D)(1/z)$ est un polynôme de degré $\leq k-2$ (si D est de la forme $\{z\in\mathbb{Q}_p : |z|\geq|p^{-n}|\}$). On appelle "fonctions polynomiales entières de degré $\leq k-2$ sur D" les fonctions polynomiales de degré $\leq k-2$ sur D qui sont à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$, i.e., qui sont de norme (de $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2\otimes\eta_1$) ≤ 1. Alors R est engendré (comme groupe abélien) par les fonctions polynomiales entières de degré $\leq k-2$ sur les disques finis et les disques $\{z\in\mathbb{Q}_p : |z|\geq|p^{-n}|\}$ pour $n>0$, car $\mathbb{Q}_p\cup\infty$ est compact.

On note P l'ensemble des fonctions polynomiales entières de degré $\leq k-2$ sur le disque $\mathbb{Z}_p$. On a alors :

$$R=\sum_{g\in G} gP.$$

En effet, R contient évidement tout gP car l'action de G est unitaire. D'autre part, l'ensemble $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} P$ coïncide avec l'ensemble des fonctions polynomiales entières de degré $\leq k-2$ sur le disque $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z - \frac{b}{d}| \leq |\frac{a}{d}|\}$, et l'ensemble $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix} P$ coïncide avec l'ensemble des fonctions polynomiales entières de degré $\leq k-2$ sur le disque $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z| \geq |b|\}$. La somme $\sum_{g \in G} gP$ contient ainsi toutes les fonctions polynomiales entières de degré $\leq k-2$ sur les disques finis et les disques $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z| \geq |p^{-n}|\}$, et donc contient R.

Or, P est un $\mathcal{O}_L$-module de type fini (plus précisément, les fonctions $\binom{z}{j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ $(0 \leq j \leq k-2)$ forme une $\mathcal{O}_L$-base de P), on sait alors que R est un $\mathcal{O}_L[G]$-module de type fini. Ainsi le complété unitaire universel de $\mathrm{Ind}^{lp} \eta_2 \otimes \eta_1$ est exactement le complété par rapport à R ([3] lemme 1.3), qui s'identifie à $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0} \eta_2 \otimes \eta_1$.

On va montrer que l'espace $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0} \eta_2 \otimes \eta_1$ est admissible. On note $I(1) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : a \equiv d \equiv 1 \mod p, c \equiv 0 \mod p\}$, et $E := \{f \in \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0} \eta_2 \otimes \eta_1 : \|f\| \leq 1\}$. Il suffit (par [5] lemme 4.6.3) de montrer que l'espace $(E/\pi E)^{I(1)}$ (i.e. les vecteurs dans $E/\pi E$ fixés par $I(1)$) est de dimension finie sur $\mathbb{F}$.

On fixe un ensemble S de représentants de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)/I(1)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{F}^S \\ F & \mapsto & (\overline{F(s)})_{s \in S} \end{array}$$

induit une application $E/\pi E \to \mathbb{F}^S$, qui induit par restriction une application $(E/\pi E)^{I(1)} \to \mathbb{F}^S$. Cette dernière application est en fait injective : si F_1, F_2 sont deux fonctions dans E telles que $\overline{F_1}, \overline{F_2} \in E/\pi E$ sont invariantes par $I(1)$, et que $\overline{F_1(s)} = \overline{F_2(s)}$ pour tout $s \in S$, alors $\overline{F_1(g)} = \overline{F_2(g)}$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ à cause de l'invariance par $I(1)$, et on a donc $\overline{F_1} = \overline{F_2} \in E/\pi E$.

Comme $I(1)$ est d'indice fini dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, on en conclut que $(E/\pi E)^{I(1)}$ est de dimension finie sur $\mathbb{F}$.

Finalement on va montrer que l'espace $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0} \eta_2 \otimes \eta_1$ est irréductible. Supposons par l'absurde qu'il y a un sous-espace fermé propre non nul V de

$\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2\otimes\eta_1$ stable par G. Notons $\overline{\eta_1}$ (resp. $\overline{\eta_2}$) la réduction modulo π de η_1 (resp. de η_2). L'espace $E/\pi E$ s'identifie alors à l'induite $\mathrm{Ind}\overline{\eta_2}\otimes\overline{\eta_1}$, i.e., l'espace des fonctions lisses $F : G \to \mathbb{F}$ telles que $F(bg) = \overline{\eta_2}\otimes\overline{\eta_1}(b)F(g)$ pour tout $b \in B$, $g \in G$. Avec la notation de la section A.2, on voit que l'espace $\widetilde{V}$ (i.e. la réduction modulo π de la boule unité de V) est un sous-espace de $\mathrm{Ind}\overline{\eta_2}\otimes\overline{\eta_1}$ fixé par G, qui est propre non nul par corollaire A.2.1.

Or, par [11] théorème 30, la représentation $\mathrm{Ind}\overline{\eta_2}\otimes\overline{\eta_1}$ est irréductible, sauf si $\overline{\eta_2} = \overline{\eta_1}$, et dans ce cas elle n'admet qu'une seule sous-représentation, qui est de dimension 1. Donc $\widetilde{V}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{F}$, ainsi V est de dimension 1 sur L, par corollaire A.2.1.

Soit F une base de V. Notons $i := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l'élément neutre du groupe G. Comme V est stable sous l'action de G, pour chaque $g \in G$ il existe $\lambda_g \in L$ tel que $g \cdot F = \lambda_g F$, i.e., $F(g'g) = \lambda_g F(g')$ pour tout $g' \in G$. On en déduit que $F(i) \neq 0$, car sinon on aurait $F(g) = \lambda_g F(i) = 0$ pour tout $g \in G$. On peut donc supposer que $F(i) = 1$. Alors on a $F(g) = \lambda_g$, d'où $F(g'g) = F(g)F(g')$ pour tout $g, g' \in G$. C'est-à-dire, F est un caractère sur G. Comme le commutateur de G est égal à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on sait que F se factorise par le déterminant, i.e., il existe un caractère $\mu : \mathbb{Q}_p^* \to L^*$, tel que $F(g) = \mu(\det(g))$ pour tout $g \in G$. Pour tout $a, d \in \mathbb{Q}_p^*$, on a alors : $\mu(ad) = F(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}) = \eta_2(a)\eta_1(d)F(i) = \eta_2(a)\eta_1(d)$, d'où on conclut que $\eta_2 = \eta_1 = \mu$, ce qui contredit notre hypothèse sur χ_1 et χ_2. □

3 Complété unitaire universel de l'induite parabolique localement analytique

On garde les notations $\chi_1, \chi_2, \eta_1, \eta_2$ du chapitre précédent. On étudie maintenant le complété de l'induite parabolique analytique.

3.1 Caractérisation du dual du complété unitaire universel

On note T l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans L, i.e.,

$$T = \{\sum_{i\geq 0} a_i z^i : a_i \in L, \lim_{i\to\infty} |a_i| = 0\}.$$

T est un L-Banach pour la norme :

$$\|f\| = \sup_{j\geq 0} |a_j| = \sup_{z\in\mathbb{C}_p, |z|\leq 1} |f(z)|.$$

On note $\mathcal{O}_T := \{f \in T : \|f\| \leq 1\}$. C'est un sous-$\mathcal{O}_L$-module de T.

On note $H := \mathrm{Ind}^{an}\chi_1 \otimes \chi_2$. Comme dans la démonstration de la proposition 2.2.1, pour un disque $D = \{|z-a| \leq |p^n|\}$ ou $\{|z| \geq |p^n|\}$, on appelle "fonctions analytiques sur D" les fonctions f dans H telles que le support de f est contenu dans D et que $f|_D$ est une série convergente en $z-a$ (si $D = \{|z-a| \leq |p^n|\}$) ou $\chi_2\chi_1^{-1}(z)(f|_D)(1/z)$ est une série convergente en z.

On note T_1 (resp. T_2) le sous-espace de H des fonctions analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ (resp. sur $\mathbb{Q}_p\backslash p\mathbb{Z}_p$). Alors l'application $f \mapsto f(z)\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ (resp. $f \mapsto \chi_2\chi_1^{-1}(z)f(1/z)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p\backslash p\mathbb{Z}_p}$) est un isomorphisme topologique de T vers T_1 (resp. vers T_2). On note $\mathcal{O}_{T_1}$ (resp. $\mathcal{O}_{T_2}$) l'image de $\mathcal{O}_T$ sous cet isomorphisme.

