A propos d'une conjecture de Langlands modulaire

Marie-France Vignéras

sec *Introduction*

Dans cet article, nous allons étudier le comportement des conjectures locales de Deligne-Langlands par réduction modulo un nombre premier l, dans quelques cas modestes.

On note R un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique quelconque, F un corps commutatif local non archimédien de corps résiduel $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p, F_s une clôture algébrique séparable de F, de corps résiduel $\overline{\mathbf{F}}_q$, W_F le *groupe de Weil* de F_s/F. Admettant les conjectures locales lorsque R est de caractéristique nulle, nous aimerions les étendre au cas où R est de caractéristique $l > 0$.

Les trois points fondamentaux de ces conjectures lorsque R est de caractéristique nulle, sont:

1) l'existence d'une bijection (respectant les fonctions L et ε de paires) entre les représentations *irréductibles* lisses de W_F sur R de dimension n et les représentations irréducibles *supercuspidales* lisses de $GL(n, F)$ sur R,

2) la classification des modules simples de l'*algèbre de Hecke affine* de $GL(n, F)$ sur R,

3) la classification de *toutes* les représentations irréductibles lisses de $GL(n, F)$ sur R à partir de 1) et de 2).

Note : 2) et 3) ont été démontrés par Zelevinski [Z1], 1) n'est pas connu en général quoique de très nombreux cas le soient; pour F de caractéristique $p > 0$, Laumon, Rapoport, et Stuhler [LRS]. Pour F de caractéristique 0, si $n = 2$ (Kutzko), $n = 3$ [He], et plus généralement si n est un nombre premier à p [Moy], ou si $n = p$ [KM], des bijections naturelles comme en 1) existent, il n'est cependant pas connu (sauf si $n = 2$) qu'elles conservent les fonctions L et ε de toutes les paires souhaitées. 2) est équivalent à la classification des représentations irréductibles lisses de $GL(n, F)$ sur R ayant un vecteur non nul invariant par le groupe d'Iwahori.

Supposons que R est de caractéristique $l > 0$. Dans cet article, nous allons donner deux résultats:

4) *La réduction modulo l des représentations irréductibles lisses l-entières de W_F sur R de dimension n;* voir (1.21)*.

5) *La classification des modules simples de l'algèbre de Hecke affine de $GL(n,F)$ sur R, dans le cas générique, ou régulier, ou si $q=1$ dans R^*, ou si $n=2$, ou si $n=3$;* voir (2.5).

On vérifiera que *1)* ** *est vrai dans le cas modérément ramifié, en toute caractéristique $l \neq p$.* Nous allons donner une preuve *élémentaire* et sans élégance de 5) (en manquant de peu le cas $n=4$). La raison de publier cette classification inachevée et sans élégance est la comparaison avec celle de Grojnowski [Gro] lorsque $R = \mathbf{C}$, et q une racine de l'unité d'ordre > 1, et celle de Dipper et James pour $q=1$ dans R^* [DJ2]. On est alors amené à la conjecture suivante , qui tient lieu de 2) en caractéristique > 0.

Conjecture. *La classification des $H_R(n,q)$-modules simples ne dépend de (R,q) que via l'ordre $\varepsilon(q,R^*)$ de q dans R^*.*

Les $H_R(n,q)$-modules simples classifient les représentations irréductibles de *support cuspidal égal au support supercuspidal*,

$$\sigma = \chi_1 + \ldots + \chi_n,$$

pour des caractères non ramifiés $\chi_1, \ldots \chi_n$. Ils sont classés par certains "bons" (σ, N). Les (σ, N) qui ne sont pas bons, correspondent aux représentations de *support supercuspidal σ différent du support cuspidal* dans tous les cas que nous connaissons. L'analogue de 3) dans le cas modulaire est encore inconnu, même conjecturalement. Ceci provient de notre ignorance en ce qui concerne la classification des représentations irréductibles de *support cuspidal différent de leur support supercuspidal.*

On note $\nu : W_F \to R^*$ le caractère non ramifié usuel (1.1). En admettant 1) pour $l \neq p$, dans le cas générique ou régulier ou si $n=2$, (cas où l'on sait résoudre 2) et 3)), on obtient la conjecture de Deligne-Langlands, à savoir:

6) *Soit $n > 0$ un entier. Les classes d'isomorphisme des paires (σ, N) formées*

(a) d'une représentation semi-simple (V, σ) de dimension n de W_F sur R,

---

* Nous n'avions que le cas modérément ramifié, mais Henniart a vu que le résultat était général.

** On a conjecturé en [Vig2] que 1) est vrai pour $l \neq p$.

(b) d'un endomorphisme nilpotent $N \in \mathrm{End}_R V$ *tel que* $\sigma(w)N\sigma(w)^{-1} = \nu(w)N$,
sont en bijection avec $\mathrm{Irr}_R\, GL(n,F)$.

Les représentations supercuspidales de $GL(n,F)$ doivent être en bijection avec les représentations irréductibles de W_F de dimension n ($N = 0$). La représentation semi-simple σ doit correspondre au support supercuspidal de la représentation de $GL(n,F)$ associée à une paire (σ, N). Les représentations génériques de $GL(n,F)$ doivent être en bijection avec les paires $(\sigma, 0)$. La bijection pour $\overline{\mathbf{Q}}_l$ doit respecter les représentations l-entières, et être compatible avec la réduction modulo l [Vig2], dans un sens qui devra être précisé. Les représentations cuspidales non supercuspidales de $GL(n,F)$ sur $\overline{\mathbf{F}}_l$ doivent être en bijection avec les σ qui se relèvent en des représentations irréductibles sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$.

En 1, nous démontrons 4); en 2, nous donnons une démonstration *élémentaire* de 5); en 3, nous démontrons 6), avec les réserves indiquées ci-dessus.

Ces résultats ont été exposés en 1993 à l'Université de Tel-Aviv, en 1994 au C.I.R.M. et à l'E.M.I.. L'auteur remercie particulièrement J. Bernstein, D. Barbasch, G. Henniart, I. Grojnowski, et W. Zink, qui l'ont beaucoup aidée par leurs travaux ou leurs remarques constructives.

sec 1. *Représentationsmodulairesde*W_F.

Toutes les représentations de W_F seront supposées de dimension finie, et triviales sur un sous-groupe ouvert. On note $\mathrm{Irr}_R\, W_F$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de W_F de dimension finie, à coefficients dans R.

1.1 Rappels sur W_F.

On refère à [Se1] ou à [Fr], [De], [Ta]. On fixe un isomorphisme

$$v_F : W_F/I_F \to \mathbf{Z}$$

du quotient de W_F par le *groupe d'inertie* I_F. Le groupe d'inertie est un groupe profini, qui admet un unique pro-p-groupe de Sylow P_F, le *groupe de ramification sauvage*, de quotient

$$I_F/P_F \simeq \varprojlim \mathbf{F}^*_{q^n}$$

pour le système projectif fourni par les normes. Le groupe de Weil W_F est le produit semi-direct de P_F et de W_F/P_F ([Iw] Lemma 4 Sect 1, cette propriété m'a été signalée par W. Zink).

La théorie du corps de classes fournit un isomorphisme de F^* sur le quotient abélien séparé maximal de W_F, compatible avec les décompositions de F^*,

$$F^* \simeq p_F^{\mathbf{Z}}\ O_F^*, \quad O_F^* \ \simeq \ \mathbf{F}_q^*\ (1 + P_F),$$

où p_F est une uniformisante de F, $\mathbf{F}_q^*$ est identifié avec le groupe des racines de l'unité dans F^* d'ordre premier à q, et P_F est l'idéal maximal de l'anneau des entiers O_F de F.

Si E/F est une extension finie, la sous-extension *modérément ramifiée maximale* $E_{mr} = E^{P_F}$ est l'ensemble des éléments de E invariants par P_F, et la sous-extension *non ramifiée maximale* $E_{nr} = E^{I_F}$ est l'ensemble des éléments de E invariants par I_F.

Une extension finie non ramifiée est cyclique, déterminée par son degré sur F; on note F_f/F l'extension non ramifiée de degré f.

Supposons E/F galoisienne. Alors E_{mr}/F est galoisienne [Fr 8 th.1], et E_{mr}/E_{nr} est cyclique, d'ordre e premierà p, égal à l'indice de ramification e de E_{mr}/F, divisant $q^f - 1$, si $E_{nr} = F_f$. il existe $(q^f - 1)/e$ extensions modérément ramifiées galoisiennes d'indice de ramification e, et de degré résiduel f non isomorphes; elles sont de la forme $F_f(c^{1/e})$ où $c \in F_f$ est une uniformisante, avec $F_f(c^{1/e}) = F_f(c'^{1/e})$ si et seulement si $c' \in c(F_f^*)^e$ [Fr 8 prop1].

Le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ admet une filtration en sous-groupes

$$1 \subset G_1 \subset G_2 \subset G$$

où $G_1 = \mathrm{Gal}(E/E_{mr})$ est le p-groupe de ramification sauvage de l'extension E/F, où $G_2 = \mathrm{Gal}(E/E_{nr})$, donc $G_2/G_1 = \mathrm{Gal}(E_{mr}/E_{nr})$ est cyclique d'ordre premier à p, et $G/G_2 = \mathrm{Gal}(E_{nr}/F)$ est cyclique.

1.2 Rappels sur les représentations de W_F.

L'isomorphisme de la théorie du corps de classes permet d' identifier les *caractères* de W_F (représentations de dimension 1) et ceux de F^*. Si E/F est une extension finie, la *restriction* d'un caractère de W_F à W_E correspond à la *norme* $E^* \to F^*$.

Une représentation de W_F est dite *non ramifiée* si elle est triviale sur I_F. Si elle est irréductible, c'est un caractère car $v_F : W_F/I_F \to \mathbf{Z}$ est un isomorphisme. Le groupe $\Psi_R F^*$ des *caractères non ramifiés* de W_F sur R est isomorphe à R^* par l'application qui identifie $r \in R^*$ et le caractère non ramifié

$$\nu_r(w) = r^{v_F(w)}, \quad w \in W_F.$$

On note encore ν_r le caractère non ramifié (trivial sur O_F^*) de F^* correspondant.

Si E/F est une extension finie, la restriction $\Psi_R F^* \to \Psi_R E^*$ correspond à l'élévation à la puissance $f : r \to r^f$, où f est le degré résiduel de E/F; elle est *surjective* car R est algébriquement clos. Elle est *bijective* si E/F est une extension totalement ramifiée.

Le groupe de Weil W_F est dense dans le groupe de Galois Gal_F de F_s/F. Une représentation de W_F qui se prolonge à Gal_F est dite *galoisienne.* Le noyau d'une représentation irréductible galoisienne est un sous-groupe d'indice fini distingué de Gal_F, donc de la forme Gal_E pour une extension galoisienne finie E/F. Son image est alors *finie*, et inversement une représentation de W_F d'image finie est galoisienne. En effet, il est connu [De 4.10 page 542] et facile de voir que:

1.3 Lemme. *Soit G une extension de $\mathbf{Z}$ par un groupe profini I, et $\sigma \in \mathrm{Irr}_R G$. Il existe un caractère ψ de G trivial sur I tel que l'image de $\sigma\psi$ est finie.*

1.4 Corollaire. *Chaque orbite de $\Psi_R F^*$ dans $\mathrm{Irr}_R W_F$ contient une représentation galoisienne.*

1.5 Relèvement à la caractéristique 0.

Le groupe $\mu_{\overline{\mathbf{Z}}_l}$ des racines de l'unité d'ordre premier à l contenues dans $\overline{\mathbf{Z}}_l^*$ est isomorphe à $\overline{\mathbf{F}}_l^*$, par réduction modulo l (i.e. modulo l'idéal maximal Λ de $\overline{\mathbf{Z}}_l$). Un caractère non ramifié $W_F \to \overline{\mathbf{F}}_l^*$ se relève donc canoniquement en un caractère non ramifié $W_F \to \mu_{\overline{\mathbf{Z}}_l}$. Une représentation $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_l} W_F$ se relève à $\overline{\mathbf{Q}}_l$ si et seulement si une représentation de sa $\Psi_{\overline{\mathbf{F}}_l} F^*$-orbite se relève à $\overline{\mathbf{Q}}_l$. Or cette orbite contient une représentation galoisienne (1.4). Il est bien connu que le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie E/F est résoluble (il faut voir que le groupe de ramification sauvage est résoluble [SeI IV §2 Cor. 5 page 76]).

Soit l un nombre premier. Un groupe fini G est dit *l-résoluble*, s'il admet une filtration en sous-groupes

$$1 = G_o \subset G_1 \subset \ldots \subset G_r = G$$

avec G_{i-1} distingué dans G_i pour tout $1 \leq i \leq r$, telle que les quotients G_i/G_{i-1} soient des l-groupes ou des groupes d'ordre premier à l.

Lorsque les quotients sont abéliens, le groupe est dit *résoluble*. Un groupe résoluble est l-résoluble pour tout l. On sait que [Se2 16.3, 17.6]:

1.6 Rappel du théorème de Fong-Swan. *Si G est un groupe fini l-résoluble, alors tout $\overline{\mathbf{F}}_l G$-module simple se relève en un $\overline{\mathbf{Q}}_l G$-module simple.*

1.7 Corollaire. *Une représentation $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_l} W_F$ se relève en une représentation dans $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} W_F$, pour tout l.*

1.8 Représentation l-entière.

Soit G un groupe, et V une représentation de dimension n de G sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$. Un *$\overline{\mathbf{Z}}_l G$-réseau* de V est un $\overline{\mathbf{Z}}_l$-module libre $L \subset V$, de rang n, stable par G. On dit alors que V est *l-entière*.

Exemples. Si G est fini, V est toujours l-entière [Se2 15.2, th. 32].

