Intégrales orbitales modulo l pour un groupe réductif p-adique

Marie-France Vignéras

Dédié à F. Hirzebruch, à l'occasion de son 70-ème anniversaire

L'analyse harmonique sur les groupes réductifs p-adiques, développée essentiellement par Harish-Chandra, étudie les distributions invariantes complexes sur le groupe ou sur son algèbre de Lie. Le groupe agit sur lui-même par conjugaison, et sur son algèbre de Lie par la représentation adjointe. Les distributions invariantes sont les formes linéaires sur les coinvariants de l'espace des fonctions complexes localement constantes et à support compact.

Remplacons le corps des nombres complexes par un anneau commutatif intègre où p est inversible. Nous allons étudier les coinvariants du module des fonctions à valeurs dans cet anneau. Nous ne supposons pas le groupe connexe. Nous obtiendrons l'analogue de différents résultats de la théorie de l'analyse harmonique, comme l'existence d'intégrales orbitales pour toute orbite, le théorème de densité des intégrales orbitales, la conjecture de Howe, et le développement en germes de Shalika.

Le résultat essentiel et un peu surprenant est celui-ci :

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique 0, de corps résiduel fini de caractéristique p, et $\underline{G}$ un groupe réductif *non nécessairement connexe* défini sur F, de composante connexe $\underline{G}^o$. On considère le groupe $G = \underline{G}(F)$. Nous notons X le groupe $G^o = \underline{G}^o(F)$ ou son algèbre de Lie. Soit R un anneau commutatif intègre où p est inversible. L'exemple de base est $R = \mathbf{Z}[1/p]$. Le R-module des fonctions, localement constantes et à support compact, est noté $C_c^\infty(X; R)$ et le R-module des G-coinvariants est noté $C_c^\infty(X; R)_G$.

Théorème *Le R-module $C_c^\infty(X; R)_G$ est libre.*

Nous avons voulu traiter simultanément le groupe et l'algèbre de Lie, et ne pas nous resteindre au cas où R est intègre. Nous avons reculé devant la caractéristique : la caractéristique du corps local F est supposée nulle, mais il est très possible que ce soit inutile.

Notre travail a été grandement facilité par la rédaction récente par De Backer et Sally des démonstrations d'un article de Harish-Chandra. Nous les remercions vivement de nous avoir permis d'utiliser leur travail avant sa publication. Nous remercions Waldspurger, De Backer, Bernstein et Harris de leur intêret et de leurs conseils.

C'est un plaisir et un honneur de dédier cet article à F. Hirzebruch, et une occasion pour le remercier de son amitié sans failles depuis l'époque lointaine de son cours au Collège de France en 1974.

A.M.S. classification 22E50, 11S37

1 Généralités

1.a Espace localement profini muni d'une action d'un groupe localement profini.

Soit X un espace localement profini muni d'une action continue d'un groupe localement profini G (on ne suppose pas l'action lisse).

On note $(Y,G) \subset (X,G)$ si $Y \subset X$ est constructible, stable par G, et muni de l'action induite de G. On dira que (Y,G) est ? si $Y \subset X$ est ?. On dit qu'une partie $Y \subset X$ est *relativement compacte modulo* G s'il existe une partie $C \subset X$ compacte tel que $Y \subset G.C$.

On dit que G' est une *extension finie de* G par le groupe fini Q s'il existe une suite exacte de groupes $1 \to G \to G' \to Q \to 1$. Si l'action de G sur X se prolonge en une action continue de G', on dit alors que $(X,G) \subset (X,G')$ est une extension finie.

Si X est un groupe localement profini [Vig I.1], muni d'une loi $\circ$ telle que

$$g(x \circ x') = gx \circ gx' \quad (g \in G, x, x' \in X)$$

on dit que (X,G) est un *groupe localement profini*.