Il est immédiat dans la définition que l'on a $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_1$ et $\mathcal{O}_{T_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_{T_1}$. On note :

$$R := \sum_{g\in G} g\mathcal{O}_{T_1}, R_1 := \sum_{b\in B} b\mathcal{O}_{T_1}, R_2 := \sum_{b\in B} b\mathcal{O}_{T_2}.$$

Ce sont des sous-$\mathcal{O}_L$-modules de H.

Lemme 3.1.1. *R est ouvert dans H, ainsi en est un réseau ouvert stable par G.*

Démonstration Comme expliqué dans la démonstration de la proposition 2.2.1, pour chaque entier $n > 0$, l'espace $\mathbb{Q}_p \cup \infty$ s'écrit comme réunion disjointe des disques de rayon $|p^n|$. Pour chaque disque D dans la réunion, on note T_D l'espace des fonctions analytiques sur D, et $H_n := \bigoplus_D T_D$, où D parcourt tous les disques de rayon $|p^n|$ dans la réunion. Alors H_n est un espace de Banach, et H est la limite inductive des H_n.

Pour montrer que R est ouvert dans H, il suffit de montrer pour chaque $n > 0$ que $R \cap H_n$ est ouvert dans H_n. De façon équivalente, il suffit de montrer que $R \cap T_D$ est ouvert dans T_D pour chaque disque D dans la réunion.

En effet, pour un tel disque D, le même argument que dans la démonstration de la proposition 2.2.1 montre qu'il existe un élément g (de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$) dans G, tel que $g\mathbb{Z}_p := \{\frac{dz-b}{-cz+a} : z \in \mathbb{Z}_p\}$ est égal à D. Alors l'application $f \mapsto gf$ est un isomorphisme topologique de T_1 vers T_D. Comme $g\mathcal{O}_{T_1}$ est contenu dans R et $\mathcal{O}_{T_1}$ est ouvert dans T_1, on sait que $R \cap T_D$ est ouvert dans T_D.

Donc R est ouvert dans H. En particulier, on a $R \otimes_{\mathcal{O}_L} L = H$, c'est-à-dire R est un réseau ouvert de H. Il est évidement stable par G. $\square$

Lemme 3.1.2. *R est un élément minimal dans l'ensemble des classes de commensurabilité des réseaux ouverts stables par G de H.*

Démonstration Soit R' un autre réseau ouvert de H stable par G. Alors $R' \cap T_1$ est ouvert dans T_1, i.e., il existe une constante $\lambda \in L^*$, telle que la partie $\lambda\mathcal{O}_{T_1}$ est contenue dans R'. Comme R' est stable par G, la partie $\lambda \cdot g\mathcal{O}_{T_1}$ est contenue dans R' pour tout $g \in G$. Donc λR est contenu dans R'. $\square$

Corollaire 3.1.1. *Le complété unitaire universel de H existe, et s'identifie au complété de H par rapport au réseau R.*

Démonstration Voir [3] lemma 1.3. $\square$

On note désormais $\hat{H}$ le complété unitaire universel de H.

Lemme 3.1.3. *$R_1 + R_2$ est un réseau de H, commensurable au réseau R.*

Démonstration D'une part, comme $\mathcal{O}_{T_2}$ est égal à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_{T_1}$, on a : $R_1 + R_2 \subseteq R$.

D'autre part, pour tout $g \in G$, il existe une matrice $b \in B$, telle que $b^{-1}g$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}(|d| \leq 1)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}(|c| < 1)$. Il suffit donc de montrer l'existence d'une constante $\lambda \in L^*$, telle que pour toute $f \in \mathcal{O}_{T_1}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} f \in \lambda(R_1 + R_2), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} f \in \lambda(R_1 + R_2), \forall |d| \leq 1, |c| < 1.$$

En effet, soit f dans $\mathcal{O}_{T_1}$, soit d dans $\mathbb{Z}_p$, alors $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f = f(z+d)$ est encore dans $\mathcal{O}_{T_1}$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \in \mathcal{O}_{T_2},$$

grâce à l'identité $\mathcal{O}_{T_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_{T_1}$.

Pour l'autre cas, soit c dans $p\mathbb{Z}_p$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} f &= \chi_2 \chi_1^{-1}(-cz+1) f(\frac{z}{-cz+1}) \mathbb{1}_{\{|\frac{z}{-cz+1}| \leq 1\}} \\ &= \chi_2 \chi_1^{-1}(1-cz) f(z + cz^2 + \cdots) \mathbb{1}_{\{|z| \leq 1\}}. \end{aligned}$$

Si on note $g(z) := z^{k-2} f(z + cz^2 + \cdots)$, alors g est encore dans $\mathcal{O}_{T_1}$, et on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} f(z) = \hat{\chi}(1-cz) g(z)$, où $\hat{\chi} := z^{2-k} \chi_2 \chi_1^{-1}$ est un caractère localement constant. Il existe donc un entier positif m, tel que $\hat{\chi}$ est constant sur $1 + p^m \mathbb{Z}_p$.

Si on a $|c| \leq |p^m|$, alors la fonction $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} f$ est déjà dans $\mathcal{O}_{T_1}$; sinon, il existe un nombre fini d'éléments $(z_i)_i$ dans $\mathbb{Z}_p$, tels que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} f = \sum_i \tau_i g(z) \mathbb{1}_{\{|z - z_i| \leq |\frac{p^m}{c}|\}},$$

où $\tau_i := \hat{\chi}(1 - cz_i)$ est dans $\mathbb{Z}_p^*$.

Notons $n := m - val(c)$. Pour chaque i, on pose $h(z) := g(p^n(z + z_i)) \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Alors on a :

$$\|h|_{\mathbb{Z}_p}\| = \sup_{z \in \mathbb{C}_p, |z| \leq 1} |h(z)| \leq \sup_{z \in \mathbb{C}_p, |z| \leq 1} |g(z)| = \|g|_{\mathbb{Z}_p}\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de T. Ainsi h est dans $\mathcal{O}_{T_1}$. On en déduit que la fonction

$$\begin{pmatrix} p^n & z_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h(z) = p^{(k-2)m} \omega g(z) \mathbb{1}_{\{|z - z_i| \leq |p^n|\}},$$

est dans R_1 (où ω est un nombre de valeur absolue ≥ 1). Si on pose $\lambda := p^{(2-k)m}$, alors on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} f$ est dans λR_1. $\square$

Corollaire 3.1.2. *$\hat{H}$ s'identifie au complété de H par rapport au réseau $R_1 + R_2$. En particulier, pour une distribution $\mu \in H'$, on a :*

$$\mu \in \hat{H}' \Leftrightarrow \exists \text{ une constante } C, |\mu(f)| \leq C, \forall f \in R_1, R_2.$$

De plus, pour une constante C, l'ensemble des $\mu \in H'$ vérifiant la condition ci-dessus est une boule unité de $\hat{H}'$. $\square$

Proposition 3.1.1. *Soit μ un élément de H'. Alors μ est dans $\hat{H}'$ si et seulement s'il existe une constante C, telle que :*

$$\left| \int_{|z-a| \leq |p^n|} (z-a)^j d\mu(z) \right| \leq C \left| p^{n(j-k+1)} \right|, \tag{1}$$

$$\left| \int_{|z-a| \geq |p^n|} \chi_2 \chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j} d\mu(z) \right| \leq C \left| p^{n(k-1-j)} \right|, \tag{2}$$

pour tout $a \in \mathbb{Q}_p, n \in \mathbb{Z}, j \geq 0$.

De plus, pour une constante C, l'ensemble des μ vérifiant les conditions (1), (2) est une boule unité de $\hat{H}'$.

Démonstration Par le corollaire précédent, μ est dans $\hat{H}'$ si et seulement s'il existe une constante C, telle que pour tout $b \in B$ et toute $f \in \mathcal{O}_{T_1} \cup \mathcal{O}_{T_2}$, on a : $|\mu(b \cdot f)| \leq C$. Comme le $\mathcal{O}_L$-module $\mathcal{O}_T$ est topologiquement engendré par les fonctions z^j ($j \geq 0$), on voit que cette condition est encore équivalente à :

$$|\mu(b \cdot z^j \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p})| \leq C, |\mu(b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z^j \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p})| \leq C$$

pour toute $b \in B$ et tout $j \geq 0$. En écrivant explicitement les fonctions $b \cdot z^j \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ et $b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z^j \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$, on voit que ces conditions sont exactement les conditions (1) et (2) dans l'énoncé.