Si G est profini, l'action de G est triviale sur un sous-groupe distingué d'indice fini de G, donc V est toujours l-entière.

Un caractère de G est l-entier si et seulement si ses valeurs appartiennent à $\overline{\mathbf{Z}}_l^*$.

Si $G = W_F$, V n'est pas toujours l-entière. L'action de W_F sur V s'identifie à un homomorphisme $\sigma : W_F \to GL(n, \overline{\mathbf{Q}}_l)$. En composant σ avec le déterminant, on obtient un caractère

$$\det \sigma : W_F \to \overline{\mathbf{Q}}_l^*.$$

Si $V \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} W_F$ est l-entière, le déterminant est l-entier. On déduit de (1.4) que la réciproque est vraie car tout $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} \mathrm{Gal}_F$ de dimension n est l-entière, et pour $\psi \in \Psi_{\overline{\mathbf{Q}}_l} F^*$, $\sigma\psi$ est l-entière si et seulement si ψ est l-entier, si et seulement si $\det(\sigma\psi) = \psi^n \det \sigma$ est l-entier.

1.9 Lemme. *$\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} W_F$ est l-entière si et seulement si son déterminant est l-entier.*

1.10 Principe de Brauer.

On peut réduire modulo Λ un $\overline{\mathbf{Z}}_l W_F$-réseau L de (V, σ). On obtient une représentation $L/\Lambda L$ de W_F sur $\overline{\mathbf{F}}_l$. Le *principe de Brauer* pour un groupe fini implique que la classe d'isomorphisme de la semi-simplification de $L/\Lambda L$ ne dépend pas du choix de L si σ est galoisienne [Se2 15.2 théorème 32]. Le même principe reste valable si l'on multiplie σ par un caractère l-entier. Le principe de Brauer est donc vrai pour W_F. La classe d'isomorphisme $r_l\sigma$ de la semi-simplification de la réduction modulo Λ d'un $\overline{\mathbf{Z}}_l W_F$-réseau de $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} W_F$ est appelé la *réduction de σ modulo l*.

1.11 Représentation modérément ramifiée.

Une représentation de W_F ou de I_F est dite *modérément ramifiée* lorsqu'elle est triviale sur le groupe de ramification sauvage P_F. Cette propriété est respectée par multiplication par un caractère non ramifié. On peut donc considérer les $\Psi_R F^*$-orbites modérément ramifiées dans $\mathrm{Irr}_R W_F$.

Si $l = p$, comme P_F est un pro-p-groupe, la représentation triviale est la seule représentation irréductible de P_F sur $\overline{\mathbf{F}}_p$, la restriction d'une représentation irréductible de W_F à P_F est semi-simple, donc *toute représentation de $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_p} W_F$ est modérément ramifiée.*

Une représentation de W_F est dite *monomiale*, si elle est de la forme $\mathrm{ind}_{W_F,H}\, \chi$ où χ est un caractère d'un sous-groupe H de W_F. Le produit d'une représentation monomiale de W_F par un caractère est encore monomial.

Le noyau d'une représentation modérément ramifiée galoisienne de dimension finie est de la forme Gal_E pour une extension galoisienne modérément ramifiée finie E/F. Le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ contient un groupe abélien distingué H (le sous-groupe d'inertie) de quotient G/H abélien. Un tel groupe est dit *métabélien.* Rappelons la propriété suivante [CR 52.2 page 357], que l'on déduit de la théorie de Clifford :

1.12 Rappel. *Une représentation irréductible $\sigma \in \mathrm{Irr}_R G$ d'un groupe fini métabélien G est monomiale.*

Une représentation irréductible modérément ramifiée galoisienne est donc monomiale. Les caractères modérément ramifiés des extensions finies modérément ramifiées et leur induites à W_F sont bien connus dans le cas complexe. Il y a quelques différences dans le cas de caractéristique positive, comme nous allons le voir ci-dessous.

1.13 Caractères modérément ramifiés.

Un *caractère modérément ramifié* de W_F s'identifie à un caractère de F^* trivial sur $1 + O_F$. C'est le produit $\mu = \nu_r \chi$ d'un caractère non ramifié ν_r et d'un caractère $\chi : F_q^* \to R^*$.

On rappelle que χ est *régulier sur* $\mathbf{F}_q$ si et seulement s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes:

- si $\chi = \mu N$, où $N : \mathbf{F}_{q^n}^* \to \mathbf{F}_{q^d}^*$ est la norme, et μ un caractère de $\mathbf{F}_{q^d}^*$, alors $d = n$,

- si $r = \chi(x)$ est l'image d'un générateur x de $F_{q^n}^*$, alors $r, r^q, \ldots, r^{q^{n-1}}$ sont distincts.

Exemple. L'inclusion $\mathbf{F}_{q^n}^* \to \overline{\mathbf{F}}_q^*$ est un caractère régulier sur $\mathbf{F}_q$; χ est régulier si et seulement si $r = \chi(x)$ est de degré n sur $\mathbf{F}_q$.

On rappelle qu'un caractère modérément ramifié de l'extension F_n^*/F non ramifiée de degré n est dit *régulier sur* F si: $\chi = \mu N$, où $N : F_n^* \to F_d^*$ est la norme, et μ un caractère de $\mathbf{F}_d^*$, alors $d = n$. C'est équivalent pour le caractère χ de W_{F_n} correspondant à: le stabilisateur de χ dans W_F est W_{F_n}.

Une représentation modérément ramifiée de I_F s'identifie à une représentation du groupe commutatif $I_F/P_F = \varprojlim \mathbf{F}_{q^n}^*$. Si elle est irréductible, c'est un caractère. Un *caractère modérément ramifié* de I_F s'identifie à un caractère

$$\chi : \mathbf{F}_{q^n}^* \to R^*$$

régulier sur $\mathbf{F}_q$. On l'identifie à un caractère modérément ramifié $F_n^* \to R^*$ trivial sur p_F, *régulier sur* F, ou à son image par la théorie du corps de classes. Cette identification respecte la régularité. La réduction modulo l ne respecte pas la régularité. La représentation induite à W_F

$$\sigma(\chi) = \mathrm{ind}_{W_F, W_{F_n}} \chi$$

est galoisienne et modérément ramifiée. Inversement soit $\sigma \in \mathrm{Irr}_R W_F$ modérément ramifiée. La restriction de σ à I_F est semi-simple. On choisit un caractère contenu dans $\sigma|_{I_F}$. Il s'identifie à un caractère $\chi : \mathbf{F}_{q^n}^* \to R^*$ régulier sur $\mathbf{F}_q$, et

$$\sigma(r, \chi) = \mathrm{ind}_{W_F, W_{F_n}} \nu_r \chi$$

pour un certain caractère non ramifié ν_r. Le caractère $\nu_r\chi$ est unique à conjugaison près dans W_F: donc r est unique, et la $\mathrm{Gal}_{\mathbf{F}_q}$-orbite de χ est unique.

1.14 Classification des représentations modérément ramifiées. *L'application $(r,\chi) \to \sigma(r,\chi)$ donne une paramétrisation des représentations $\sigma \in \mathrm{Irr}_R\, W_F$ modérément ramifiées par $R^* \times X_q$ où X_q est l'ensemble des $\mathrm{Gal}_{\mathbf{F}_q}$-orbites de caractères réguliers sur $\mathbf{F}_q$.*

1.15 Description de $\sigma(\chi)$. *Soit $\chi = \mu N$ provenant via la norme $N : F^*_{q^n} \to F^*_{q^d}$ d'un caractère $\mu : F^*_{q^d} \to R^*$ régulier sur $\mathbf{F}_q$. Alors $\sigma(\mu)$ est irréductible, et $\sigma(\chi)$ est de longueur $m = n/d$, de quotients $\sigma(\mu)\nu^i_x$, $1 \leq i \leq m-1$, où $x \in R^*$ est tel que x^d engendre le groupe des racines m-ièmes de l'unité dans R^*.*

Preuve. Soit $\chi : \mathbf{F}^*_{q^n} \to R^*$ un caractère et $r \in R^*$. Même si χ n'est pas régulier sur $\mathbf{F}_q$, on peut définir $\sigma(\chi)$, $\sigma(r,\chi)$. Le second se ramène au premier par produit par un caractère non ramifié. Le caractère ν_r étant la restriction à W_{F_n} du caractère ν_x pour tout $x \in R^*$ tel que $x^n = r$, on a $\sigma(r,\chi) = \nu_x\sigma(\chi)$. On va décrire $\sigma(\chi)$, en commençant par les deux cas extrêmes.

a) $\sigma(\chi)$ est irréductible si et seulement si χ est régulier sur $\mathbf{F}_q$.

b) $\sigma(1)$ est de longueur n, de sous-quotients les caractères $\nu^i_x : W_F \to R^*$, pour $0 \leq i \leq n-1$, où $x \in R^*$ engendre le groupe des racines n-èmes de l'unité dans R^*. L'ordre $\varepsilon(x,R^*)$ de x dans R^* est n si R est de caractéristique 0. Si R est de caractéristique l, alors $\varepsilon(x,R^*) = \varepsilon(x,\mathbf{F}^*_l)$ est la partie de n première à l.

c) On écrit $\chi = \mu N$ où $N : F^*_{q^n-1} \to F^*_{q^d}$ est la norme, $n = md$, et $\mu : F^*_d \to R^*$ un caractère régulier sur $\mathbf{F}_q$. Le nombre d est unique, égal au nombre de conjugués de χ sur $\mathbf{F}_q$; le caractère μ est unique car la norme est surjective. Du côté groupe de Weil, le caractère correspondant de W_{F_n} se prolonge à W_{F_d}. Par b), $\mathrm{ind}_{W_{F_d},W_{F_n}}\chi$ est de longueur m, de sous-quotients les caractères $\mu\nu^i_{x'} : W_{F_d} \to R^*$, pour $0 \leq i \leq m-1$, et pour x' un générateur du groupe des racines m-èmes de l'unité dans R^*. Si la caractéristique de R est 0, $\varepsilon(x',R^*) = m$; si la caractéristique de R est l, $\varepsilon(x',\mathbf{F}^*_l)$ est égal à la partie de m première à l. On a vu en 1.2 que le caractère non ramifié $\nu^i_{x'} = \nu_{x'^i}$ de W_{F_d} est la restriction d'un caractère ν_x de W_F avec $x^d = x'^i$. Par a), $\sigma(\mu\nu^i_{x'})$ est irréductible égale à $\sigma(\mu)\nu^i_x$.

Le déterminant de $\sigma(\chi)$ s'identifie au caractère modérément ramifié $\chi|_{\mathbf{F}^*_q}$.

1.16 Réduction modulo l .

Soit l un nombre premier, et $\chi : F_{q^n}^* \to \overline{\mathbf{Q}}_l^*$ un caractère. La réduction modulo l commute avec l'induction, donc la semi-simplifiée de $\sigma(r_l\chi)$ est égale à $r_l(\sigma(\chi))$. Pour décrire $r_l\chi$, on écrit χ comme un produit

$$\chi = \mu N \,.\, \chi_l$$

où $\mu : F_{q^d}^* \to \overline{\mathbf{Q}}_l^*$ est un caractère régulier sur $\mathbf{F}_q$, d'ordre premier à l, $N : F_{q^n}^* \to F_{q^d}^*$ est la norme, et χ_l un caractère d'ordre l.

Le groupe cyclique $F_{q^n}^*$ est d'ordre $q^n - 1$, donc si l ne divise pas $q^n - 1$ alors χ_l est trivial. Si l divise $q^n - 1$, alors le caractère $r_l\chi_l$ est trivial et $r_l\mu : F_{q^d}^* \to \overline{\mathbf{F}}_l^*$ reste un caractère régulier sur $\mathbf{F}_q$. La représentation $\sigma(r_l\mu N)$ est décrite en (1.15).

On s'intéresse au cas où $\sigma(\chi)$ est irréductible, alors χ est régulier sur $\mathbf{F}_q$. Si l ne divise pas $q^n - 1$, alors $\chi = \mu$ et $r_l\sigma(\chi)$ est irréductible. C'est le cas par exemple pour $l = p$.

Si l divise $q^n - 1$, on sait qu'alors [livre III.2.1, DJ1 2.3 page 268]

$$n = d\varepsilon(q^d, \mathbf{F}_l^*)l^y$$

pour un entier $y \geq 0$. Posons $m = \varepsilon(q^d, \mathbf{F}_l^*)l^y$; alors q^d engendre le groupe des racines de l'unité d'ordre m dans $\overline{\mathbf{F}}_l^*$. On déduit de (1.15):

1.17 Proposition. *La réduction modulo l de $\sigma(\chi)$ est égale à*

$$r_l\sigma(\chi) = \sigma(r_l\mu) \oplus \nu_q\sigma(r_l\mu) \oplus \ldots \oplus \nu_q^{m-1}\sigma(r_l\mu),$$

et $\sigma(r_l\mu)$ est irréductible. Dans le cas particulier où $l = p$, $r_l\sigma(\chi)$ est irréductible.

1.18 Corollaire. *La réduction modulo l d'une représentation modérément ramifiée $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} W_F$ de dimension n et l-entière, est de la forme*

$$r_l\sigma = \tau \oplus \nu_q\tau \oplus \ldots \oplus \nu_q^{m-1}\tau$$

pour une représentation $\tau \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_l} W_F$ de dimension d, $m = 1$ ou $m = \varepsilon(q^d, \mathbf{F}_l^*)l^y$ pour un entier $y \geq 0$, et $md = n$.

G. Henniart a vu que (1.18) est général (l'hypothèse "modérément ramifiée" est superflue). Ceci utilise le résultat suivant [Zink prop. 4.6.1].