1.b G-coinvariants

Soit R un anneau commutatif (avec unité). Le R-module $C_c^\infty(X;R)$ des fonctions sur X à valeurs dans R, localement constantes (ce que l'on indique par l'exposant $^\infty$) et à support compact (ce que l'on indique par l'indice $_c$), et son dual algébrique $D(X,R) := \mathrm{Hom}_R(C_c^\infty(X;R),R)$ sont munis d'actions naturelles de G, données par

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}x), \quad < g.L, g.f > = < L, f > \tag{1.1}$$

pour tout $f \in C_c^\infty(X;R)$, $L \in D(X;R)$, $g \in G$, $x \in X$. L'action de G sur $C_c^\infty(X;R)$ est lisse (le fixateur dans G d'un élément de V est ouvert). Notons $C_o(X;R)$ le R-sous-module de $C_c^\infty(X;R)$ engendré par les fonctions $g.\phi - \phi$ pour tout $g \in G$, $\phi \in C_c^\infty(X;R)$. Le R-module $C_c^\infty(X;R)$ est engendré par les fonctions caractéristiques 1_C des parties ouvertes compactes de C de X, le sous-module $C_o(X;R)$ est engendré par les $g.1_C - 1_C$ pour $g \in G$ et $C \subset X$ ouvert compact. Nous allons étudier le module des G-coinvariants $C_c^\infty(X;R)_G$. On a la suite exacte canonique

$$0 \to C_o(X;R) \to C_c^\infty(X;R) \to C_c^\infty(X;R)_G \to 0. \tag{1.2}$$

1.c Restriction à un fermé Soit $(Y,G) \subset (X,G)$ fermé. On a la suite exacte canonique

$$0 \to C_c^\infty(X-Y;R) \to C_c^\infty(X;R) \to C_c^\infty(Y;R) \to 0, \tag{1.3}$$

donnée par l'extension par 0 de $X-Y$ à X, et la restriction de X à Y. Le foncteur des G-coinvariants

$$V \to V_G : \mathrm{Mod}_R\, G \to \mathrm{Mod}\, R$$

de la catégorie $\mathrm{Mod}_R\, G$ des représentations lisses de G dans la catégorie Mod_R des R-modules est *covariant et exact à droite* [Vig I.4.7]. Donc la suite exacte (1.3) fournit la suite exacte

$$(1.4) \qquad C_c^\infty(X-Y;R)_G \to C_c^\infty(X;R)_G \to C_c^\infty(Y;R)_G \to 0.$$

Si $(Y,G) \subset (X,G)$ est fermé et ouvert, alors X est l'union disjointe de $X-Y$ et de Y, et

$$(1.5) \qquad C_c^\infty(X;R)_G = C_c^\infty(X-Y;R)_G \oplus C_c^\infty(Y;R)_G.$$

Si $F(R)$ est un R-sous-module de $C_c^\infty(X;R)$, alors l'image de l'application composée

$$(1.6) \qquad F(R) \to C_c^\infty(X;R) \to C_c^\infty(X;R)_G$$

est notée $F(R)_G$. On a la suite exacte

$$(1.7) \qquad 0 \to F(R) \cap C_o(X;R) \to F(R) \to F(R)_G \to 0.$$

1.d G-coinvariants relatifs On suppose que X est un groupe localement profini (1.a). Soit $\mathcal{L}$ un sous-groupe ouvert compact de X. On note $C_c^{\mathcal{L}}(X;R)$ le R-sous-module de $C_c^\infty(X;R)$ formé des fonctions bi-invariantes par $\mathcal{L}$. Il est libre, de base les fonctions caractéristiques des doubles classes de X modulo $\mathcal{L}$. Soit $Y \subset X$ fermé, stable par G. On dit que

$$(1.8) \qquad M_Y^{\mathcal{L}}(R) := (C_c^{\mathcal{L}}(X;R)|_Y)_G$$

est le R-module des G-coinvariants de $C_c^\infty(X,R)$ relatifs à $(Y,\mathcal{L})$. L'union de ces modules est le R-module des G-coinvariants :

$$(1.9) \qquad C_c^\infty(X;R)_G \;=\; \cup_{\mathcal{L}}\ C_c^{\mathcal{L}}(X;R)_G = \;\cup_{Y,\mathcal{L}}\ M_Y^{\mathcal{L}}(R)$$

où $\mathcal{L}$ parcourt une suite décroissante séparée de sous-groupes ouverts compacts $\mathcal{L}$ de X et Y parcourt une suite croissante exhaustive de fermés $(Y,G) \subset (X,G)$.