La deuxième assertion vient de la deuxième assertion du corollaire précédent. $\square$

3.2 Caractérisation du dual de l'espace V/W

On note $V := \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^{k-1}} \chi_1 \otimes \chi_2$ l'induite parabolique $\mathcal{C}^{k-1}$. Rappelons que l'action de G sur V est bien définie et continue ([2] lemme 4.2.1).

Lemme 3.2.1. *Pour $0 \le j \le k-2$ et $a \in \mathbb{Q}_p$, les fonctions $z \mapsto z^j$ et $z \mapsto \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j}$ (prolongée par 0 en $z = a$) sont dans V.*

Démonstration [2] lemme 4.2.2. □

On note W l'adhérence dans V du sous-L-espace vectoriel engendré par toutes les fonctions dans le lemme précédent. En écrivant explicitement la fonction $g \cdot f$ pour $g \in G$ et f dans le lemme précédent, on voit que $g \cdot f$ est une combinaison L-linéaire des fonctions dans le lemme précédent. Ainsi W est stable par G, et V/W est un G-Banach.

L'injection continue $H \hookrightarrow V$ est d'image dense dans V. On a alors une injection : $V' \to H'$, dont on peut voir V' comme sous-espace de H'. De plus, on voit $(V/W)'$ comme sous-espace de V' via l'injection canonique.

L'application $f \mapsto (f(pz), \chi_2\chi_1^{-1}(z)f(1/z))$ est un isomorphisme de V vers $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)^2$, et sa restriction à H donne un isomorphisme de H vers $\mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p, L)^2$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & V \arrow[d, "\sim"] \\ \mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p, L)^2 \arrow[r] & \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)^2 \end{tikzcd}$$

donne alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H' & V' \arrow[l] \\ \mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p, L)'^2 \arrow[u, "\sim"] & \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)'^2 \arrow[l] \arrow[u, "\sim"] \end{tikzcd}$$

On va donner un critère pour qu'une distribution sur H s'étende à une distribution sur V. On montre d'abord un lemme technique.

Lemme 3.2.2. *Soient f une fonction dans $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$ et n un entier positif ou nul. Notons g la fonction $z \mapsto f(z/p^n)\mathbb{1}_{|z|\leq|p^n|}$, alors on a :*

$$\|g\| \leq \left|p^{n(1-k)}\right| \cdot \|f\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$.

Démonstration On va montrer par récurrence que :

$$\|\Phi_i g\|_\infty \leq \left|p^{-ni}\right| \cdot \|f\|, \forall i \in \{0, \cdots, k-1\},$$

où Φ_i sont les fonctions définies dans [4] §29. Le cas $i = 0$ est évident. Supposons le cas $i-1$ avec $i \in \{1, \cdots, k-1\}$. Soient $z_0, \cdots, z_i$ dans $\mathbb{Z}_p$. Si tous les z_j sont dans $p^n\mathbb{Z}_p$, alors on a :

$$|\Phi_i g(z_0, \cdots, z_i)| = \left|p^{-ni}\right| \cdot \left|\Phi_i f(\frac{z_0}{p^n}, \cdots, \frac{z_i}{p^n})\right| \leq \left|p^{-ni}\right| \cdot \|f\|.$$

Si tous les z_j sont dans $\mathbb{Z}_p \backslash p^n\mathbb{Z}_p$, alors on a évidement $\Phi_i g(z_0, \cdots, z_i) = 0$. Si on a $|z_0| \leq |p^n|$ et $|z_1| > |p^n|$, alors on a par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |\Phi_i g(z_0, \cdots, z_i)| &= \frac{|\Phi_{i-1}g(z_0, z_2, \cdots, z_i) - \Phi_{i-1}g(z_1, z_2, \cdots, z_i)|}{|z_0 - z_1|} \\ &\leq \left|p^{-n}\right| \cdot \|\Phi_{i-1}g\|_\infty \leq \left|p^{-ni}\right| \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu l'inégalité voulue pour tout $i \in \{0, \cdots, k-1\}$, d'où l'inégalité de l'énoncé. □

Théorème 3.2.1. *Soit μ un élément de $\mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p, L)'$. Alors μ est dans $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)'$ si et seulement s'il existe une constante C, telle que :*

$$\left|\mu((z-a)^j \mathbb{1}_{\{|z-a|\leq|p^n|\}})\right| \leq C \left|p^{n(j-k+1)}\right|, \forall a \in \mathbb{Z}_p, n \geq 0, j \geq 0.$$

De plus, pour une constante C, l'ensemble des $\mu \in \mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p, L)'$ vérifiant la condition ci-dessus est une boule unité de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)'$.

Démonstration Si μ est dans $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)'$, alors il existe constante C, telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$, on a : $|\mu(f)| \leq C\|f\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$. Grâce au lemme 3.2.2, on a :

$$\left\|(z-a)^j \mathbb{1}_{\{|z-a|\leq|p^n|\}}\right\| = \left\|z^j \mathbb{1}_{\{|z|\leq|p^n|\}}\right\| \leq \left|p^{n(j-k+1)}\right|,$$

d'où l'inégalité voulue.

D'autre part, supposons l'existence d'une telle constante C. Pour chaque $d \geq k-1$, on note $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)$ le sous-espace de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$ formé des fonctions localement polynomiales de degré $\leq d$, et $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)'$ le dual (algébrique) de $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)$. Comme $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)$ est dense dans $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$, l'application canonique $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)' \to \mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)'$ est injective.

Par [2] théorème 4.1.4, l'existence de la constante C implique que $\mu|_{\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p,L)}$ s'étend à une distribution sur $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$. On le note ν_d. Or, ν_d et ν_{d+1} coïncident sur $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)$, qui est dense dans $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$, on a donc $\nu_d = \nu_{d+1}$. Ainsi toutes les ν_d sont égales, et on peut l'écrire ν. On a forcément $\nu|_{\mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p,L)} = \mu$, car les deux distributions coïncident sur la réunion $\bigcup_{d\geq k-1} \mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)$, qui est dense dans $\mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p, L)$.

Finalement, par la remarque après [2] théorème 4.1.4, la norme $\|\mu\| := \sup_{a\in\mathbb{Z}_p} \sup_{j,n\geq 0} p^{n(j-k+1)} |\mu((z-a)^j \mathbb{1}_{\{|z-a|\leq|p^n|\}})|$ redonne la topologie de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)'$, d'où la deuxième assertion. □

Corollaire 3.2.1. *Soit μ un élément de H'. Alors μ est dans V' si et seulement s'il existe une constante C, telle que :*

$$\left|\int_{|z-a|\leq|p^n|} (z-a)^j d\mu(z)\right| \leq C \left|p^{n(j-k+1)}\right|, \forall |a| \leq |p|, j \geq 0, n \geq 1, \quad (3)$$

$$\left|\int_{|z|\geq|p^n|} \chi_2\chi_1^{-1}(z)(\frac{1}{z}-a)^j d\mu(z)\right| \leq C \left|p^{n(k-1-j)}\right|, \forall |a| \leq |p^{-n}|, j \geq 0, n \leq 0, \quad (4)$$

$$\left|\int_{|z-\frac{1}{a}|\leq|\frac{p^n}{a^2}|} \chi_2\chi_1^{-1}(z)(\frac{1}{z}-a)^j d\mu(z)\right| \leq C \left|p^{n(j-k+1)}\right|, \forall |p^n| < |a| \leq 1, j \geq 0. \quad (5)$$

De plus, on peut remplacer (4) par :

$$\left|\int_{|z|\geq|p^n|} \chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{-j} d\mu(z)\right| \leq C \left|p^{n(k-j-1)}\right|, \forall j \geq 0, n \leq 0. \quad (6)$$

Pour une constante C, l'ensemble des $\mu \in H'$ vérifiant les conditions (3), (5), (6) est une boule unité de V'.