1.19 Lemme. *Une représentation $\rho \in \mathrm{Irr}_R P_F$ normalisée par W_F se prolonge à W_F.*

Preuve. La dimension d'une représentation irréductible ρ de P_F est une puissance de p, car P_F est un pro-p-groupe. Le groupe W_F est un produit semi-direct de P_F par $H = W_F/P_F$ (1.1). L'obstruction de Mackey pour prolonger ρ à W_F est représentée par un 2-coycle $\alpha : H \times H \to R^*$ dont les valeurs sont des racines de l'unité d'ordre divisant la dimension de ρ [KZ sect. 2.2]. Le p-groupe de Sylow H_p de H est cyclique, et $H^2(H_p, R^*) = H^o(H_p, R^*)$ est trivial. La restriction à H_p induit une injection de la partie p-primaire de $H^2(H, R^*)$ dans $H^2(H_p, R^*)$, donc α est trivial.

La réduction modulo $l \neq p$ d'une représentation $\rho \in \mathrm{Irr}_R P_F$ est irréductible. Le lemme (1.19) et la théorie de Clifford permettent de décomposer une représentation irréductible $\sigma \in \mathrm{Irr}_R W_F$ en deux morceaux: le sauvage et le modéré. Soient $\rho \in \mathrm{Irr}_R P_F$ de groupe d'isotropie W_E dans W_F, ρ' un prolongement de ρ à W_E, et $\sigma_{mr} \in \mathrm{Irr}_R W_E$, de dimension n, modérément ramifiée et l-entière. Alors la représentation

$$\sigma = \mathrm{ind}_{W_F, W_E}\, \rho' \otimes \sigma_{mr}$$

est l-entière, et irréductible.

1.20 Réduction modulo l. *La réduction modulo $l \neq p$ de σ est de la forme*

$$r_l \sigma = \tau \oplus \nu_q \tau \oplus \ldots \oplus \nu_q^{m-1} \tau,$$

pour la représentation irréductible

$$\tau = \mathrm{ind}_{W_F, W_E}\, r_l(\rho') \otimes \tau_{mr}$$

avec τ_{mr} de dimension $d = n/m$, et $m = 1$ ou $m = \varepsilon(q_E^d, \mathbf{F}_l^*) l^y$ pour un entier $y \geq 0$.

La réduction modulo p d'une représentation irréductible modérément ramifiée est irréductible (1.18). La réduction modulo p d'une représentation $\rho \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} P_F$ est un multiple de la représentation triviale. Donc *la réduction modulo p de σ comme ci-dessus est modérément ramifiée, et de longueur* $\dim \rho$.

sec 2. $Modulessimplesd'unealgèbredeHeckeaffinemodulaire.$

2.1 La combinatoire.

ε-type. Soit $\varepsilon \in \mathbf{N} \cup \infty$; le groupe cyclique $< x >$ d'ordre ε, de générateur x est visualisé comme un ε-cercle orienté (ε points sur un cercle orienté si $\varepsilon < \infty$, ou les points entiers sur une droite orientée si $\varepsilon = \infty$). Pour tout entier $m > 0$, et tout $y \in < x >$, l'arc orienté ou le segment orienté débutant en y, de longueur m

$$(y, m) = (y \to yx \to \ldots \to yx^{m-1})$$

est appelé un *ε-type simple.* La multiplicité d'un point z du ε-cercle dans (y, m) est le nombre d'éléments de la suite $(yx^i)_{0 \leq i \leq m-1}$ égaux à z. Une somme finie $\sum (y_i, m_i)$ de ε-types simples est un *ε-type* de longueur $m = \sum m_i$. La multiplicité $t = \sum t_i$ d'un point z du ε-cercle dans le ε-type est la somme des multiplicités t_i de z dans les composantes simples (y_i, m_i). Le support avec multiplicité du ε-type, est la fonction $t :< x > \to \mathbf{N}$ qui associe à un point du ε-cercle sa multiplicité. Le support du ε-type est le support de t. Le ε-type est *générique* si $\varepsilon = \infty$ ou si son support ne contient pas le ε-cercle, il est *régulier* si les multiplicités sont 1 ou 0.

ε-cycle, $\varepsilon > 1$. Un ε-cycle est un ε-type de la forme $\sum_{y \in < x >} (y, m)$. Il ne dépend que de m. Un ε-type ne contenant pas de ε-cycle est dit *bon.* Il existe un seul ε-cycle régulier $\sum_{y \in < x >} y$. Un ε-type de longueur $< \varepsilon$ ou générique, est toujours bon.

Lorsque $\varepsilon = 1$, les 1-types de longueur n sont en bijection avec les partitions de n. Dans le cas où $\varepsilon > n$, les ε-types s'identifient aux ∞-types, dont la classification bien connue [Z1], s'identifie à la classification des modules simples de l'algèbre de Hecke affine $H_{\mathbf{C}}(n, q)$ (I.3.14), et à la classification des représentations complexes du groupe de Weil-Deligne de dimension n, de partie semi-simple triviale (2.2).

(E, x)-type On étend la définition de ε-type à la situation où E est un ensemble avec poids $d : E \to \mathbf{N}^*$, muni d'une bijection $x : s \to sx$, qui respecte le poids $d(sx) = d(s),\ s \in E$. Pour $s \in E$, on note $\varepsilon(s, x)$ le plus petit entier $i > 0$ tel que $sx^i = s$. Pour tout entier $m > 0$, et tout $s \in E$,

$$(s, m) = (s \to sx \to \ldots \to sx^{m-1})$$

est un (E, x)-type simple de longueur $d(s)m$. Une somme finie $\sum (s_i, m_i)$ est un (E, x)-type de longueur $\sum d(s_i) m_i$.

Soit $s < x >$ l'orbite de $s \in E$ par $< x >$. Les $(s < x >, x)$-types sont en bijection avec les $\varepsilon(s, x)$-types. Si toutes les orbites ont le même nombre d'éléments ε, l'ensemble des (E, x)-types s'identifie au produit de $E / < x >$ et de l'ensemble des ε-types.

Exemples. 1) $(\mathrm{Irr}_R W_F, \nu)$-*type.* R est un corps algébriquement clos, F est un corps local non archimédien de corps résiduel d'ordre q inversible dans R^*, d'ordre $\varepsilon = \varepsilon(q, R^*)$, $\nu = \nu_q$ est le caractère non ramifié (1.1) qui agit sur $\mathrm{Irr}_R W_F$ par multiplication, la fonction d sur $\mathrm{Irr}_R W_F$ est la dimension des représentations.

2) $(\mathbf{C}^*, x)$-*types.* $x \in \mathbf{C}^*$ agit sur $\mathbf{C}^*$ par multiplication, la fonction d sur $\mathbf{C}^*$ est identiquement égale à 1. Si $\varepsilon = \varepsilon(x, \mathbf{C}^*)$ est l'ordre de x dans C^*, les $(\mathbf{C}^*, x)$-types s'identifient au produit de $\mathbf{C}^*/ < x >$ et de l'ensemble des ε-types.

(E, x)-*cycles,* $x \neq \mathrm{id}$. Un (E, x)-cycle est une somme $\sum_{y \in <x>(s)} (sx^y, m)$, il ne dépend que de (s, m). Un (E, x)-type ne contenant pas de (E, x)-cycle est dit bon.

1-*cycles dans* R^*. Si R est un corps algébriquement clos de caractéristique $l > 0$, un 1-cycle dans R^* est une somme de l copies d'un l-type $(y, m) = (y \to y \to \ldots \to y)$, $y \in R^*$, m entier ≥ 1. Un 1-type ne contenant pas de 1-cycle est dit bon.

2.2 Représentations du groupe de Weil-Deligne.

Les $(\mathrm{Irr}_R W_F, \nu)$*-types de dimension* n *sont en bijection avec les classes d'isomorphisme des paires* (σ, N) *formées*

(a) d'une représentation semi-simple (V, σ) *de dimension* n *de* W_F *sur R,*

(b) d'un endomorphisme nilpotent $N \in \mathrm{End}_R V$ *tel que* $\nu(w)\sigma(w)N = N\sigma(w),\ w \in W_F$.

Preuve. 1) Soit (σ, N) comme en a) et b). Montrons qu'on peut lui associer un $(\mathrm{Irr}_R W_F, \nu)$-type de dimension n. Le groupe $< N >$ agit sur les composants irréductibles de σ. La représentation σ est la somme directe de ces orbites. Chaque orbite de $< N >$ est de la forme $\tau + \tau\nu + \ldots + \tau\nu^{m-1}$, et correspond à un $(\mathrm{Irr}_R W_F, \nu)$-type simple $(\tau, m) := \tau \to \tau\nu \to \ldots \to \tau\nu^{m-1}$. La somme des $(\mathrm{Irr}_R W_F, \nu)$-types simples correspondant aux orbites de $< N >$ est un $(\mathrm{Irr}_R W_F, \nu)$-type de dimension n.

2) Inversement, soit (τ, m) un $(\mathrm{Irr}_R W_F, \nu)$-type simple. Montrons que l'on peut lui associer une paire (σ, N) qui est une section de l'application ci-dessus. A un $(\mathrm{Irr}_R W_F, \nu)$-type, on associera la somme directe des paires définies par ses types simples.

La représentation semi-simple est $\sigma = \oplus_{0 \leq i \leq m-1} \tau\nu^i$. Notons W_i l'espace de $\tau\nu^i$. Pour $0 \leq i \leq m-2$, on choisit un isomorphisme W_F-équivariant $N_i : W_i \to W_{i+1}$. Soit $N_{m-1} = 0$. L'endomorphisme nilpotent est $N = \oplus_{0 \leq i \leq m-1} N_i$.

3) Montrons que deux paires (σ, N) et (σ', N') définissant le même $(\mathrm{Irr}_R\, W_F, \nu)$-type sont isomorphes. La décomposition du type en types simples détermine σ, et les orbites de $< N >$ dans l'ensemble des composants irréductibles de σ. On se ramène ainsi au cas où le type est simple (τ, m), et $\sigma = \sigma'$. Notons que $GL_R(\sigma) \simeq \prod_{\rho \in \mathrm{Irr}_R W_F} GL(t(\rho), R)$, où $t : \mathrm{Irr}_R\, W_F \to \mathbf{N}$ est le support avec multiplicité de (τ, m). En conjuguant N' par un élément de $GL_R(\sigma)$, on peut supposer que $\mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}\, N' = W_{m-1}$, puis en divisant par W_{m-1}, et par induction sur m, on peut supposer que les filtrations des noyaux

$$0 \supset \mathrm{Ker}\, N^{m-1} \supset \ldots \supset \mathrm{Ker}\, N \supset 0$$

pour N et N' sont égales. Pour une décomposition de $\sigma = \oplus_{0 \le i \le m-1} \tau\nu^i$ en somme directe compatible cette filtration, N et N' sont comme en 2). Leurs composantes $N_i = N_i' r_i$ sont égales à un scalaire multiplicatif près $r_i \in R^*$. Par conjugaison par $(R^*)^m \simeq \prod_{0 \le i \le m-1} GL_R(\tau\nu^i) \subset GL_R(\sigma)$, on peut supposer que $N = N'$.

Remarque. Lorsque $\varepsilon(\sigma, \nu) > n$, un endomorphisme $M \in \mathrm{End}_R\, V$ tel que $\sigma(w) M \sigma(w)^{-1} = \nu(w) M$, est *nilpotent.* C'est faux sinon. Par exemple, si $\varepsilon = \varepsilon(q, R^*) \le n$, $(V, \sigma) = \oplus_{i=0}^{\varepsilon-1} (Re_i, \nu^i)$, alors l'endomorphisme $M \in \mathrm{End}_R\, V$ tel que $M(e_i) = e_{i+1}$, pour tout $0 \le i \le \varepsilon - 2$ et $M(e_{\varepsilon-1}) = e_o$, vérifie bien la condition ci-dessus mais n'est pas nilpotent.

2.3 Modules simples de $H_{\mathbf{C}}(n, x)$.[Groj] *Soit $H_{\mathbf{C}}(n, x)$ l'algèbre de Hecke affine associée à $GL(n)$ et à $x \in C^*, x \neq 1$* [livre I.3.14]. *Les classes d'isomorphisme des $H_{\mathbf{C}}(n, x)$-modules simples sont classées par les bons $(\mathbf{C}^*, x)$-types de longueur n.*

Le corps $\mathbf{C}$ n'intervient pas vraiment, l'ordre $\varepsilon(x, \mathbf{C}^*)$ de x joue le rôle primordial.

2.4 Conjecture pour $H_R(n, x)$. *Soit $n > 0$ un entier, R un corps algébriquement clos, et $x \in R^*$. Il existe une bijection entre les classes d'isomorphisme des $H_R(n, x)$-modules simples et les bons (R^*, x)-types de longueur n.*

Cette conjecture est un théorème de Dipper et James [DJ2] pour l'algèbre de Hecke $H_R^o(n, x)$. Cette conjecture ramène la classification des $H_R(n, x)$-modules simples à celle des $\varepsilon = \varepsilon(x, R^*)$-types. La bijection devrait être naturelle dans le sens que le bon type associé à un module simple devrait provenir d'un poids "minimal". Une variante plus faible est que la bijection conserve le support (2.9).

2.5 Théorème. *La conjecture pour $H_R(n,x)$ est vraie si $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon \geq n$, ou si $n = 2, 3$.*

Pour obtenir (2.5), on va décrire en (2.6) les ε-types génériques, ou réguliers, ou de longueur $n \leq 4$, de support donné. Si $\varepsilon = 1$, les ε-types de longueur n sont les partitions de n (2.1), on supposera donc $\varepsilon > 1$. On comparera ensuite avec les $H_R(n,x)$-modules simples.