Restriction Si $(Y',G) \subset (Y,G)$ est une inclusion de fermés de (X,G), et si $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ est une inclusion de sous-groupes ouverts compacts de X, la restriction de Y à Y' et l'inclusion de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}'$ induisent une surjection naturelle $\mathrm{res}_{Y',Y}^{\mathcal{L}}(R)$ et une injection naturelle $\mathrm{inj}_Y^{\mathcal{L},\mathcal{L}'}(R)$

$$\mathrm{res}_{Y',Y}^{\mathcal{L}}(R)\ :\ M_Y^{\mathcal{L}}(R) \to M_{Y'}^{\mathcal{L}}(R), \quad \mathrm{inj}_Y^{\mathcal{L},\mathcal{L}'}(R):\ M_Y^{\mathcal{L}'}(R) \to M_Y^{\mathcal{L}}(R).$$

Pour $T \subset Z \subset Y$, on a la **transitivité** :

$$(1.10) \qquad \mathrm{res}_{T,Y}^{\mathcal{L}} = \mathrm{res}_{T,Z}^{\mathcal{L}} \circ \mathrm{res}_{Z,Y}^{\mathcal{L}}\,.$$

On a une transitivité analogue avec les sous-groupes ouverts compacts.

2 Changement de base *Soient X un espace localement profini, muni d'une action continue d'un groupe localement profini G. Soit $\rho : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs. Alors* *a) L'homomorphisme naturel $C_c^\infty(X;R)_G \otimes S \to C_c^\infty(X;S)_G$ est un isomorphisme.*

b) Avec les hypothèses de (1.d), l'homomorphisme naturel $M_Y^{\mathcal{L}}(R) \otimes S \to M_Y^{\mathcal{L}}(S)$ est un isomorphisme si S est plat sur R.

Preuve a) Le R-homomorphisme surjectif

$$\rho^* : \; C_c^\infty(X;R) \to C_c^\infty(X;S) \quad f \to \rho \circ f$$

envoie $1_{g.C} - 1_C \in C_o(X;R)$ sur $1_{g.C} - 1_C \in C_o(X;S)$, pour tout $g \in G$ et tout $C \subset X$ ouvert compact. Il induit par quotient un R-homomorphisme

$$\rho_G^* : \; C_c^\infty(X;R)_G \to C_c^\infty(X;S)_G.$$

Par produit tensoriel, on obtient un diagramme commutatif, où toutes les flèches sont surjectives :

$$\begin{tikzcd}
C_c^\infty(X;R) \otimes S \arrow[r] \arrow[d, "k"] & C_c^\infty(X;R)_G \otimes S \arrow[d, "k_G"] \\
C_c^\infty(X;S) \arrow[r] & C_c^\infty(X;S)_G
\end{tikzcd}$$

où $k := \rho^* \otimes \mathrm{id}_S$ et $k_G := \rho_G^* \otimes \mathrm{id}_S$. Le noyau de l'application de la première ligne est le S-sous-module engendré par les $(1_{g.C} - 1_C) \otimes 1_S$. Son image par k est le noyau $C_o(X;S)$ de l'application de la seconde ligne. On en déduit que k_G est injectif. Donc k_G est un isomorphisme.

b) Avec les notations de (1.d), on note V_G l'image canonique de

$$j : M_Y^{\mathcal{L}}(R) \otimes S \to C_c^\infty(Y;R)_G \otimes S.$$

L'application j est injective, si S/R est plat. On applique a) à Y au lieu de X, mais on garde les mêmes notations pour les applications. L'isomorphisme k_G induit un isomorphisme de V_G sur $M_Y^{\mathcal{L}}(S)$. En effet, l'image par k de l'image canonique V de $C_c^{\mathcal{L}}(X;R)|_Y \otimes S$ dans $C_c^\infty(Y;R) \otimes S$ est $C_c^{\mathcal{L}}(X;S)|_Y$, et la commutativité du diagramme implique $k(V_G) = M_Y^{\mathcal{L}}(S)$. $\diamond$

2.2 Remarque On dit que X est dénombrable à l'infini si X est union d'une suite de compacts [Bki I.68]. Si X est dénombrable à l'infini, alors on peut montrer que l'homomorphisme canonique $C_c^\infty(X;R) \otimes S \to C_c^\infty(X;S)$ est un isomorphisme.