Démonstration En utilisant le diagramme commutatif ci-dessus, on sait que μ est dans V' si et seulement si μ_1 et μ_2 sont dans $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)'$, où (μ_1, μ_2) est l'élément de $\mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p, L)'^2$ correspondant à μ. Par le théorème, cela est encore équivalente à l'existance d'une constante C vérifiant :

$$\left|\mu_i((z-a)^j \mathbb{1}_{\{|z-a|\leq |p^n|\}})\right| \leq C \left|p^{n(j-k+1)}\right|, \forall a \in \mathbb{Z}_p, n \geq 0, j \geq 0, i = 1, 2.$$

On voit alors que la condition ci-dessus pour μ_1 (resp. pour μ_2) est exactement la condition (3) (resp. les conditions (4) et (5)), quitte-à-modifier la constante C.

Il reste à montrer que la condition (6) implique la condition (4). En effet, supposant (6), on a :

$$\begin{array}{rcl} & & \left|\int_{|z|\geq|p^n|} \chi_2\chi_1^{-1}(z)(\frac{1}{z}-a)^j d\mu(z)\right| \\ & \leq & \max_{0\leq i\leq j} \left|\int_{|z|\geq|p^n|} \chi_2\chi_1^{-1}(z) z^i d\mu(z)\right| \cdot |a|^{j-i} \\ & \leq & C \max_{0\leq i\leq j} \left|p^{n(k-1-i)} a^{j-i}\right| \\ (i=j) & = & C\left|p^{n(k-1-j)}\right|. \end{array}$$

Enfin, la dernière assertion vient de la dernière assertion du théorème précédent. □

Corollaire 3.2.2. *Soit μ un élément de H'. Alors μ est dans $(V/W)'$ si et seulement s'il existe constante C vérifiant les conditions (3), (5), (6) (dont on peut en conclure que μ est dans V', ainsi l'évaluer sur toute fonction dans V) et les deux conditions supplémentaires suivantes :*

$$\begin{array}{rcll} \mu(z^j) & = & 0, \forall 0 \leq j \leq k-2, & (7) \\ \mu(\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j}) & = & 0, \forall a \in \mathbb{Q}_p, 0 \leq j \leq k-2. & (8) \end{array}$$

De plus, pour une constante C, l'ensemble des $\mu \in H'$ vérifiant les conditions (3), (5), (6), (7), (8) est une boule unité de $(V/W)'$. □

3.3 Théorème Principal

Le théorème principal est le suivant :

Théorème 3.3.1. *Il y a un isomorphisme topologique G-équivariant $\hat{H} \to V/W$. C'est un G-Banach unitaire admissible de longeur topologique* 2*, extension non triviale de* $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2 \otimes \eta_1$ *par* $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}$.

Le reste du texte sera consacré à démontrer ce théorème.

On montre d'abord que les deux duaux $\hat{H}'$ et $(V/W)'$, vus comme sous-espace de H', coïncident, et que leur boules unités coïncident aussi. Par les sections précédentes, il suffit de montrer que, pour une distribution $\mu \in H'$ et une constante C, μ vérifie les conditions (1), (2) si et seulement si μ vérifie les conditions (3), (5), (6), (7), (8), quitte-à-modifier la constante C, i.e., multiplier C par une constante indépendant de C et μ.

Supposons (1) et (2). Il est clair que (1) implique (3) et que (2) implique (6). On va montrer que (1) implique (5).

On note $\chi := \chi_2\chi_1^{-1}z^{2-k}|\cdot|^k$. C'est un caractère entier localement constant sur $\mathbb{Q}_p^*$.

On écrit $\int f(z)$ pour $\int f(z)d\mu(z)$, avec μ sous-entendu dans le contexte.

Lemme 3.3.1. *Quitte-à-modifier la constante C, (5) est équivalent à :*

$$\left|\int_{|z-\frac{1}{a}|\leq|\frac{p^n}{a^2}|} z^{k-2}(\frac{1}{z}-a)^j\right| \leq C\left|a^k p^{n(j-k+1)}\right|, \forall |p^n| < |a| \leq 1, j \geq 0. \quad (9)$$

Démonstration En effet, on va montrer qu'il y a équivalence entre :

1. (5) ;
2. (9) ;
3. il existe un entier positif n_0, tel que (9) se vérifie pour tout $|a| \leq 1, n \geq n_0 + val(a), j \geq 0$.

1.$\Rightarrow$3. : Comme χ est localement constant, pour n_0 suffisament grand, on peut supposer que χ est constant sur le disque $\{|z-\frac{1}{a}| \le |\frac{p^n}{a^2}|\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} C\left|p^{n(j-k+1)}\right| &\ge \left|\int_{|z-\frac{1}{a}|\le|\frac{p^n}{a^2}|} \chi_2\chi_1^{-1}(z)(\frac{1}{z}-a)^j\right| \\ &= \left|\int_{|z-\frac{1}{a}|\le|\frac{p^n}{a^2}|} z^{k-2}|z|^{-k}(\frac{1}{z}-a)^j\right| \\ &= \left|\frac{1}{a}\right|^k \left|\int_{|z-\frac{1}{a}|\le|\frac{p^n}{a^2}|} z^{k-2}(\frac{1}{z}-a)^j\right|, \end{aligned}$$

d'où 3.

3.$\Rightarrow$1. : On peut décomposer le disque $D=\{|z-\frac{1}{a}| \le |\frac{p^n}{a^2}|\}$ en les petits disques $D'=\{|z-\frac{1}{a'}| \le |\frac{p^{n'}}{a^2}|\}$ avec $|a'|=|a|$ et $n \le n' < n_0+n$. Comme χ est localement constant, on peut supposer, quitte-à-agrandir n_0, que χ est constant sur chaque petit disque. On a alors :

$$\begin{aligned} & \left|\int_{D'} \chi_2\chi_1^{-1}(z)(\frac{1}{z}-a)^j\right| \\ &= \left|\frac{1}{a}\right|^k \left|\int_{D'} z^{k-2}((\frac{1}{z}-a')+(a'-a))^j\right| \\ &\le \left|\frac{1}{a}\right|^k \max_{0\le i\le j} \left|a'-a\right|^{j-i} \left|\int_{D'} z^{k-2}(z-a')^i\right| \\ &\le |a|^{-k} \max_{0\le i\le j} C\left|p^{n(j-i)}a^k p^{n'(i-k+1)}\right| \\ (i=0) \quad &= C\left|p^{n(j-k+1)-(n'-n)(k-1)}\right| \\ &\le C'\left|p^{n(j-k+1)}\right|, \end{aligned}$$

où on a posé $C' := C|p^{n_0(k-1)}|$.

On a ainsi démontré que 3.$\Leftrightarrow$1. L'équivalence 3.$\Leftrightarrow$2. se démontre exactement de même façon - en effet, 2. peut être vu comme un cas particulier de 1., en posant $\chi=1$. □

On peut maintenant montrer l'implication (1)$\Rightarrow$(5). Par le lemme précédent, il suffit de montrer l'implication (1)$\Rightarrow$(9). En notant $D=\{|z-\frac{1}{a}| \le$

$|\frac{p^n}{a^2}|\}$ et $w = z - \frac{1}{a}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_D z^{k-2} (\frac{1}{z} - a)^j \right| \\
= & \left| \int_D a^j w^j z^{-j+k-2} \right| \\
= & \left| \int_D a^{2j-k+2} w^j \sum_{i \geq 0} \lambda_i a^i w^i \right| \\
(par (1)) \quad \leq & |a|^{2j-k+2} \max_{0 \leq i \leq j} |a|^i \, C \left| \frac{p^n}{a^2} \right|^{i+j-k+1} \\
(i = 0) \quad = & C \, |a|^{2j-k+2} \left| \frac{p^n}{a^2} \right|^{j-k+1} \\
= & C \left| a^k p^{n(j-k+1)} \right|,
\end{aligned}$$

où λ_i sont des entiers (plus précisément, des nombres combinatoires). On en déduit (9).