2.6 Exemples de ε-types

Réduction aux composantes connexes. Deux points y, y' du ε-cercle $< x >$ sont dits *liés* si $y = y'x^{\pm 1}$. La détermination des ε-types se ramène à celle des ε-types de support connexe (le support est de la forme $\{y, yx, \ldots, yx^r\},\ r < \varepsilon$). Un ε-type de support donné X est une somme de ε-types de support X_*, où les X_* sont les composantes connexes de X (deux éléments du support d'un ε-type appartenant à deux composantes connexes distinctes ne peuvent pas appartenir à un même composant simple (y, m)).

Nous supposons désormais que le support est connexe, de la forme $\{1 = x^o, \ldots, x^r\},\ r < \varepsilon$.

Cas générique : le support n'est pas le cercle. Les ε-types de support donné générique ne dépendent pas de ε, que l'on peut choisir $\varepsilon = \infty$.

Cas régulier : les multiplicités sont égales à 1. Dans le cas régulier générique, on a 2^{n-1} types de longueur n. Dans le cas régulier non générique, de support le ε-cercle, de longueur $n = \varepsilon$, on en a $2^n - 1$ types, dont $2^n - 2$ bons, et un cycle $[1 + x + \ldots + x^{n-1}]$.

En effet, un type $\sum (y_i, m_i)$ de support régulier est caractérisé par le sous-ensemble Y des y_i. Le support est un ensemble à n éléments. Dans le cas générique, Y est un sous-ensemble contenant 1 du support: le nombre de types est donc le nombre 2^{n-1} de parties d'un ensemble à $n - 1$ éléments. Dans le cas non générique, Y est un sous-ensemble non vide quelconque du support. Le nombre de ε-types est le nombre $2^n - 1$ de parties non vides d'un ensemble à n éléments. Les bons ε-types correspondent aux parties propres (différentes de la partie vide ou du support).

Nous donnons maintenant la liste des types de longueur $n \leq 4$, pour $\varepsilon > 1$, classés selon leur support $(1^a, (x)^b, (x^2)^c, \ldots)$ avec multiplicité.

$n = 2$: le support est régulier ou générique;

- support générique, non régulier 1^2: 1 seul type $1 + 1$,

• support régulier $(1, x)$: 2 types $1 \to x$ et $1 + x$ pour $\varepsilon > 2$ (cas générique).

• $3 = 2 + 1$ types, dont 2 bons $1 \to x, x \to 1$, et un cycle $[1 + x]$ si $\varepsilon = 2$ (cas non générique).

$n = 3$: le support est régulier ou générique, sauf pour $(1^2, x)$, $\varepsilon = 2$.

• support générique non régulier (1^3): 1 seul type,

• support non régulier $(1^2, x)$: 2 types $1 + (1 \to x)$, $1 + 1 + x$ si $\varepsilon > 2$ (cas générique).

• $4 = 3 + 1$ types, dont 3 bons $1 + (1 \to x)$, $1 + (x \to 1)$, $1 \to x \to 1$, et $[1 + x] + 1$, si $\varepsilon = 2$ (cas non générique).

• support régulier $(1, x, x^2)$

• 4 types si $\varepsilon > 3$ (cas générique): $1 \to x \to x^2, (1 \to x) + x^2, 1 + (x \to x^2), 1 + x + x^2$.

• $7 = 6 + 1$ types dont 6 bons (les trois premiers types ci-dessus, et tourner sur le cercle) et un cycle $[1 + x + x^2]$, si $\varepsilon = 3$ (cas non générique).

$n = 4$: le support est régulier ou générique, sauf pour $(1^3, x)$, $(1^2, (x)^2)$ si $\varepsilon = 2$, et $(1^2, x, x^2)$ si $\varepsilon = 3$, modulo multiplication par un élément du ε-cercle.

• support générique non régulier (1^4): 1 seul type.

• support non régulier $(1^3, x)$: 2 types $1+1+(1 \to x)$, $1+1+1+x$ si $\varepsilon > 2$ (cas générique).

• 3 bons types $1+1+(1 \to x)$, $1+1+(x \to 1)$, $1+(1 \to x \to 1)$, et 1 pas bon $1 + 1 + [1 + x]$, si $\varepsilon = 2$ (cas non générique).

• support non régulier $(1^2, (x)^2)$: 3-types $(1 \to x) + (1 \to x)$, $1 + x + (1 \to x)$, $1 + x + 1 + x$ si $\varepsilon > 2$ (cas générique),

• $10 = 6+4$ types dont 6 bons $(1 \to x)+(1 \to x)$, $(x \to 1)+(x \to 1)$, $(1 \to x \to 1) + x$,
$(x \to 1 \to x) + 1$, $1 \to x \to 1 \to x$, $x \to 1 \to x \to 1$,
et 4 pas bons $[(x \to 1) + (1 \to x)]$, $[1 + x] + (1 \to x)$, $[1 + x] + (x \to 1)$, $[1 + x] + [1 + x]$, si $\varepsilon = 2$ (cas non générique).

• support non régulier $(1^2, x, x^2)$: 4 types $1 + (1 \to x \to x^2)$, $1 + 1 + (x \to x^2)$, $1 + (1 \to x) + x^2$, $1 + 1 + x + x^2$ si $\varepsilon > 3$ (cas générique).

• $9 = 8 + 1$ types, dont 8 bons $(1 \to x \to x^2 \to 1)$, $(1 \to x \to x^2) + 1$, $(x \to x^2 \to 1) + 1$, $(x^2 \to 1 \to x) + 1$, $(1 \to x) + (x^2 \to 1)$, $(x + x^2) + 1 \to 1)$, $(1 \to x) + x^2 + 1$, $(x^2 \to 1)x + 1$, et un type

$[1+x+x^2]+1$ qui n'est pas bon, si $\varepsilon = 3$ (cas non régulier, non générique).

• support non régulier $(1,(x)^2,x^2)$: 5 types: $(1 \to x)+(x \to x^2)$, $(1 \to x \to x^2)+x$, $1+x+(x \to x^2)$, $(1 \to x)+x+x^2$, $1+x+x+x^2$ si $\varepsilon > 3$ (cas générique). Le cas $\varepsilon = 3$ se ramène au cas précédent.

• support régulier $(1,x,x^2,x^3)$: 8 types tous bons (rajouter aux types de support $(1,x,x^2)$, soit $+x^3$ soit $\to x^3$) : $1 \to x \to x^2 \to x^3, 1 \to x \to x^2+x^3, 1 \to x+x^2 \to x^3, 1 \to x+x^2+x^3, 1+x \to x^2 \to x^3, 1+x \to x^2+x^3, 1+x+x^2 \to x^3, 1+x+x^2+x^2$, si $\varepsilon > 4$ (cas générique).

• $15 = 14+1$ types dont le cycle $[1+x+x^2+x^3]$ et 14 bons types obtenus par rotation des autres types ci-dessus: les $4 \times 3 = 12$ types $z \to zx \to zx^2 \to zx^3$, $z \to zx \to zx^2+zx^3$, $x+zx+zx^2 \to zx^3$ pour z appartant au ε-cercle, et les 2 types $1 \to x+x^2 \to x^3$, $x \to x^2+x^3 \to x$.

Nous voulons maintenant étendre certains résultats de la théorie des $H_{\mathbf{C}}(n,q)$-modules simples [Rog1, Rog2], pour $q \in \mathbf{C}^*$ d'ordre $\varepsilon(q,\mathbf{C}^*) = \infty$, aux $H_R(n,q)$-modules simples, pour $q \in R^*$ d'ordre fini $\varepsilon(q,R^*)$.

2.7 Rappel sur la structure de $H_R(n,q)$.

Soit R un anneau commutatif, et $q^{1/2} \in R^*$. L'algèbre de Hecke $H^o = H^o_R(n,q)$ est engendrée comme algèbre par les éléments T_i, $1 \leq i \leq n-1$, vérifiant [livre I.2.14]:

$$(T_i+1)(T_i-q) = 1, \quad T_iT_j = T_jT_i, \quad T_kT_{k+1}T_k = T_{k+1}T_kT_{k+1},$$

pour $1 \leq i,j < n$, $|i-j| > 1$, $1 \leq k < n-1$. La base canonique de $H^o_R(n,q)$ [livre I.2.11] est formée des $T_w = T_{i_1}\dots T_{i_k}$ pour $w \in S_n$ de décomposition réduite $w = s_{i_1}\dots s_{i_k}$, où $s_i = (i,i+1)$, $1 \leq i < n$.

Comme $q^{1/2} \in R^*$, l'algèbre de Hecke affine $H = H_R(n,q)$ admet la présentation suivante [livre I.2.14]. Elle est engendrée par H^o et par une sous-algèbre commutative

$$A = R[X_i^{\pm 1},\ 1 \leq i \leq n],$$

liées par les relations:

$$X_jT_i = T_iX_j, \quad T_iX_{i+1}T_i = qX_i, \quad 1 \leq i < n,\ 1 \leq j \leq n,\ j \neq i, i+1.$$

2.8 Rappel sur le module $I(\chi)$.

Soit $\chi : A \to R$ un caractère; le module

$$I(\chi) = H \otimes_{A,\chi} R$$

est universel dans le sens: pour tout H-module M, alors

$$\mathrm{Hom}_H(I(\chi), M) = M^\chi$$

est la partie χ-isotypique M^χ de M. Un H-module simple contient χ, si et seulement si c'est un quotient de $I(\chi)$.

$I(\chi)$ est le prolongement à H de la représentation régulière de H^o tel que T_1 soit un vecteur propre de valeur propre χ pour A. Donc $I(\chi)$ a une base $(f_w,\ w \in S_n)$ telle que

$$T_w f_{w'} = T_w T_{w'} f_1, \quad a f_1 = \chi(a) f_1, \quad w, w' \in S_n,\ a \in A.$$

Si $<$ est l'ordre de Bruhat dans S_n, on a la formule : pour $a \in A,\ w \in S_n$, il existe des éléments uniques $a_{y,w,x} \in A$ tels que [Rog1 page 446]:

$$aT_w = T_w w^{-1}(a) + \sum_{y<w} T_y a_{y,w,a};$$

en l'appliquant à f_1, on obtient $af_w = \chi(w^{-1}a)f_w + \sum_{y<w} \chi(a_{y,w,a}) f_y$. On déduit:

L'action de A sur $I(\chi)$ est triangulable, de diagonale les conjugués de χ par S_n. Donc les suites de Jordan-Holder de $I(\chi)$ et de $I(\chi')$ sont disjointes si $\chi, \chi' \in \mathrm{Hom}_R(A, R)$ ne sont pas conjugués par S_n.

L'action de A sur un H-module M n'est pas semi-simple en général. On notera

$$M_t^\chi = \{m \in M,\ (a - \chi(a))^t m = 0 \ \ \forall a \in A\}, \quad M_\infty^\chi = \cup_{t>0} M_t^\chi.$$

La dimension de $I(\chi)_\infty^{w\chi}$ est égale à l'ordre du stabilisateur de χ dans S_n, pour tout $w \in S_n$.

Un caractère

$$\chi : \overline{\mathbf{F}}_l[X_i^{\pm 1}] \to \overline{\mathbf{F}}_l$$

se relève toujours en un caractère

$$\mu : \overline{\mathbf{Z}}_l[X_i^{\pm 1}] \to \overline{\mathbf{Z}}_l.$$

On peut par exemple fixer un isomorphisme de $\overline{\mathbf{F}}_l^*$ dans $\overline{\mathbf{Z}}_l^*$, et associer aux r_i leurs images (ce n'est pas en général un relèvement ayant de bonnes propriétés). La réduction du module $I_{\overline{\mathbf{Z}}_l}(\mu)$ est le module $I_{\overline{\mathbf{F}}_l}(\chi)$. Ceci implique que certains résultats pour $I_R(\chi)$ sont vrais s'ils le sont en caractéristique zéro, et d'utiliser [Rog1-2]. Les techniques de [Rog 1, th.2.3 page 448] impliquent:

Les suites de Jordan-Holder de $I(\chi)$ et de $I(\chi')$ sont égales si $\chi, \chi' \in \mathrm{Hom}_R(A, R)$ sont conjugués par S_n.

2.9 Support.

Un caractère $\chi : A \to R$ est déterminé par la suite $\chi(X_i) = r_i \in R^*,\ 1 \leq i \leq n$. On notera aussi $\chi = (r_i),\ I(\chi) = I(r_i)$. Le *support avec multiplicités* de χ est l'ensemble des nombres $r \in R^*$ qui interviennent dans (r_i) avec leur multiplicités. Le groupe S_n opère naturellement sur A et sur ses caractères. Deux caractères de A sont conjugués par S_n si et seulement s'ils ont le même support avec multiplicités.

Nous supposons désormais que R est un corps algébriquement clos. Si M est un H-module de dimension finie, la trace de A dans M, appelée le *caractère-poids* de M, est une somme de caractères de A appelés les *poids* de M,

$$\mathrm{ch}\, M = \sum m_\chi \chi.$$

Le caractère-poids de $I(\chi)$ est $\sum_{w \in S_n} \chi w^{-1}$. Tout H-module simple contient une droite stable par A, donc est quotient d'un $I(\chi)$. Donc les poids d'un H-module simple M ont le même support avec multiplicités, appelé le support avec multiplicités de M. Les H-modules simples de support avec multiplicités donné sont les sous-quotients simples de $I(\chi)$ pour un caractère χ de même support avec multiplicités. *La conjecture (2.4) doit respecter le support avec multiplicités.*

2.10 Rappel sur les automorphismes de H.

a) En caractéristique $\neq 2$, la multiplication par l'unique caractère non trivial (voir (2.18)) induit une involution * sur les H-modules simples, qui envoie un poids $\chi = (r_i)$ sur le poids obtenu en lisant les r_i de droite à gauche (r_{n-i}).

b) La contragédiente induit une bijection d'ordre 2 sur les H-modules simples, qui envoie un poids (r_i) sur son inverse (r_i^{-1}).

c) Soit $r \in R^*$; l'application

$$S_i \to S_i, \ X_j \to rX_j, \quad 1 \leq i < n, \ 1 \leq j \leq n$$

induit un automorphisme de H, donc une bijection sur les H-modules simples qui envoie un poids (r_i) sur un multiple (rr_i).