On a donc obtenu (3), (5), (6). Par corollaire 3.2.1, μ s'étend à une distribution sur V. En particulier, on peut évaluer μ sur toutes les fonctions dans lemme 3.2.1. Par la démonstration du lemme 3.2.1, la suite des fonctions $(z^j \mathbb{1}_{\{|z| \leq |p^n|\}})_n$ tend vers la fonction $z \mapsto z^j$ dans V lorsque n tend vers $-\infty$, et la suite $(\chi_2 \chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j} \mathbb{1}_{\{|z-a| \geq |p^n|\}})_n$ tend vers $z \mapsto \chi_2 \chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j}$ dans V lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent, en faisant n tendre vers $-\infty$ dans (1) et vers $+\infty$ dans (2), on obtient (7) et (8).

Réciproquement, supposons (3), (5), (6), (7), (8). Par lemme 3.3.1, on peut remplacer (5) par (9). On veut montrer (1), (2).

Lemme 3.3.2. *Pour vérifier (1), (2), il suffit de vérifier les conditions suivantes (quitte-à-modifier la constante C) :*
- *(1) pour tout disque $\{|z - a| \leq |p^n|\}$ qui ne rencontre pas $p\mathbb{Z}_p$ et tout $j \geq 0$,*
- *(1) pour tout disque $\{|z - a| \leq |p^n|\}$ contenu dans $p\mathbb{Z}_p$ et tout $j \geq 0$,*
- *(1) pour $a = 0$, $0 \leq j \leq k-2$ et $n \leq 0$,*
- *(2) pour tout a, $0 \leq j \leq k-2$ et $n \geq 0$,*
- *(2) pour $a = 0$, $j \geq k-1$ et $n \leq 0$.*

Démonstration Supposons les conditions dans l'énoncé. On vérifie d'abord la condition (1) pour tout a, n, j. En fait, il suffit de vérifier le cas $a = 0, n \leq 0, j \geq k - 1$. On note $D_n := \{|z| \leq |p^n|\}$, alors il existe $p - 1$ disques $D_a := \{|z - a| \leq |p^{n+1}|\}$ avec $|a| = |p^n|$, tels que l'on a : $\bigcup D_a = D_n \backslash D_{n+1}$. Pour chaque D_a, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_a} z^j \right| &\leq \max_{0 \leq i \leq j} \left| \int_{D_a} (z-a)^i \right| \cdot \left| a^{j-i} \right| \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq j} C \left| p^{(n+1)(i-k+1)} \right| \cdot \left| p^{n(j-i)} \right| \\ (i = 0) \quad &= C \left| p^{1-k} \right| \cdot \left| p^{n(j-k+1)} \right|. \end{aligned}$$

Comme $j - k + 1$ est positif ou nul, on a : $|p^{(n+1)(j-k+1)}| \leq |p^{n(j-k+1)}|$. Ainsi une récurrence sur $-n$ montre que :

$$\left| \int_{D_n} z^j \right| \leq C \left| p^{1-k} \right| \cdot \left| p^{n(j-k+1)} \right|, \forall n \leq 0, j \geq k - 1$$

(notons que le cas $n = 1$ est contenu dans l'hypothèse). On a donc vérifié la condition (1), quitte-à-changer C par $|p^{1-k}|C$.

Ensuite on vérifie la condition (2). Il reste deux cas :

1. $0 \leq j \leq k - 2$, $n < 0$ et a quelconque ;
2. $j \geq k - 1$, $n > 0$ et $a = 0$.

Ayant (1), un calcul similaire à celui de la démonstration de l'implication (1)⇒(5) montre que (quitte-à-modifier C) :

$$\left| \int_{|z-a|=|p^n|} \chi_2 \chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j} \right| \leq C \left| p^{n(k-1-j)} \right|.$$

Si on a $0 \leq j \leq k - 2$, alors on a $|p^{(n+1)(k-1-j)}| \leq |p^{n(k-1-j)}|$. En écrivant $\{|z - a| \geq |p^n|\} = \{|z - a| \geq |p^{n+1}|\} \backslash \{|z - a| = |p^{n+1}|\}$, et en utilisant (1), on voit que la condition (2) pour $a, j, (n + 1)$ implique (2) pour a, j, n, quitte-à-modifier C. Comme on a (2) pour tout a, $0 \leq j \leq k - 2$ et $n \geq 0$, on peut en déduire (2) pour tout a, $0 \leq j \leq k - 2$ et $n \in \mathbb{Z}$.

De même, si on a $j \geq k-1$, alors on a $|p^{(n-1)(k-1-j)}| \leq |p^{n(k-1-j)}|$, donc en écrivant $\{|z - a| \geq |p^n|\} = \{|z - a| \geq |p^{(n-1)}|\} \cup \{|z - a| = |p^n|\}$, et en utilisant (1), on voit que (2) pour $a, j, (n-1)$ implique (2) pour a, j, n. Donc

(2) pour tout a, $j \geq k-1$ et $n \in \mathbb{Z}$ se déduit de (2) pour tout a, $j \geq k-1$ et n suffisament petit. On peut alors supposer que l'on a $n \leq 0$ et $|a| \leq |p^n|$. Dans ce cas, on peut encore supposer que a est égal à 0. Or cela est contenu dans l'hypothèse de l'énoncé. $\square$

Par le lemme précédent, il suffit de vérifier les conditions dans le lemme.

Lemme 3.3.3. *Supposant (9), on a (1) pour tout disque $\{|z-a| \leq |p^n|\}$ qui ne rencontre pas $p\mathbb{Z}_p$ et tout $j \geq 0$.*

Démonstration Pour chaque j, il existe des entiers (nombres combinatoires) λ_i, tels que l'on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \geq j} \lambda_i a^{-i} z^{k-2} (\frac{1}{z} - a)^i \\
= \;& z^{k-2}(1 - \frac{1}{az})^j (az)^{j-k+2} \\
= \;& a^{j-k+2}(z - \frac{1}{a})^j,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{|z-\frac{1}{a}| \leq |\frac{p^n}{a^2}|} (z - \frac{1}{a})^j \right| \\
= \;& \left| a^{-j+k-2} \sum_{i \geq j} \lambda_i a^{-i} \int_{|z-\frac{1}{a}| \leq |\frac{p^n}{a^2}|} z^{k-2} (\frac{1}{z} - a)^i \right| \\
\leq \;& \left| a^{-j+k-2} \right| \max_{i \geq j} C \, |a|^{-i} \left| a^k p^{n(i-k+1)} \right| \\
(i=j) \quad = \;& C \left| \frac{p^n}{a^2} \right|^{j-k+1}.
\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que le disque $\{|z - \frac{1}{a}| \leq |\frac{p^n}{a^2}|\}$ parcourt tous les disques dans $\mathbb{Q}_p$ qui ne rencontrent pas $p\mathbb{Z}_p$ lorsque a, j, n parcourent tous les choix dans (9). Mais cela est évident. $\square$

Remarquons que (3) est exactement (1) pour tout disque $\{|z-a| \leq |p^n|\}$ contenu dans $p\mathbb{Z}_p$ et tout $j \geq 0$, et que (4) est exactement (2) pour $a = 0$ et tout $j \geq 0, n \leq 0$. Par lemme 3.3.2, il reste à vérifier :

– (1) pour $a = 0$ et $0 \leq j \leq k-2$ et $n \leq 0$,

– (2) pour tout a, $0 \leq j \leq k-2$ et $n \geq 0$.

Grâce aux conditions (7), (8), il est équivalent de vérifier les deux conditions suivantes (quitte-à-modifier la constante C) :

$$\left| \int_{|z|>|p^n|} z^j \right| \leq C \left| p^{n(j-k+1)} \right|, \forall 0 \leq j \leq k-2, n \leq 0, \quad (10)$$

$$\left| \int_{|z-a|<|p^n|} \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j} \right| \leq C \left| p^{n(k-1-j)} \right|, \forall 0 \leq j \leq k-2, n \geq 0. \quad (11)$$

Lemme 3.3.4. *Il existe une constante C, telle que :*

$$\left\| z^j \mathbb{1}_{\{|z| \geq |p^n|\}} \right\|_V \leq C \left| p^{n(j-k+1)} \right|, \forall 0 \leq j \leq k-2, n \leq 0,$$

où $|| \cdot ||_V$ est la norme de V.

Démonstration Par la définition de la norme de V, on a :

$$\begin{aligned} & \left\| z^j \mathbb{1}_{\{|z| \geq |p^n|\}} \right\|_V \\ = & \left\| \chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{-j} \mathbb{1}_{\{|z| \leq |p^{-n}|\}} \right\| \\ = & \left| \chi_2\chi_1^{-1}(p^{-n}) p^{nj} \right| \cdot \left\| f_j(z/p^{-n}) \mathbb{1}_{\{|z| \leq |p^{-n}|\}} \right\| \\ = & \left| p^{n(-2k+2+j)} \right| \cdot \left\| f_j(z/p^{-n}) \mathbb{1}_{\{|z| \leq |p^{-n}|\}} \right\|, \end{aligned}$$

où $\| \cdot \|$ est la norme de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$ et on a posé $f_j : z \mapsto \chi_2\chi_1^{-1}(z) z^{-j}$.

Si on note $C := \max_{0 \leq j \leq k-2} \|f_j\|$, alors par lemme 3.2.2, on a :

$$\left\| f_j(z/p^{-n}) \mathbb{1}_{\{|z| \leq |p^{-n}|\}} \right\| \leq C \left| p^{n(k-1)} \right|,$$

d'où :

$$\left\| z^j \mathbb{1}_{\{|z| \geq |p^n|\}} \right\|_V \leq C \left| p^{n(j-k+1)} \right|.$$

□

Lemme 3.3.5. *Il existe une constante C, telle que :*

$$\left\| \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j} \mathbb{1}_{\{|z-a| \leq |p^n|\}} \right\|_V \leq C \left| p^{n(k-1-j)} \right|, \forall a \in \mathbb{Q}_p, 0 \leq j \leq k-2, n \geq 1.$$

Démonstration On sépare deux cas.

Premier cas : a est dans $p\mathbb{Z}_p$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
& \left\|\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j}\mathbb{1}_{\{|z-a|\leq|p^n|\}}\right\|_V \\
= & \left\|\chi_2\chi_1^{-1}(pz-a)(pz-a)^{-j}\mathbb{1}_{\{|z-\frac{a}{p}|\leq|p^{n-1}|\}}\right\| \\
= & \left\|\chi_2\chi_1^{-1}(pz)(pz)^{-j}\mathbb{1}_{\{|z|\leq|p^{n-1}|\}}\right\|
\end{aligned}$$

par la définition de la norme de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$. Si on note $f_j : z \mapsto \chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{-j}$ et $C := \max\limits_{0\leq j\leq k-2}\|f_j\|$, alors par lemme 3.2.2, on a :

$$\begin{aligned}
& \left\|\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j}\mathbb{1}_{\{|z-a|\leq|p^n|\}}\right\|_V \\
\leq & \left|\chi_2\chi_1^{-1}(p^n)p^{-nj}\right| \cdot \left|p^{(n-1)(1-k)}\right| \cdot C \\
\leq & \ C\left|p^{n(k-1-j)}\right|.
\end{aligned}$$

Deuxième cas : a n'est pas dans $p\mathbb{Z}_p$. On a alors :

$$\begin{aligned}
& \left\|\chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{-j}\mathbb{1}_{\{|z-a|\leq|p^n|\}}\right\|_V \\
= & \left\|\chi_2\chi_1^{-1}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(\frac{1}{z}-a)(\frac{1}{z}-a)^{-j}\mathbb{1}_{\{|\frac{1}{z}-a|\leq|p^n|\}}\right\| \\
= & \left|\chi_2\chi_1^{-1}(a)a^{-j}\right| \cdot \left\|\chi_2\chi_1^{-1}(z-\frac{1}{a})(z-\frac{1}{a})^{-j}z^j\mathbb{1}_{\{|z-\frac{1}{a}|\leq|\frac{p^n}{a^2}|\}}\right\| \\
\leq & \left|\chi_2\chi_1^{-1}(a)a^{-j}\right| \max_{0\leq i\leq j}|a|^{-i}\left\|\chi_2\chi_1^{-1}(z-\frac{1}{a})(z-\frac{1}{a})^{-i}\mathbb{1}_{\{|z-\frac{1}{a}|\leq|\frac{p^n}{a^2}|\}}\right\| \\
= & \left|\chi_2\chi_1^{-1}(a)a^{-j}\right| \max_{0\leq i\leq j}|a|^{-i}\left\|\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{-i}\mathbb{1}_{\{|z|\leq|\frac{p^n}{a^2}|\}}\right\| \\
\leq & \left|\chi_2\chi_1^{-1}(a)a^{-j}\right| \max_{0\leq i\leq j}|a|^{-i}\left|\chi_2\chi_1^{-1}(\frac{p^n}{a^2})(\frac{p^n}{a^2})^{-i}\right| \cdot \left|\frac{p^n}{a^2}\right|^{1-k} C \\
(i=j) \quad = & \ C\left|p^{n(k-1-j)}\right|.
\end{aligned}$$

□

En utilisant la norme de la fonctionelle linéaire continue μ (vue comme élément dans le dual fort du Banach V), on déduit (10) et (11) de lemme 3.3.4 et lemme 3.3.5, respectivement.

On a ainsi identifié $\hat{H}'$ et $(V/W)'$ dans H', et au même temps leurs boules unités. En particulier, comme les injections $\hat{H}' \to H'$ et $(V/W)' \to H'$ sont G-équivariantes, l'espace $(V/W)'$ est un G-Banach unitaire, ainsi $(V/W)''$ l'est aussi.

Comme l'application canonique $V/W \hookrightarrow (V/W)''$ est une immersion fermée (et même une isométrie vers l'image par corollaire A.2.2) G-équivariante, V/W est aussi un G-Banach unitaire. Par la définition du complété unitaire universel, l'application $H \to V/W$ induit un morphisme $\hat{H} \to V/W$, qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr] \arrow[dr] & & V/W \\ & \hat{H} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

d'où un diagramme commutatif sur leur duaux forts :

$$\begin{tikzcd} H' & & (V/W)' \arrow[ll] \arrow[dl] \\ & \hat{H}' \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Or, par ce qui précède, le morphisme $(V/W)' \to \hat{H}'$ est un isomorphisme topologique, donc par corollaire $A.2.3$, le morphisme $\hat{H} \to V/W$ est un isomorphisme topologique G-équivariant.

Il reste à montrer que l'espace V/W est de longueur topologique 2 et que l'on a une suite exacte non scindée :

$$0 \to \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2 \otimes \eta_1 \to V/W \to \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1} \to 0.$$

Proposition 3.3.1. *Le complété unitaire universel de* $\mathrm{Ind}^{an}\chi_1 z^{k-1} \otimes \chi_2 z^{1-k}$ *(*$=$ $\mathrm{Ind}^{an}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}$*) s'identifie à* $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}$ *via l'injection canonique. C'est un G-Banach unitaire admissible et topologiquement irréductible.*

Démonstration On note T l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans L comme dans la section 3.1, $\mathcal{O}_T$ les fonctions dans T de norme ≤ 1, $T' := \{f \in \mathrm{Ind}^{an}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1} : supp(f) \subseteq \mathbb{Z}_p, f(z)|_{\mathbb{Z}_p} \in T\}$ et $\mathcal{O}_{T'}$ le sous-$\mathcal{O}_L$-module de T' correspondant à $\mathcal{O}_T$ via l'isomorphisme évident $T \simeq T'$, le même argument que dans la section 3.1 montre que le complété unitaire universel de $\mathrm{Ind}^{an}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}$ s'identifie à son complété par rapport au réseau $R' := \sum_{g\in G} g\mathcal{O}_{T'}$.

Par ailleurs, on a l'injection continue canonique $\mathrm{Ind}^{an}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1} \to \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}$. Comme les caractères $\eta_1\varepsilon$ et $\eta_2\varepsilon^{-1}$ sont entiers, le même argument que dans la proposition 2.2.1 montre que $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}$ est un G-Banach unitaire, et on voit que R' est exactement les fonctions f dans $\mathrm{Ind}^{an}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}$ telles que $\|f\| \leq 1$, où $\|\cdot\|$ est la norme de $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}$. Ainsi le complété de $\mathrm{Ind}^{an}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}$ par rapport à R' s'identifie à $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}$, car $\mathrm{Ind}^{an}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}$ est dense dans $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}$.

L'admissibilité et l'irréductiblité se montrent exactement de même façon que dans la démonstration de la proposition 2.2.1, en notant que $\eta_1\varepsilon \neq \eta_2\varepsilon^{-1}$. $\square$

Notons que les fonctions dans $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$ sont $k-1$ fois dérivables de $(k-1)$-ième dérivée continue.