Notons $\varepsilon = \varepsilon(q, R^*)$ l'ordre de q dans R^*. Via la conjecture (2.4), les automorphismes a), b), c) correspondent à des bijections sur les ε-types. Les deux bijections suivantes qui restectent les ε-types simples doivent correspondre à b) et à c):

- b') on remplace un ε-type simple par le ε-type simple obtenu en inversant ses éléments, et en les lisant de droite à gauche: $(y, m) \to (q^{1-m}y^{-1}, m)$.

- c') la multiplication par $r \in R^*$: $(y, m) \to (ry, m)$,

L'analogue de l'action de l'involution de Zelevinski sur les ε-types est difficile. Si $\varepsilon = 2$, elle consiste à remplacer un type simple par le type simple obtenu en le lisant de droite à gauche: $(z, m) \to (q^{m-1}z, m)$. Elle échange le caractère signe et le caractère trivial [livre III.3.14]. Dans le cas générique, elle est décrite dans [MW page 149].

2.11 Cas $n = 2$ *Soit χ de support (r_1, r_2). Le module $I(\chi)$ est de dimension 2,*

- irréductible si et seulement si $r_1 \neq q^{\pm 1} r_2$,

- réductible semi-simple si et seulement si $q = 1, \ r_2 = r_1$,

- sans multiplicités sauf si $q = -1, \ r_2 = -r_1$.

Preuve. L'algèbre $H_R(2, q)$ est engendrée par $T = T_1, X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}$; on pose $S_2 = \{1, s\}$; le module $I(\chi)$ a une R-base f_1, f_s. La représentation

---

* c'est l'involution de Zelevinski; j'espère donner plus de détails sur une interprétation géométrique de cette involution dans un article prochain en collaboration avec Cary Rader, cette involution a aussi une interprétation par la cohomologie des faisceaux sur l'immeuble, voir mon preprint 1995 : Cohomology of sheaves on the building and R-representations.

$I(\chi)$ est réductible si et seulement si elle contient une droite stable, et réductible semi-simple si elle contient deux droites distinctes stables. Les deux vecteurs

$$C = f_s - qf_1, \quad C' = f_s + f_1,$$

sont propres pour T de valeurs propres -1 et q. Lorsque $q = -1$, $C = C'$ est l'unique vecteur propre de T. Le vecteur C est propre pour A si et seulement si $r_1 = qr_2$, le vecteur C' est propre pour A si et seulement si $r_2 = qr_1$. Dans les deux cas, la valeur propre est χs.

Remarque. Lorsque $r_1 \neq r_2$, $I(\chi)$ a une base formé de vecteurs propres pour A: f_1 de valeur propre χ et

$$A_s(\chi) = C + (qr_2 - r_1)/(r_2 - r_1),$$

de valeur propre χs. La multiplication à droite par $A_s(\chi)$ dans H^o induit un H-homomorphisme

$$I(\chi s) \to I(\chi).$$

L'élément $A_s(\chi)$ est inversible dans l'algèbre commutative H^o si et seulement si $r_2 \neq r_1 q^{\pm 1}$.

2.12 Corollaire: Irréductibilité de $I(\chi)$ *Soit* $\chi = (r_i)$ *un caractère de* A. *Un* H*-module* M *contenant le poids* χ, *contient aussi le poids* χs_i *si* $r_i \neq q^{\pm 1} r_{i+1}$, $1 \leq i < n$.

$I(\chi)$ *est irréductible si et seulement si* $r_i \neq q^{\pm 1} r_j$ *pour tout* $1 \leq i, j < n$.

On note $I(\chi) = I(r_i)$. Alors $I(1^n)$ est irréductible si et seulement si $q \neq 1$.

Preuve. Soit M un H-module simple contenant $\chi w^{-1} = (r'_i)$, $w \in S_n$. Pour tout i, $1 \leq i < n$, la représentation $I(r'_i, r'_{i+1})$ est irréductible, donc $\chi w^{-1} s_i$ est aussi un poids de M. On en déduit que $\mathrm{ch}\, M = \sum_{w \in S_n} \chi w^{-1}$, donc $M = I(\chi)$.

La condition sur (r_i) est vérifiée, si et seulement s'il n'existe qu'un seul type $\sum r_i$ de support (r_i). Donc (2.11) est compatible avec la conjecture (2.4).

2.13 Réduction aux composantes connexes.

Le groupe cyclique $< q >$ engendré par q opère sur R^* par multiplication. Comme pour les (R^*, q)-types (2.6), deux éléments r, r' de

R^* sont dits *liés* si $r = q^{\pm 1} r'$. Le support d'un caractère $\chi : A \to R$ est union de ses composantes connexes, comme en (2.6).

Par (2.12), un H-module contient un poids χ tel que les $r_i = \chi(X_i)$ dans une même composante connexe sont adjacents. On dit que χ est *rangé*. On associe à un poids rangé χ la suite de composition $(d_j)_{1 \le j \le k}$ de n, tels que les $(r_i)_{n_j+1 \le i \le n_{j+1}}$, $0 \le j < k$, sont les composantes connexes de $(r_i)_{1 \le i \le n}$, où l'on pose $n_o = 0,\ n_1 = d_1, n_2 = d_1 + d_2, \ldots, n_k = n$.

L'algèbre A s'identifie au produit tensoriel $\otimes_{j=1}^k A_j$ des sous-algèbres

$$A_j = R[X_i^{\pm 1}]_{n_{j-1}+1 \le i \le n_j},$$

et χ au produit de caractères $\chi_j : A_j \to R$. On dit que les χ_j sont les *composantes connexes* du caractère $\chi = (\chi_j)$.

La sous-algèbre $H_{(d_j)}$ de H engendrée par les $T_i, X_j,\ 1 \le i, j \le n,\ i \ne n_1, \ldots, n_k$, s'identifie au produit tensoriel $\otimes_{j=1}^k H_R(d_j, q)$. On note $I(\chi_j)$ le $H_R(d_j, q)$-module défini par χ_j.

Si N est un $H_{(d_j)}$-module, le H-module $H \otimes_{H_{(d_j)}} N$ est dit *induit* par N. L'associativité du produit tensoriel montre que $I(\chi)$ est le H-module induit par $\otimes_{j=1}^k I(\chi_j)$.

Notons $W_{(d_j)} \subset S_n$ le sous-groupe engendré par les s_i, $i \ne n_1, \ldots, n_k$, isomorphe au produit $\prod_{j=1}^k S_{d_j}$. Si M est un H-module de dimension finie, dont les poids sont conjugués à χ par S_n, (2.12) montre que le $H_{(d_j)}$-module

$$M_{res} = \sum_{\chi' \in \chi W_E} M_\infty^{\chi'},$$

est non nul. On l'appelle la *restriction* de M.

Le module M est induit par M_{res}: l'application naturelle

$$H \otimes_{H_{(d_j)}} M_{red} \to M$$

est un isomorphisme.

La preuve [Rog2 prop.4.1 page 248] est la même en toute caractéristique. Elle utilise que

1) $H = \oplus_{w \in W/W_{(d_j)}} T_w H_{(d_j)}$ où w est l'élement de plus grande longueur de $wW_{(d_j)}$ (croissant sur chaque bloc (n_j+1, n_{j+1}), $0 \le j < k$) [livre III.0.9]; donc la dimension de N est égale à $[W : W_{(d_j)}]$ fois la dimension de M si M est induit par N.

2) Le caractère-poids ch_M se déduit du caractère-poids $\mathrm{ch}_{M_{red}}$, en remplaçant chaque poids χ' qui intervient dans M_{red} par $\sum_w \chi' w^{-1}$ lorsque parcourt les $w \in S_n$ comme ci-dessus.

2.14 Lemme.*Soit $\chi = (\chi_j) : A \to R$ un caractère rangé de composantes connexes χ_j. L'induction induit une bijection entre les sous-quotients simples de $\otimes I(\chi_j)$ et les sous-quotients simples de $I(\chi)$. Son inverse est la restriction.*

Preuve. Un sous-quotient M de $I(\chi)$ est induit par M_{res}, par ce qui précède. Si M est simple, M_{res} est un $H_{(d_i)}$-module simple, i.e. un produit tensoriel $M_{red} = \otimes_{j=1}^{k} M_j$ de $H_R(d_j, q)$-modules simples M_j. Les M_j sont des sous-quotients simples de $I(\chi_j)$. Inversement, pour de tels M_j, le H-module induit par $\otimes_{j=1}^{k} M_j$ est un H-module simple M. Il suffit de voir que M_{res} est simple. Elle contient l'image de $\otimes_{j=1}^{k} M_j$ dans M par l'injection naturelle, et lui est égale pour une raison de même dimension. On a donc $M_{res} \simeq \otimes_{j=1}^{k} M_j$.

La classification des H-modules simples est ainsi ramenée à celle des H-modules simples de support connexe contenant 1. Cette réduction est parallèle à la classification des ε-types, la somme de deux ε-types de support connexes disjoints correspondant à l'induction. Nous cherchons donc les sous-quotients simples de $I(\chi)$ pour un caractère χ de support $(1, q, \ldots, q^r)$, $r < \varepsilon$. Pour $q = 1$, un seul caractère $\chi = (1^n)$ est de cette forme.

2.15 Cas $q = 1$. *Les $H_R(n,1)$-modules simples de poids $\chi = (1^n)$ sont classés par les partitions de n si la caractéristique de R est 0, et par les partitions l-régulières de n si la caractéristique de R est l.*

Preuve. On a

$$I(\chi) = H_R(n,1) \otimes_{A,\chi} R \simeq H_R^o(n,1) \simeq RS_n.$$

Les sous-$H_R^o(n,1)$-quotients simples sont stables par $H_R(n,1)$, et sont classés par les partitions de n [JK 6.1.12 page 243] indiquées ci-dessus.

Exemple. Supposons $n = 2$. Par (2.11), si $l = 2$, on a un seul module simple, le caractère trivial, et une seule partition 2-régulière (2). Si $l \neq 2$, il y a deux modules simples, les caractères triviaux et signes, et deux partitions l-régulières (2) et $(1,1)$.

Supposons $n = 3$. Il y a une seule partition 2-régulière (3), il y a deux partitions 3-régulières $(3), (2,1,1)$, et trois partitions l-régulières $(3), (2,1,1), (1,1,1)$ si $l > 3$.

La conjecture (2.4) est donc vraie pour $q = 1$. Il reste à étudier le cas où le support

$$(1, q, \dots, q^r),\ 1 \leq r < \varepsilon,$$

de χ est connexe et contient $1 \neq q$.

2.16 Cas générique.

Le support de χ ne recouvre pas le cercle (i.e. $r < \varepsilon - 1$). Notons C le ε-cercle privé du point $q^{\varepsilon-1}$, muni de l'ordre total

$$1 < q < q^2 < \dots < q^{\varepsilon-2}.$$

Les suites de points C sont munies de l'ordre lexicographique. On va décrire une bijection entre les ε-types de support dans C, et les suites de points dans C, que nous appelons *bien ordonnées*.

La définition d'une suite bien ordonnée est due à Zelevinski. Deux ε-types simples (z, m) et (z', m') de support contenu dans C sont dits *liés* si l'un n'est pas contenu dans l'autre, et si leur union (ensembliste) est connexe. Si de plus $z < z'$, on dit que (z, m) *précède* (z', m'). Par exemple, si $z, zq \in C$, alors z précède zq, et zq et z ne précèdent pas z (ici l'hypothèse générique est fondamentale).

On dit qu'une suite de ε-types simples $(z_j, m_j)_{1 \leq j \leq k}$ de support dans C est *ordonnée* si

a) $z_{j+1} \neq z_j q^{m_j}$ pour $j = 1, \dots k-1$,

b) pour tout $i < j$, (z_i, m_i) ne précède pas (z_j, m_j).

On associe à une suite de points dans le ε-cercle, l'unique suite de ε-types simples définissant la même suite de points, et vérifiant a). On associe à une suite $(z_j, m_j)_{1 \leq j \leq k}$, de ε-types simples, le ε-type $\sum_{j=1}^{k} (z_j, m_j)$.

Une suite de points dans C est dite *ordonnée*, si la suite en ε-types simples associée est ordonnée; elle est dite *bien ordonnée* si la suite en ε-types simples associée est maximale parmi les suites de points, de suite en ε-types simples ordonnée, et de même ε-type.

L'application qui à une suite associe son ε-type, induit une bijection entre les suites bien ordonnées de support dans C, et les ε-types de support dans C.

Preuve. Soit $t : C \to \mathbf{N}$. On range par ordre croissant, les suites de points dont le support avec multiplicité est égal à t. Chacune donne une suite de ε-types simples. On ne garde que les suites ordonnées. En vérifiant que chaque ε-type dont le support avec multiplicité est égal à t, est le ε-type associé à une suite ordonnée, il est clair que l'on obtient la bijection voulue.