Lemme 3.3.6. *Soit $f : \mathbb{Q}_p \to L$ une fonction $k-1$ fois dérivable. Alors on a :*

$$(z^{k-2}f(1/z))^{(k-1)} = (-1)^{k-1}z^{-k}f^{(k-1)}(1/z), \forall z \in \mathbb{Q}_p\backslash\{0\}.$$

Démonstration Pour une telle fonction f et un $z \in \mathbb{Q}_p$, on pose $L(f,z) := (z^{k-2}f(1/z))^{(k-1)} - (-1)^{k-1}z^{-k}f^{(k-1)}(1/z)$. En utilisant les lois de dérivation, on voit que $L(f,z)$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire d'un nombre fini de terme $z^i f^{(j)}(1/z)$, $i,j \in \mathbb{Z}$. C'est-à-dire, il existe un nombre fini d'entiers $a_{i,j}$, tels que $L(f,z)$ est égal à $\sum a_{i,j}z^i f^{(j)}(1/z)$.

Or, si f est un polynôme, on écrit $f = \sum_{n\geq 0}\lambda_n z^n$, alors par un calcul formel, on voit que $L(f,z) = 0$. Quand f parcourt tout polynôme et z parcourt $\mathbb{Q}_p\backslash\{0\}$, on obtient des équations en $a_{i,j}$: $\sum z^i f^{(j)}(1/z)a_{i,j} = 0$. Il est évident que ce système d'équations est de rang maximal (par exemple, on prend $f = z^n$ et z arbitraire), dont on peut conclure que les $a_{i,j}$ sont nuls. On a ainsi obtenu la formule voulue. $\square$

Proposition 3.3.2. *On a une surjection continue G-équivariante $\delta : \mathrm{Ind}^{an}\chi_1\otimes\chi_2 \to \mathrm{Ind}^{an}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}$, qui à une fonction $f : \mathbb{Q}_p \to L$ associe sa $(k-1)$-ième dérivée $f^{(k-1)}$.*

Démonstration Soit f une fonction dans $\mathrm{Ind}^{an}\chi_1\otimes\chi_2$. On note f_1 (resp. f_2) la fonction localement analytique de $\mathbb{Z}_p$ vers L qui à z associe $f(pz)$ (resp. $\chi_2\chi_1^{-1}(z)f(1/z)$). On a :

$$f_1^{(k-1)}(z)=p^{k-1}f^{(k-1)}(pz).$$

Par ailleurs, grâce au lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned}f_2^{(k-1)}(z) &= (\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{2-k})(z^{k-2}f(1/z))^{(k-1)}\\ &= (\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{2-k})(-1)^{k-1}z^{-k}f^{(k-1)}(1/z)\\ &= (-1)^{k-1}(\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{2-2k})f^{(k-1)}(1/z).\end{aligned}$$

On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}^{an}\chi_1\otimes\chi_2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f\mapsto(f_1,f_2)"', "\sim"] & \mathrm{Ind}^{an}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k} \arrow[d, "\sim"', "f\mapsto(f_1,f_2)"] \\
\mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p,L)^2 \arrow[r, "(f_1,f_2)\mapsto(p^{k-1}f_1^{(k-1)},(-1)^{k-1}f_2^{(k-1)})"] & \mathcal{C}^{an}(\mathbb{Z}_p,L)^2
\end{tikzcd}$$

Comme l'application $g\mapsto g^{(k-1)}$ est une surjection continue de l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ vers lui-même, on voit que l'application δ est une surjection continue de $\mathrm{Ind}^{an}\chi_1\otimes\chi_2$ vers $\mathrm{Ind}^{an}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}$.

Il reste à montrer que δ est G-équivariante. Pour cela, il suffit de montrer que $\delta(gf)=g\delta(f)$ pour les matrices $g=\begin{pmatrix}1&-b\\0&1\end{pmatrix}$ ($\forall b\in\mathbb{Q}_p$), $\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix}$ ($\forall d\in\mathbb{Q}_p^*$), $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. La vérification pour les deux premiers cas est évidente, et pour le dernier cas, il suffit d'utiliser le calcul ci-dessus. $\square$

Par la proposition précédente et la définition du complété unitaire universel, l'application δ induit une application $\Delta: V/W\to\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}$. Par continuité, Δ est exactement l'application $f\mapsto f^{(k-1)}$, qui est surjective par [4] théorème 81.3.

Il est évident que le noyau de Δ est égal à N/W, où N est le sous-espace fermé des fonctions de $(k-1)$-ième dérivée nulle. Montrons d'abord que cet espace est non nul.

Lemme 3.3.7. *Il n'existe pas de morphisme non nul de* $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}$ *vers* V/W*.*

Démonstration Supposons qu'il en existe un. Quand on prend les vecteurs localement analytiques des espaces, on obtient un morphisme non nul de $\mathrm{Ind}^{an}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}$ vers $\mathrm{Ind}^{an}\chi_1 \otimes \chi_2$. Or, par [8] propositoin 6.2, un tel morphisme ne peut pas exister, en notant que $\chi_1 \neq \eta_1\varepsilon$ et que $c(\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}) = k > 0$ (attention : il y a une incohérence de notation ici). □

En particulier, l'application Δ n'est pas un isomorphisme, donc le noyau N/W est non nul. Comme N/W et un G-Banach unitaire, par proposition 2.2.1, l'application naturelle $\psi : \mathrm{Ind}^{lp}\chi_1 \otimes \chi_2 \to N/W$ induit une application $\phi : \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2 \otimes \eta_1 \to N/W$.

Par le résultat d'analyse p-adique disant que les fonctions localement polynomiales de degré $\leq k-2$ sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans L sont denses dans le sous-espace de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$ des fonctions de $(k-1)$-ième dérivée nulle, on voit que l'application ψ est d'image dense, donc ϕ l'est aussi. En particulier, ϕ n'est pas nulle. Par proposition 2.2.1, le noyau de ϕ est égal à 0, i.e., ϕ est injective.

Lemme 3.3.8. *Il n'y a qu'une norme invariante par* G *à équivalence près sur* $\mathrm{Ind}^{lp}\chi_1 \otimes \chi_2$*.*

Démonstration [2] corollaire 5.3.4. □

Par le lemme précédent, l'application ϕ est une immersion fermée, ainsi est un isomorphisme, car ϕ est d'image dense. On a alors la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_2 \otimes \eta_1 \to V/W \to \mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1} \to 0.$$

Grâce aux propositions 2.2.1 et 3.3.1, on sait que V/W est un G-Banach admissible de longueur topologique 2.

Enfin, si la suite ci-dessus est scindée, alors il y a un morphisme non nul de $\mathrm{Ind}^{\mathcal{C}^0}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}$ vers V/W, ce qui contredit lemme 3.3.7.

A La structure des espaces de Banach sur un corps de valuation discrète complet

On rappelle ici un théorème de [7] §10 qui décrit la structure des espaces de Banach sur un corps de valuation discrète complet. On donne aussi une amélioration partielle de [7] proposition 10.5.

On fixe un corps de valuation discrète complet K (e.g. le corps L dans l'article). Dans cet appendice, tout espace de Banach V est sur le corps K, et est considéré comme muni d'une certaine norme $\|\cdot\|$ telle que $\|V\|$ est inclus dans $|K|$.

A.1 Théorème de structure

Pour un ensemble X, on note $c(X)$ l'espace des applications $\phi : X \to K$ telles que pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in X : |\phi(x)| \geq \epsilon\}$ est fini. Cet espace est muni de la norme $\|\phi\| := \sup_{x\in X} |\phi(x)|$, qui en fait un espace de Banach (cf. [7] §3). Pour chaque $x \in X$, on note 1_x la fonction caractéristique de x, vue comme un élément dans $c(X)$.

L'espace $c(X)$ posède la propriété universelle suivante : si V est un espace de Banach sur K, et α est une application de X dans V telle que l'image de α est borné dans V, alors il existe une unique application linéaire continue $f : c(X) \to V$, telle que $f(1_x) = \alpha(x)$ pour tout $x \in X$ (cf. [7] §10).