Considérons l'ensemble des suites $(z_j, m_j)_{1 \leq j \leq k}$ définissant un ε-type donné de support t. Si $k = 1$, la suite est évidemment bien ordonnée. Par induction, supposons que la suite $(z_j, m_j)_{1 < j \leq k}$ est bien ordonnée. Montrons que l'on peut intercaler (z_1, m_1) de sorte que la suite obtenue reste bien ordonnée. On n'a pas à la fois $z_1 = z_j q^{m_j}$ et $z_1 q^{m_1} = z_j$, puisque ces égalités impliquent $z_1 > z_j$ et $z_j > z_1$ *. Si $z_1 \neq z_j q^{m_j}$, alors $(z_j, m_j), (z_1, m_1)$ vérifie a); si $z_1 q^{m_1} \neq z_j$, alors $(z_1, m_1), (z_j, m_j)$ vérifie a). Supposons que j est le premier indice ≥ 2 tel que (z_j, m_j) précède (z_1, m_1). On a $z_j < z_1$, et $(z_1, m_1), (z_j, m_j)$ est bien ordonné. Si $j = 2$, on place (z_1, m_1) à gauche de (z_2, m_2). Si $j > 2$, et si $z_1 \neq z_{j-1} q^{m_{j-1}}$ on place (z_1, m_1) à gauche de (z_j, m_j). Si $j > 2$, $z_1 = z_{j-1} q^{m_{j-1}}$, et si j' est le plus grand indice ≥ 2 tel que $z_1 = z_{j'-1} q^{m_{j'-1}}$ on place (z_1, m_1) à gauche de $(z_{j'-1}, m_{j'-1})$.

Exemples. Pour $\varepsilon > 2$, t de support $1, q$ avec $t(1) = 2, t(q) = 1$, les suites de support t sont par ordre croissant $(1, 1, q), (1, q, 1), (q, 1, 1)$. Les suites en ε-types simples correspondantes sont

$$(1, (1, q)), ((1, q), 1), (q, 1, 1).$$

Les ε-types simples 1 et $(1, q)$ ne sont pas liés, les ε-types simples $q, 1$ sont liés, et 1 précède q. Les 3 suites sont ordonnées, seulement les deux dernières sont bien ordonnées.

Le caractère χ s'identifie à la suite $(r_i = \chi(X_i))$, $1 \leq i \leq n$ de points dans C. On peut appliquer les définitions ci-dessus aux conjugués dans χ par S_n. Un module irréductible de support dans C possède un plus haut poids unique, appelé son *poids maximal.* On peut remplacer "maximal" par "minimal", en appliquant l'involution de Zelevinski. Les démonstrations complexes de Zelevinski [Z1] ou de Rogawski [Rog 2] restent valables et donnent les résultats ci-dessous.

Poids maximal. *1) Un caractère χ de support dans C est le poids maximal H-module simple si et seulement si χ est bien ordonné.*

2) Deux H-modules simples avec le même poids maximal sont isomorphes.

L'application qui associe à un H-modules simple de support dans C son poids maximal, puis le ε-type associé, induit donc *une bijection entre les H-modules simples de support dans C, et les ε-types de support dans C. La conjecture (2.4) est donc vraie dans le cas générique.*

* Contre exemple: ce n'est pas possible pour $(1, \varepsilon - 1) + (q^{\varepsilon - 1})$, dont le support n'est pas générique.

On note $M(\chi)$ le module simple de poids maximal χ, et si $(z_j, m_j)_{1\leq j\leq k}$ est la suite de ε-types simples définie par χ, on note

$$\pi(\chi) = (z_1, m_1) \times \ldots \times (z_k, m_k),$$

la représentation induite par le produit tensoriel des $H_R(m_j, q)$-modules simples de poids maximal (z_j, m_j). Le caractère-poids de $\pi(\chi)$ se calcule comme en (2.13). La proposition suivante permet d'exprimer un sous-quotient irréductible de $I(\chi)$ comme une combinaison linéaire de tels modules, donc de calculer son caractère-poids facilement. Remplacer deux ε-types simples liés par leur *union* $(z, m) \cup (z', m')$ et leur *intersection*, $(z, m) \cap (z', m')$, est appelé une *opération élémentaire.*

Description de $\pi(\chi)$. *1) Les poids ordonnés de $M(\chi)$ sont les poids ordonnés de même ε-type simple que χ.*

2) La multiplicité de $M(\chi)$ dans $\pi(\chi)$ est égale à 1, et les sous-quotients irréductibles de $\pi(\chi)$ sont les $M(\chi')$ où χ' se déduit de χ par une opération élémentaire.

Par exemple, $(z, m) \times (z', m')$ est irréductible si les types ne sont pas liés, et il est de longueur deux, avec deux sous-quotients irréductibles distincts s'ils sont liés, l'un étant $((z, m) \cup (z', m')) \times ((z, m) \cap (z', m'))$.

2.17 Cas régulier .

C'est le cas où χ est distinct de tous ses conjugués par S_n, ou ce qui est équivalent les multiplicités dans χ sont égales à 1, le support de χ est $(1, q, \ldots q^{n-1})$, $n \leq \varepsilon$. Donc χ est générique, sauf si $n = \varepsilon$.

Proposition. *$I(\chi)$, $n \leq \varepsilon$, est sans multiplicités, de longueur $2^n - 2$ si $n = \varepsilon$, de longueur 2^{n-1} si $n < \varepsilon$.*

Preuve. Le cas $n = 2$ (2.11) donne un vecteur propre $A_{s_i}(\chi')$ de A dans $I(\chi)$, de valeur propre $\chi' s_i$ pour tout $1 \leq i < \varepsilon$, et pour tout caractère χ' conjugué à χ. Si $w = s_1 \ldots s_t$ est une décomposition réduite, le produit dans H^o

$$A_w(\chi) = A_{s_1}(\chi(s_2 \ldots s_t)^{-1}) A_{s_2}(\chi(s_3 \ldots s_t)^{-1}) \ldots A_{s_t}(\chi)$$

est non nul [Rog1 2.1 page 448]. C'est donc un vecteur propre pour A, de valeur propre χw^{-1}. Les $A_w(\chi)$ forment une R-base de $I(\chi)$, et $HA_w(\chi) = H^o A_w(\chi)$.

Soit M un H-module simple contenant χ. Donc M est l'unique quotient irréductible $f : I(\chi) \to M$. Les poids de M sont de multiplicité 1, et χw^{-1}, $w \in S_n$, est un poids de M si et seulement si $f(A_w(\chi)) \neq 0$. L'image de $HA_w(\chi)$ est alors égale à M, et l'on doit avoir $A_1(\chi) \subset$

$HA_w(\chi)$, puisque M contient χ. Comme $H_o = HA_1(\chi)$, ceci signifie $H_o = HA_w(\chi) = H^o A_w(\chi)$, i.e. $A_w(\chi)$ est inversible à gauche dans H^o, i.e. $A_{s_t}(\chi), \ldots, A_{s_1}(\chi(s_2 \ldots s_r)^{-1})$ sont tous inversibles à gauche.

Par le cas $n = 2$, ceci est équivalent à $r_{i+1} \neq r_i q^{\pm 1}$ pour tous les s_i qui interviennent. Dans le cas général, on se trouve devant un problème combinatoire résolu par Zelevinski.

On associe à χ un signe $\eta(q^i)$ pour chaque q^i contenu dans le support C de χ. Il est égal à $+1$ si q^{i-1} appartient à C, et précède q^i dans la suite donnant χ, et il est égal à -1 sinon. Les $w \in S_n$ tels que $A_w(\chi)$ est inversible à gauche dans H^o, sont ceux tels que χ et χw^{-1} donnent la même suite de signes [Z1 theorem 2.2 page 177]. Ce sont les poids de M.

Dans le cas générique, pour tout χ régulier de support $(1, \ldots, q^{n-1})$, on a $\eta(1) = -1$ car q^{-1} n'appartient pas au support. Les $n - 1$ signes restant sont possibles, on peut toujours fabriquer une suite dont les éléments sont les q^i, de façon à retrouver ces signes. On a donc 2^{n-1} possibilités. Dans le cas non générique, où le support est le cercle, toutes les suites de ε signes sont permises, sauf deux: celles où tous les signes sont égaux. On a donc $2^n - 2$ possibilités.

Comme on l'a vu en (2.6), les ε-types $\sum(y_i, m_i)$ de support C régulier sont classés par l'ensemble des y_i. Si on met le signe $-$ sur chaque y_i, et le signe $+$ sur les autres points de C, on obtient une bijection entre les bons ε-types de support C et les H-modules simples de support C. Cette bijection est compatible avec la bijection (2.16) dans le cas régulier et générique.

La conjecture (2.4) est vraie dans le cas régulier.

Exemples. Dans le cas générique régulier $n < \varepsilon$, le caractère trivial de poids $(1, q, \ldots, q^{n-1})$ correspond à $\eta(1) = -1$ et tous les autres signes $\eta(q^i)$, $i \neq 1$, égaux à $+1$, le caractère signe de poids $(q^{n-1}, \ldots, 1)$ correspond à tous les signes égaux à -1, donc le ε-type est

$$1 + q + \ldots + q^{n-1}.$$

Dans le cas non générique régulier $\varepsilon = n$,

- les caractères "triviaux" de poids $q^i\chi$ correspondent à $\eta(q^i) = -1$, et tous les autres signes égaux à $+1$, et aux ε-types $q^i(1 \to \ldots \to q^{\varepsilon-1})$,

- les caractères "signes" $q^i(q^{\varepsilon-1}, \ldots, 1)$, correspondent à $\eta(q^i) = +1$, et tous les autres signes égaux à -1, et aux ε-types

$$(q^{i-1}, q^i) + \sum_{j \neq i, i-1} q^j.$$

2.18 Types associés aux caractères de $H_R(n,q)$.

Le caractère trivial χ de poids $(1,\dots,q^{n-1})$ correspond au ε-type simple $(1,m) := (1 \to q \dots \to q^{m-1})$, et le caractère signe de poids $(q^{n-1},\dots,1)$ qui est l'image du caractère trivial par l'involution de Zelevinski, correspond au ε-type $\sum_{i=1}^{n-1} q^i$.

2.19 *La conjecture (2.4) est vraie pour $n = 2$.*

Ceci résulte des cas précédents, puisque pour $n = 2$, on est dans le cas régulier ou générique (2.6), (2.11). De façon explicite, on associe
- au module simple $I(1^2)$ de caractère-poids $2(1,1)$, le type $1+1$,
- au caractère de poids $(1,q)$, le type $1 \to q$,
- au caractère de poids $(q,1)$, le type $q \to 1$ si $\varepsilon = 2$, ou le type $1+q$ si $\varepsilon > 2$.

2.20 Classification des $H_R(3,q)$-modules simples.

On suppose $\varepsilon > 1$.

a) La représentation $I(1,1,q)$ est sans multiplicité de longueur 2, de sous-quotients simples de caractères-poids

$$2(1,1,q) + (1,q,1), \quad 2(q,1,1) + (1,q,1)$$

si $\varepsilon(q) > 2$ (cas générique). Si $\varepsilon(q) = 2$, elle est de longueur 4 avec 3 sous-quotients simples non isomorphes, le caractère $(1,q,1)$ de multiplicité 2, et deux modules simples de dimension 2, de caractère-poids $2(1,1,q),\ 2(q,1,1)$.

b) La représentation $I(1,q,q^2)$ est sans multiplicité de longueur 4, de sous-quotients de caractères-poids

$$(1,q,q^2),\ (q^2,q,1),\ (1,q^2,q) + (q^2,1,q),\ (q,1,q^2) + (q,q^2,1),$$

si $\varepsilon(q) > 3$ (cas régulier générique). Si $\varepsilon(q) = 3$ (cas régulier non générique), elle est sans multiplicité de longueur 6, ses sous-quotients sont les caractères

$$(1,q,q^2),\ (q^2,q,1),\ (1,q^2,q),\ (q^2,1,q),\ (q,1,q^2),\ (q,q^2,1).$$

Preuve. Le seul cas nouveau est la décomposition de $I(1^2,q)$, $\varepsilon = 2$. La réduction du cas générique régulier $I(1,q,q^2)$ modulo $q^2 = 1$ montre que $I(1^2,q)$ a 4 sous-quotients, le caractère $(1,q,1)$ de multiplicité 2, et deux modules M, M' de caractère-poids respectifs $2(1,1,q),\ 2(q,1,1)$. On applique (2.12), comme $I(1,1)$ est irréductible puisque $q \neq 1$, la multiplicité de $(1, 1, q)$ ou de $(q, 1, 1)$ dans un module est nulle ou ≥ 2. Les deux modules M, M' sont donc irréductibles.

2.21 *La conjecture (2.4) est vraie dans le cas $n = 3$..*

a) Si $\varepsilon > 1$, on associe à l'unique module simple $I(1^3)$ de caractère-poids $6(1, 1, 1)$, l'unique ε-type $1 + 1 + 1$ de support 1^3.

b) Si $\varepsilon > 2$, on associe aux modules simples génériques de caractère-poids respectifs $2(1, 1, q) + (1, q, 1)$ et $2(q, 1, 1) + (1, q, 1)$, les ε-types bien ordonnés $(1 \to q) + 1$ et $q + 1 + 1$ (2.16 Exemple).

Si $\varepsilon = 2$, on associe au caractère $(1, q, 1)$ le ε-type $(1 \to q \to 1)$. Le seul cas nouveau se présente avec les modules simples de caractère-poids respectifs $2(1, 1, q)$ et $2(q, 1, 1)$, les bons ε-types associés $(1, q) + 1$ et $(q, 1) + 1$ correspondent aux décompositions en ε-types simples de l'unique poids du module. Il n'y a pas d'autre choix possible.

c) Si $\varepsilon > 3$ on associe aux modules simples génériques de caractère-poids respectifs

$$(1, q, q^2),\ (q^2, q, 1),\ (1, q^2, q) + (q^2, 1, q),\ (q, 1, q^2) + (q, q^2, 1),$$

les types bien ordonnés $(1 \to q \to q^2)$, $q^2 + q + 1$, $q^2 + (1 \to q)$, $(q \to q^2) + 1$, en suivant (2.16). Si $\varepsilon(q) = 3$, on associe aux caractères triviaux $q^i(1, q, q^2)$ les ε-types $q^i(1 \to q \to q^2)$, et aux caractères signes $q^i(q^2, q, 1)$ les ε-types $(q^{i-1} \to q^i) + q^{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2$ modulo 3, par (2.18).