On a le théorème de structure :

Théorème A.1.1. *Pour chaque espace de Banach V, il existe un ensemble X, tel que V est isométriquement isomorphe à $c(X)$.*

Démonstration [7] proposition 10.1 et remarque 10.2. □

Soient V un espace de Banach et U un sous-espace fermé de V. L'espace U (resp. V/U) est naturellement un espace de Banach, muni de la norme induite par celle de V (resp. de la norme $\|\overline{v}\| := \inf_{v'\in\overline{v}} \|v'\|$). Si U et W sont deux espaces de Banach, la somme directe $U \oplus W$ munie de la norme $\|(u, w)\| := \sup(\|u\|, \|w\|)$ est encore un espace de Banach.

Théorème A.1.2. *Il existe un sous-espace W de V, tel que l'application canonique $U \oplus W \to V$ est un isomorphisme isométrique.*

Démonstration On applique théorème A.1.1 à l'espace V/U. Il existe alors un ensemble X et un isomorphisme isométrique $g : V/U \to c(X)$. Pour chaque $x \in X$, la classe $g^{-1}(1_x)$ est de norme 1 dans V/U, donc il existe un représentant v_x de $g^{-1}(1_x)$ tel que $\|v_x\| = 1$, car la valuation de K est discrète. On fixe pour chaque x un tel v_x. Par la propriété universelle de $c(X)$, il existe alors une application linéaire continue $f : c(X) \to V$, telle que $f(1_x) = v_x$ pour tout $x \in X$.

On a alors $g(\overline{f(1_x)}) = 1_x$ pour tout $x \in X$, ainsi l'application $\phi \mapsto g(\overline{f(\phi)})$ est l'identité sur $c(X)$, car l'espace vectoriel engendré par les 1_x est dense dans $c(X)$.

Pour chaque $\phi = \sum\limits_{x\in X} a_x 1_x$, on a :

$$\|f(\phi)\| \leq \sup_{x\in X} |a_x| \cdot \|f(1_x)\| = \sup_{x\in X} |a_x| = \|\phi\|.$$

Par la définition de la norme de V/U, on a : $\|f(\phi)\| \geq \|\overline{f(\phi)}\|$. Comme g est une isométrie, on a : $\|\overline{f(\phi)}\| = \|g(\overline{f(\phi)})\| = \|\phi\|$. Il y a donc l'inégalité :

$$\|\phi\| = \|\overline{f(\phi)}\| \leq \|f(\phi)\| \leq \|\phi\|,$$

ce qui signifie que l'on a égalité par tout. En particulier, f est une isométrie, donc on peut identifier $c(X)$ à un sous espace fermé de V.

On va montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} s : U \oplus c(X) & \to & V \\ (u, \phi) & \mapsto & u + f(\phi) \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique. En prenant $W = f(c(X))$, cela terminera la démonstration.

Soient u dans U et ϕ dans $c(X)$. Comme les applications $U \to V$ et $f : c(X) \to V$ sont des isométries, on a clairement $\|u + f(\phi)\| \leq \sup(\|u\|, \|\phi\|)$, et on a égalité sauf si $\|u\| = \|\phi\|$. Or, par la définition de la norme de V/U, on a : $\|u + f(\phi)\| \geq \|\overline{f(\phi)}\| = \|\phi\|$, donc dans ce dernier cas on a aussi égalité. Cela montre que s est une isométrie.

Il reste à montrer que s est surjective. Soit v dans V. On pose $\phi = g(\overline{v}) \in c(X)$ et $u = v - f(\phi)$. Il suffit de montrer que u est dans U. En effet, on a : $g(\overline{u}) = g(\overline{v}) - g(\overline{f(\phi)}) = g(\overline{v}) - \phi = 0$, donc $\overline{u} = 0$, i.e., u est dans U. $\square$

Corollaire A.1.1. *Si V est un espace de Banach et U en est un sous-espace fermé, alors il existe un ensemble X, un sous-ensemble Y de X et un isomorphisme isométrique $g : V \to c(X)$, tels que la restriction de g à U est un isomorphisme isométrique $g|_U : U \to c(Y)$, où $c(Y)$ est naturellement vu comme sous-espace fermé de $c(X)$.*

Démonstration On choisit W comme dans le théorème. On fixe des isomorphismes isométriques $g' : U \to c(Y)$ et $g'' : W \to c(Z)$. On pose X la réunion disjointe de Y et Z, alors $c(X)$ est naturellement isométriquement isomorphe à $c(Y) \oplus c(Z)$. En composant avec les isomorphismes g' et g'', et puis l'isomorphisme $V \to U \oplus W$, on obtient l'isomorphisme g voulu. $\square$

A.2 Conséquences

On note $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de K, π une uniformisante fixée de K et k le corps résiduel de K. Si V est un espace de Banach sur K, on note V_0 le sous-$\mathcal{O}$-module de V des éléments de norme ≤ 1 et $\widetilde{V}$ la réduction $V_0/\pi V_0 = V_0 \otimes_{\mathcal{O}} k$.

Soient V un espace de Banach et U un sous-espace fermé de V. Alors $\widetilde{U}$ peut être vu comme un sous-espace de $\widetilde{V}$.

Corollaire A.2.1. *Si $\widetilde{V}$ est de dimension finie sur k, alors V est de même dimension sur K.*

Si U est propre dans V, alors $\widetilde{U}$ est propre dans $\widetilde{V}$.

Démonstration Il suffit de noter que, pour un ensemble X, l'espace $\widetilde{c(X)}$ s'identifie au k-espace vectoriel $k^{(X)}$. $\square$

Donnons un autre corollaire du théorème :

Corollaire A.2.2. *Si V est un espace de Banach, alors l'application canonique $V \to V''$ est une isométrie vers l'image. En particulier, c'est une immersion fermée.*

Démonstration Soit v un élément non nul de V. On note ℓ_v l'image de v dans V''. Il est évident que l'on a : $\|\ell_v\| \leq \|v\|$. D'autre part, par théorème A.1.2, il existe un sous-espace fermé W de V, tel que l'application canonique $Kv \oplus W \to V$ est une isométrie. On voit alors que la forme linéaire $\mu : (\lambda v, w) \mapsto \lambda$ vérifie : $\|\mu\| \leq 1/\|v\|$ et $\mu(v) = 1$. On a donc $\|\ell_v\| \geq \|\ell_v(\mu)\|/\|\mu\| \geq \|v\|$. □

Corollaire A.2.3. *Soient V, W deux espaces de Banach et $f : V \to W$ une application linéaire continue de V vers W. Si l'application duale $f' : W' \to V'$ est un isomorphisme topologique d'espaces de Banach, alors f l'est aussi.*

Démonstration Par le théorème de continuité de l'inverse de Banach ([7] corollaire 8.7), il suffit de montrer que f est une bijection. Comme l'application duale f' est une bijection, on sait que f est injective et que l'image de f est dense dans W. Il suffit alors de montrer que $f(V)$ est fermé dans W. En effet, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ V'' \arrow[r, "f''"] & W'' \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des immersions fermées par le corollaire précédent, et l'application f'' est un isomorphisme topologique, car f' l'est. On en conclut que $f(V)$ est fermé dans W. □

Références

[1] C. Breuil & M. Emerton, *Représentations p-adiques ordinaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global*, à paraître à **Astérisque**.

[2] L. Berger & C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$*, à paraître à **Astérisque**.

[3] M. Emerton, *p-adic L-functions and unitairy completions of representations of p-adic reductive groups*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 2, 353-392.

[4] W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus*, Cambridge University Press, 1984.

[5] C. Breuil, *Invariant L et série spéciale p-adique*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 37, 2004, 559-610.

[6] P. Schneider, J. Teitelbaum, *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127 (2002), 359-380.

[7] P. Schneider, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer-Verlag, 2001.

[8] P. Schneider, J. Teitelbaum, *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to* GL_2, J. Amer. Math. Soc. 15, 2002, 443-468.

[9] P. Schneider, J. Teitelbaum, *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*, Inv. Math. 153, 2003, 145-196.

[10] P. Schneider, J. Teitelbaum, *$U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations* (With an appendix by D. Prasad), Representation Theory 5, 2001, 111-128.

[11] L. Barthel, R. Livne, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke. Math. J. 75 (1994), no. 2, 261-292.