2.22 Le cas $n = 4$.

Lorsque $n = 4$, on a trois cas nouveaux

$$(1^3, q) := (1, 1, 1, q),\ (1^2, (q)^2) := (1, 1, q, q),\ e = 2;$$
$$(1^2, q, q^2) := (1, 1, q, q^2),\ e = 3.$$

Sauf dans le premier cas où ne savons pas classer les modules simples de support avec multiplicités $(1^3, q)$, nous allons démontrer que la conjecture (2.4) est vraie. Nous avons donné tous les détails, les résultats sont indiqués avec $\bullet$. On note $M_1 \times M_2$ le module induit d'un module $M_1 \otimes M_2'$ de $H_R(n_1, q) \times H_R(n_2, q)$, comme en (2.13).

a) $I(1^3, q) = I(1^2, q) \times 1$ a 4 sous-quotients, $(1, q, 1) \times 1$ de multiplicité 2 de caractère-poids

$$2(1, 1, q, 1) + 2(1, q, 1, 1),$$

et deux autres sous-quotients $2(1,1,q)\times 1,\ 2(q,1,1)\times 1$, de caractères-poids

$$6(1,1,1,q)+2(1,1,q,1),\ 6(q,1,1,1)+2(1,q,1,1).$$

Ces trois représentations sont probalement irréductibles. Plus précisément:

- *Pour $\varepsilon = 2$, et pour tout $n \geq 2$, les trois $H_R(n+1,q)$-modules*

$$(1,q,1)\times I(1^{n-2}),\ 2(1,1,q)\times I(1^{n-2}),\ 2(q,1,1)\times I(1^{n-2}),$$

sont probablement irréductibles. Les ε-types correspondant sont nécéssairement $(1\to q\to 1)+1^{n-2},\ (1\to q)+1^{n-1},\ (q\to 1)+1^{n-1}$.

b) $I(1^2,(q)^2) = I(1^2,q)\times q$ a 4 sous-quotients $(1,q,1)\times q$ de multiplicité 2, de caractère-poids

$$(1,q,1,q)+2(1,q,q,1)+(q,1,q,1)$$

et $2(1,1,q)\times q,\ 2(q,1,1)\times q$ de caractères-poids

$$2(1,q,1,q)+4(1,1,q,q)+2(q,1,1,q),\ 2(q,1,1,q)+2(q,1,q,1)+4(q,q,1,1).$$

Il est clair que les deux caractères de poids $(1,q,1,q),\ (q,1,q,1)$ sont sous-quotients de l'induite $(1,q,1)\times q$ du caractère $(1,q,1)\otimes q$. Par un argument déja vu, un sous-quotient qui contient $(1,q,q,1)$ le contient avec une multiplicité ≥ 2, donc $(1,q,1)\times q$ est de longueur 3, avec un sous-quotient π_o de caractère-poids $2(1,q,q,1)$. Les automorphismes de H (2.10) montrent qu'il existe un module simple π_1 de de caractère-poids $2(q,1,1,q)$. Ceci implique que $2(1,1,q)\times q$ ou $2(q,1,1)\times q$ admet π_1 comme sous-quotient. Mais les caractères-poids de ces modules se déduisent l'un de l'autre par l'involution de Zelevinski, et $2(1,q,q,1)$, donc π_1, est fixe par l'involution de Zelevinski, donc π_1 est sous-quotient de chacun. Nous résumons: $I(1^2,(q)^2)$ a une filtration par

- les deux modules de caractère-poids:

$$2(1,q,1,q)+4(1,1,q,q),\ 2(q,1,q,1)+4(q,q,1,1),$$

avec multiplicité 1,

- les modules simples $2(1,q,q,1), 2(q,1,1,q)$, avec multiplicité 2,

- les caractères $(1,q,1,q),\ (q,1,q,1)$. On déduira de la filtration de $I(1^2,(q)^2)$ provenant du cas générique régulier par la réduction $(q^2=1)$ (voir c)), que les caractères sont de multiplicité 4.

- Donc $I(1^2,(q)^2)$ est de longueur 11 avec 6 sous-quotients irréductibles non isomorphes, ayant chacun un unique poids (avec une multiplicité ≥ 0),

- les deux caractères $(1, q, 1, q),\ (q, 1, q, 1)$ de multiplicité 4, associés aux bons ε-types simples $(1, 4) := (1 \to q \to 1 \to q),\ (q, 4) := (q \to 1 \to q \to 1)$,

- les deux modules simples π_o, π_1 de caractère-poids $2(1, q, q, 1)$, $2(q, 1, 1, q)$, de multiplicité 2. Il semble que le bon ε-type $(1 \to q \to 1) + q$ doit correspondre à un sous-quotient simple de $(1, q, 1) \times q$, donc à π_o. Pour la même raison, $(q \to 1 \to q) + 1$ doit correspondre à π_1,

- les deux modules simples de caractère-poids $4(1, 1, q, q),\ 4(q, q, 1, 1)$ de multiplicité 1. La décomposition en ε-types simples des caractères contient un ε-cycle $1 + q$, et suggère que les ε-types correspondant sont respectivement $2(1 \to q),\ 2(q \to 1)$.

c) Dans le cas générique régulier $\varepsilon > 4$, la représentation $I(1, q, q^2, q^3)$ est sans multiplicité de longueur 8, les caractères-poids de ses sous-quotients irréductibles étant les suivants (2.16-17), et ceux déduits par l'involution de Zelevinski:

$$(1, q, q^2, q^3),$$
$$(1, q^2, q, q^3) + (q^2, 1, q, q^3) + (1, q^2, q^3, q) + (q^2, 1, q^3, q) + (q^2, q^3, 1, q)$$
$$(1, q, q^3, q^2) + (1, q^3, q, q^2) + (q^3, 1, q, q^2),$$
$$(q^3, 1, q^2, q) + (1, q^3, q^2, q) + (q^3, q^2, 1, q).$$

Ils sont associés aux types bien ordonnés (2.16) $(1 \to q \to q^2 \to q^3),\ (q^2 \to q^3) + (1 \to q),\ q^3 + (1 \to q \to q^2),\ q^3 + q^2 + (1 \to q)$, et aux types bien ordonnés déduits par l'involution de Zelevinski (2.10): $q^3 + q^2 + q + 1,\ q^3 + (q \to q^2) + 1,\ (q^2 \to q^3) + q + 1,\ (q \to q^2 \to q^3) + 1$.

Dans le cas régulier $\varepsilon = 4$, on déduit de (2.17) que la représentation $I(1, q, q^2, q^3)$ est sans multiplicité de longueur 14:

- les 4 caractères $q^i(1, q, q^2, q^3),\ i = 0, 1, 2, 3$, associés à $q^i(1 \to q \to q^2 \to q^3)$,

- les 4 modules simples de caractères poids $q^i((1, q, q^3, q^2) + (1, q^3, q, q^2))$, $i = 0, 1, 2, 3$, associés à $q^i((1 \to q \to q^2) + q^3)$,

- les 4 modules simples de caractères poids $q^i((q^3, 1, q^2, q) + (q^3, q^2, 1, q))$, $i = 0, 1, 2, 3$, associés à $(q^3 \to 1) + (q \to q^2)$,

- les 2 modules simples de caractères-poids $q^i((1, q^2, q, q^3) + (q^2, q, q^3) + (1, q^2, q^3, q) + (q^2, 1, q^3, q))$, $i = 0, 1$, associés à $q^i(1 + q + (q^2 \to q^3))$.

Par réduction ($q^2 = 1$), on obtient une filtration de $I(1^2, (q)^2)$ par les 4 modules de caractère-poids $(1, q, 1, q),\ 4(1, 1, q, q) + (1, q, 1, q),\ 2(1, q, q, 1) + (q, 1, q, 1),\ 2(q, 1, 1, q) + (1, q, 1, q)$, et les 4 modules déduits par l'involution de Zelevinski. En comparant avec la filtration de $I(1^2, (q)^2),\ \varepsilon = 2$, obtenue en b), on voit que les 3 modules de caractère-poids $2(1, q, 1, q) +$

$4(1,1,q,q)$, $2(q,1,1,q)+(1,q,1,q)$, $2(1,q,q,1)+(1,q,1,q)$ ont un sous-quotient qui est le caractère $(1,q,1,q)$ donc la multiplicité de $(1,q,1,q)$ est 4. Ceci termine la démonstration de b).

d) $I(1^2,q,q^2)$ a une filtration obtenue par réduction ($q^3=1$) du cas générique régulier, de caractère-poids

$$\begin{gathered}(1,q,q^2,1),\\ (1,q^2,q,1)+(q^2,1,q,1)+2(q^2,1,1,q)+(1,q^2,1,q),\\ (1,q,1,q^2)+2(1,1,q,q^2),\\ (1,q^2,1,q)+2(1,1,q^2,q),\end{gathered}$$

et ceux obtenus par l'involution de Zelevinski.

On déduit par réduction à partir du cas générique, que $1\times(q,q^2,1)$ a un sous-quotient de dimension 3, de caractère-poids

$$(q,1,q^2,1)+2(q,q^2,1,1).$$

Il est simple, car il ne peut avoir de sous-quotient de dimension 1. En utilisant les involutions, on voit que les sous-quotients ci-dessus de caractères-poids

$$(1,q,1,q^2)+2(1,1,q,q^2),\ (1,q^2,1,q)+2(1,1,q^2,q),$$

sont simples. On déduit par réduction à partir du cas générique, que $(1,q)\times(q^2,1)$ a un sous-quotient de caractère-poids

$$(1,q^2,q,1)+(q^2,1,q,1)+2(q^2,1,1,q).$$

Cette représentation est irréductible, car la décomposition de $I(1^2,q)$ dans le cas générique, montre qu'un module qui contient le poids $(q^2,1,1,q)$ contient nécéssairement $(q^2,1,1,q)+(1,q^2,1,q)+(q^2,1,q,1)$. On a donc:

• $I(1^2,q,q^2)$ est de longueur 10, le caractère signe et le caractère trivial apparaissant avec multiplicité 2, et les 6 sous-quotients simples restant sont non isomorphes. On associe au

- caractère trivial $(1,q,q^2,1)$, le ε-type $(1\to q\to q^2\to 1)$,

- module simple de caractère-poids $(1,q^2,q,1)+(q^2,1,q,1)+2(q^2,1,1,q)$, le ε-type $(1\to q)+(q^2\to 1)$ selon la règle qu'un sous-quotient simple de $(1,q)\times(q^2,1)$ doit contenir ce type,

- module simple de caractère-poids $(q,1,q^2,1)+2(q,q^2,1,1)$, le ε-type $1+(q\to q^2\to 1)$, selon la règle ci-dessus,

- module simple de caractère-poids $(1,q,1,q^2)+2(1,1,q,q^2)$, le ε-type $(1\to q)+1+q^2$, qui correspond à la décomposition en ε-types simples.

Les autres sous-quotients simples se déduisent de ceux-ci par l'involution de Zelevinski.

sec **3**. **Comparaisongaloisien**−GL(n).

Le cas modérément ramifié du point du vue galoisien correspond au cas de niveau 0 [livre III.3.3] du point de vue $GL(n)$. La comparaison se ramène à la construction de Green-Deligne-Lusztig-Dipper-James [DJ1] des représentations supercuspidales de $GL(n, \mathbf{F}_q)$, grâce à la théorie des types de niveau 0 de Howe-Moy-Bushnell-Kutzko [livre III.2-3].

3.1 Correspondance avec $GL(n, \mathbf{F}_q)$.

La construction de Green-Deligne-Lusztig $\chi \to \pi(\chi)$ définit une bijection des $\mathrm{Gal}_{\mathbf{F}_q}$-orbites des caractères $\chi : \mathbf{F}^*_{q^n} \to \overline{\mathbf{Q}}_l^*$ réguliers sur $\mathbf{F}_q$, sur les classes d'isomorphisme des représentations irréductibles supercuspidales $\pi(\chi)$ de $GL(n, \mathbf{F}_q)$ sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$. Si $l \neq p$, Dipper et James [livre III.2.3, III.2.8-9] ont montré que la réduction modulo l de $\pi(\chi)$ ne dépend que de la réduction $r_l \chi$ modulo l de χ; elle est toujours irréductible, tandis que la représentation irréductible $r_l \sigma(\chi)$ de W_F sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$ associée à χ, peut-être réductible (1.17). Si $\mu : F^*_{q^d} \to \overline{\mathbf{F}}_l^*$ est le caractère régulier sur $\mathbf{F}_q$ tel que $r_l \chi = \mu N$ pour la norme $N : F^*_{q^n} \to F^*_{q^d}$, alors

$$r_l \sigma(\chi) = \oplus_{i=1}^m \sigma(\mu), \quad md = n.$$

La représentation $r_l \chi$ peut ne plus être supercuspidale, car elle est un sous-quotient de l'induite parabolique

$$\times_{i=1}^m \pi(\mu), \quad md = n.$$

La bijection $\sigma(\chi) \to \pi(\chi)$ est compatible avec la réduction modulo l.

Remarque. Si $l = p$, le phénomème inverse se produit: $r_p \chi$ reste régulier sur $\mathbf{F}_q$, la représentation $r_p \sigma(\chi)$ reste irréductible, tandis que $r_p \pi(\chi)$ est réductible. Il serait intéréssant de comprendre ce que ceci reflète.

3.2 Correspondance irréductible galoisien $\leftrightarrow$ supercuspidal $GL(n)$, dans le cas modérément ramifié.

Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique $l \neq p$. Pour $r \in R^*$ et pour $\chi : F^*_{q^n} \to R^*$ régulier sur $\mathbf{F}_q$, notons $\sigma(r, \chi)$ la représentation irréductible modérément ramifiée de dimension n construite en (1.14), et

$$\pi(r, \chi) = \mathrm{ind}_{GL(n,F), F^* GL(n, O_F)} \, \nu_r \sigma(\chi).$$

la représentation irréductible cuspidale de $GL(n,F)$ de niveau 0, i.e. ayant un vecteur invariant par $1 + p_F M(n, O_F)$ [livre III.3.3]. Supposons $R = \overline{\mathbf{Q}}_l$ et $r \in \overline{\mathbf{Z}}_l^*$.

Théorème. *L'application*

$$\sigma(r,\chi) \to \pi(r,\chi), \quad r \in \overline{\mathbf{Z}}_l^*, \ \chi : F_{q^n}^* \to \overline{\mathbf{Q}}_l^*,$$

χ régulier sur $\mathbf{F}_q$, induit une bijection entre les représentations l-entières modérément ramifiées de $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} W_F$ *de dimension n, et les représentations l-entières, de niveau* 0*, cuspidales de* $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{Q}}_l} GL(n,F)$*.*

Cette bijection est compatible avec la réduction modulo l, et induit une bijection entre

- les représentations modérément ramifiées de $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_l} W_F$ *de dimension n, et les représentations de niveau* 0 *supercuspidales de* $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_l} GL(n,F)$*, ainsi qu'entre*

- les représentations semi-simples modérément ramifiées de W_F sur $\overline{\mathbf{F}}_l$, de dimension n, qui se relèvent en des représentations irréductibles sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$, et les représentations de niveau 0 *cuspidales de* $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_l} GL(n,F)$*.*

La preuve consiste à lire la classification et de la réduction modulo l des objets en question, faite ici pour les représentations du groupe de Weil (1.14, 1.18) et dans (livre III.3.10, III.3.16) pour les représentations de $GL(n,F)$. La bijection $\sigma(r,\chi) \to \pi(r,\chi)$ se lit sur la classification. Considérons maintenant la réduction modulo l.

Dans le cas galoisien ou $GL(n,F)$, la réduction modulo l de la représentation ne dépend que des réductions modulo l des paramètres (r,χ). On a (1.18):

$$r_l\sigma(r,\chi) = \oplus_{i=1}^m \nu_q^i \sigma(r,\mu), \quad md = n,$$

avec les notations de (3.1), en notant encore r son image dans $\overline{\mathbf{F}}_l^*$, et $r_l\pi(r,\chi) = \pi(r, r_l\chi)$ est irréductible, cuspidale, et sous-quotient de

$$\times_{i=1}^m \nu_q^i \pi(r,\mu), \quad md = n.$$

Si la conjecture de Deligne-Langlands sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$ (Introduction 6), envoie $\sigma = \sigma(r,\chi)$ identifié à la paire $(\sigma, 0)$ sur $\pi = \pi(r,\chi)$, alors la conjecture sur $\overline{\mathbf{F}}_l$ envoie $(r_l\sigma, 0)$ sur $r_l\pi$. L'irréductibilité de $r_l\sigma$ est équivalente à la supercuspidalité de $r_l\pi$.

Le cas général n'est pas encore bien compris : tout repose sur les "caractères simples θ" qui semblent plus sauvages que simples. Ils correspondent aux représentations irréductibles de P_F; la construction des représentations cuspidales à partir de θ est reflétée par la construction galoisienne (1.23). Les résultats de [livre III.5] indiquent que *la conjecture de Deligne-Langlands: irréductible galoisien $\leftrightarrow$ supercuspidal $GL(n)$, est probablement vraie dans le cas modulaire. Nous l'admettons dans (3.3).* Il reste alors à vérifier cette conjecture lorsque le support (la représentation semi-simple galoisienne, le support supercuspidal pour $GL(n)$) est fixé.

3.3 La correspondance modulaire pour un support donné.

Comment classifier les représentations de $\mathrm{Irr}_R\, GL(n,F)$? Dans le cas R de caractéristique 0 on classifie séparément

- les cuspidales [BK],
- les représentations de support cuspidal donné [Z1].

Dans le cas R de caractéristique > 0, on a classifié les cuspidales et les supercuspidales (livre). Il reste à classifier les représentations de support cuspidal, ou supercuspidal donné. La conjecture de Deligne-Langlands étendue à $\overline{\mathbf{F}}_l$, donnée en 6) dans l'introduction, est supposée classer les représentations de support supercuspidal donné (correspondant à la représentation semi-simple), par les valeurs possibles de l'endomorphisme nilpotent. Nous n'avons qu'un résultat très partiel (qui admet la conjecture de Deligne-Langlands sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$).

Proposition.*La conjecture de Deligne-Langlands modulaire est vraie, dans le cas générique $\varepsilon(q,R^*) > n$, où régulier $\varepsilon(q,R^*) = n$, ou si $n = 2$..*

Preuve. Dans le cas générique, ou banal, cuspidal = supercuspidal = Z-projectif pour tous les sous-groupes de Levi de $GL(n,F)$ [livre III.5.15]. Les arguments de la classification de Zelevinski [Z1] des représentations irréductibles de $GL(n,F)$ de support supercuspidal $\sum \rho_i$ donné sont valables (comme en (2.16)).

Dans le cas régulier, cuspidal = supercuspidal = Z-projectif pour tous les sous-groupes de Levi de $GL(n,F)$, sauf pour les représentations cuspidales de Steinberg $(\chi \det) \otimes \mathrm{St}(1,n) \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_l}\, GL(n,F)$ ($\mathrm{St}(1,n)$ est l'unique sous-quotient générique de la représentation induite du caractère trivial du groupe triangulaire supérieur, $\chi : F^* \to \overline{\mathbf{F}}_l^*$ est un caractère) [livre III.5.14-15]. La classification de Zelevinski est encore valable, sauf pour les représentations de $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_l}\, GL(n,F)$ dont le support supercuspidal est égal à celui d'une représentation $(\chi \det)\otimes\mathrm{St}(1,n)$. On se ramène facilement au cas où χ est trivial. Mis à part la représentation de Steinberg cuspidale $\mathrm{St}(1,n)$, que l'on associe au seul ε-cycle $1+q+\ldots+q^{\varepsilon-1}$ qui n'est pas bon à scalaire multipliclatif près (2.6), ces représentations ont un support cuspidal égal à leur support supercuspidal. Comme $\varepsilon(q, \mathbf{F}_l^*) = n => 1$, les $H_{\overline{\mathbf{F}}_l}(n,q)$-modules simples sont en bijection avec les représentations de $\mathrm{Irr}_R\, GL(n,F)$ ayant un vecteur invariant par le sous-groupe d'Iwahori. Les $H_{\overline{\mathbf{F}}_l}(n,q)$-modules simples ont été classés en (2.17).

Pour $n = 2$ et $\varepsilon(q, \overline{\mathbf{F}}_l) = 1$ (pour $\varepsilon(q, \overline{\mathbf{F}}_l) > 1$, on est dans le cas générique ou régulier si $n = 2$), la conjecture résulte de [Vig1].

Remarque. En général, le problème de la description des composants irréductibles d'une induite d'une représentation irréductible cuspidale est ouvert, même pour $n = 3$.

3.4 Exemples.

Ces exemples indiquent que les ε-types qui ne sont pas bons proviennent des représentations cuspidales non supercuspidales (voir aussi le cas régulier, non générique précédent).

a) *Décomposition de* $1 \times 1 \times \nu \times \ldots \times \nu^{\varepsilon-1}$. Outre les sous-quotients irréductibles de support cuspidal=support supercuspidal, figure le sous-quotient irréductible St où St est le sous-quotient cuspidal de $1 \times \nu \times \ldots \times \nu^{\varepsilon-1}$ [livre III.3.15]. Il correspond au ε-type pas bon $1+1+q+\ldots+q^{\varepsilon-1}$. La conjecture de Deligne-Langlands pour le support $1+1+\nu+\ldots+\nu^{\varepsilon-1}$, sera un corollaire de la conjecture sur les $H_R(n,q)$-modules simples.

b) *Décomposition de* $1 \times 1 \times \nu \times \nu,\ \varepsilon = 2$. Outre les sous-quotients irréductibles de support cuspidal=support supercuspidal, figure ceux de support cuspidal $\mathrm{St} + \mathrm{St}$ ou $\mathrm{St} + 1 + \nu$, et lorsque $l = 2$ le sous-quotient cuspidal St_4 de $\mathrm{St} \times \mathrm{St}$. Dans tous les cas, on peut analyser $\mathrm{St} \times \mathrm{St}$. On obtient:

- si $l \neq 2$, il existe deux sous-quotients irréductibles non isomorphes, de support cuspidal $\mathrm{St} + \mathrm{St}$. On leur associe les ε-types pas bons $(q \to 1) + (1 \to q)$ pour celui qui n'a pas de modèle de Whittaker, et $1 + q + 1 + q$ pour l'autre.

- si $l = 2$, il existe un sous-quotient irréductible de support cuspidal $\mathrm{St} + \mathrm{St}$. On lui associe le ε-type pas bon $(q \to 1) + (1 \to q)$. On associe à St_4 le ε-type pas bon $1 + q + 1 + q$.

Si χ est le caractère trivial de poids $(1, q)$, ou signe de poids $(q, 1)$, la représentation $\mathrm{St} \times \chi$ est irréductible. Ce sont les deux sous-quotients irréductibles de support cuspidal $\mathrm{St} + 1 + \nu$. On leur associe les ε-types pas bons $1 + q + (1 \to q)$ ou $1 + q + (q \to 1)$. On en déduit, avec les résultats précédents que: *La conjecture de Deligne-Langlands est vraie pour le support* $\sum_{i=1}^{n} \nu^{i-1},\ n \leq 4$.

Nous reviendrons sur ce type de questions dans un article ultérieur.

Bibliographie

[Bourbaki A 8] N. Bourbaki,*Algèbre, chapitre 8, Modules et anneaux semi-simples*, Hermann, Paris 1958.

[CR] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of finite groups and associated algebras*, Wiley, 1988.

[De] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, Springer Lecture Notes **349**.

[DJ1] R. Dipper, G.D. James, Identification of the Irreducible Modular Representations of $GL_n(q)$, *J. Algebra*, **104**, (1986), 266-288.

[DJ2] R. Dipper, G.D. James, Representations of Hecke algebras of general linear groups. Proc. London Math. Soc., **52** (1986), 20-52.

[Fr] A. Frohlich, Local fields, Algebraic Number Theory, *edited by J.W.S. Cassels and A. Frohlich*, Thomson book Company Inc., 1967.

[Gro] I. Grojnowski, Representations of affine Hecke algebras (and affine quantum GL_n) at roots of unity, *Internat.-Math.-Res.-Notices* 1994,no.5,215ff., approx. 3pp. (electronic).

[He] G. Henniart, La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$, *Mem. Soc. Math. France*, **11/12** (1988), 497-544.

[Iw] K. Iwasawa, On Galois groups of local fields, *Trans. A.M.S.*, **80** (1955), 448-469.

[JK] G.D. James, A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Addison Wesley, London, 1981.

[KZ] H. Koch, W. Zink, Zur Korrespondenz von Darstellungen der Galoisgruppen un der zentralen Divisionsalgebren uber lokalen Korpern (der zahme Fall), *Math. Nachr.*, **98** (1980), 83-119.

[KM] P. Kutzko, A. Moy, On the local Langlands conjecture in prime dimensions, *Annals of Math.* (1985) 495-517.

[livre] M.-F. Vignéras, Représentations d'un groupe réductif p-adique sur $\overline{\mathbf{F}}_l$, $l \neq p$ (et cuspidales de $GL(n)$), *Preprint* 1987-1995.

[LRS] G. Laumon, M. Rapoport, U. Stuhler, D-elliptic sheaves and the Langlands correspondence, *Invent. Math.*, **113** (1993), 217-338.

[MW] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger, Sur l'involution de Zelevinsky, J. reine angew. Math., **372** (1986), 136-177.

[Moy] A. Moy, Local constants and the tame Langlands correspondance, *Amer. J. Math.*, **108** (1986), no.4, 863-930.

[Ro1] J.D. Rogawski, On modules over the Hecke algebra of a p-adic group, *Invent. Math.*, **79** (1985), 443-465.

[Ro2] J.D. Rogawski, Representations of $GL(n)$ over a p-adic field with an Iwahori-fixed vector, *Israel J. Math.*, **54** (1986), 242-256.

[Se1] J.P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.

[Se2] J.P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[Ta] J. Tate, Number Theoretic background, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. **33** (1979), 3-26.

[Vig1] M.-F. Vignéras, Représentations de $GL(2, F)$ en caractéristique l, F corps p-adique, $p \neq l$, *Compositio Math.*, **72** (1989), 33-66.

[Vig2] M.-F. Vignéras, Sur la conjecture locale de Langlands pour $GL(n, F)$ sur $\overline{\mathbf{F}}_l$, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **I-318** (1994) p.905-908.

[Z1] A.V. Zelevinski, Induced representations of reductive p-adic groups II, *Ann. scient. Ecole Norm. Sup. 4e série,* tome **13** (1980), 165-210.

[Zink] W. Zink, Representation theory of local division algebras, *J. reine angew. Math.* **428**, (1992) 1-44.

U.R.A. 748 , U.F.R. de Math,
Tour 45-55, 5 étage, 2, place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05, France

Received January1995