3 Ensemble quotient

Si P est un ensemble de nombre premiers, on note $\mathbf{Z}[P^{-1}]$ le sous-anneau du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels engendré par les inverses p^{-1} des nombres premiers $p \in P$. Si K est un groupe profini, on note $P(K)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent le pro-ordre de K [Vig I.1.5].

Soit G un groupe localement profini et K un sous-groupe ouvert compact de G. Alors G a une mesure de Haar à gauche dg à coefficients dans $\mathbf{Z}[P(K)^{-1}]$ normalisée par K, i.e. $\mathrm{vol}(K, dg) = 1$ [Vig I.2.3]. Les valeurs du module δ_G de G et le volume d'un sous-groupe ouvert compact de K sont des unités de l'anneau $\mathbf{Z}[P(K)^{-1}]$.

Soit R un anneau commutatif. On dit que le pro-ordre de K est inversible dans R si l'homomorphisme canonique $\mathbf{Z} \to R$ s'étend en un homomorphisme d'anneaux

$$\mathbf{Z}[P(K)^{-1}] \to R. \tag{3.1}$$

Alors G a une R-mesure de Haar à gauche normalisée par K, image de la $\mathbf{Z}[P(K)^{-1}]$-mesure de Haar dg. C'est un générateur du R-module libre des R-mesures de Haar à gauche sur G. Le R-module de G est l'image du module par $\mathbf{Z}[P(K)^{-1}] \to R$. On le note toujours δ_G.

Théorème *Soient G un groupe localement profini, R un anneau commutatif intègre tel qu'il existe un sous-groupe ouvert compact K_R de G de pro-ordre inversible dans R, et $H \subset G$ un sous-groupe fermé tel que le R-module de H soit la restriction à H du R-module de G :*

$$\delta_H = \delta_G|_H. \tag{3.2}$$

Alors le R-module des G-coinvariants $C_c^\infty(G/H; R)_G$ est libre de rang 1.

Preuve On déduit de [Vig I.2.8] que le dual algébrique de $C_c^\infty(G/H; R)_G$ est libre de rang 1, ce qui est une propriété plus faible. On va montrer que

$$C_c^\infty(G/H; R) = R1_{K_R H} + C_o(G/H; R). \tag{3.3}$$

Admettons-le pour l'instant, et terminons la démonstration. Le R-module $C_c^\infty(G/H; R)_G$ est engendré par l'image de $1_{K_R H}$, et s'identifie au quotient R/I, où I est l'idéal de R tel que

$$R1_{K_R H} \cap C_o(G/H; R) = I1_{K_R H}$$

Le dual algébrique de R/I est libre de rang 1. Donc $I = 0$ car R est intègre, et $C_c^\infty(G/H; R)_G$ est libre de rang 1.

Démontrons (3.3). Les fonctions caractéristiques 1_{gKH} des ensembles gKH pour tout $g \in G$ et pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset K_R$ distingué, engendrent $C_c^\infty(G/H; R)$. On a

$$1_{KH} - 1_{gKH} \in C_o(G/H; R),$$

et l'ensemble $(H \cap K_R)K$ est un sous-groupe de K_R, d'indice $m(K_R, K)$ inversible dans R. Une décomposition disjointe

$$K_R = \cup\, k(H \cap K_R)K$$

induit une décomposition disjointe

$$K_R H = \cup\, kKH.$$

On a donc

$$1_{K_R H} - m(K_R, K)1_{KH} \in C_o(G/H; R).$$

On en déduit (3.3). $\diamond$

4 Nombre fini d'orbites *Soit X un espace localement profini dénombrable à l'infini, muni d'une action continue d'un groupe localement profini G, telle que pour tout $x \in X$ l'application $g \to g.x : G \to G.x$ est ouverte. Soit R un anneau commutatif intègre tel qu'il existe un sous-groupe ouvert compact K_R de G de pro-ordre inversible dans R. On suppose que*

1) Pour tout $x \in X$ de centralisateur $C_G(x)$ dans G, le $\mathbf{Q}$-module de $C_G(x)$ soit la restriction à $C_G(x)$ du $\mathbf{Q}$-module de G :

$$\delta_{C_G(x)} = \delta_G|_{C_G(x)}.$$

2) X est l'union d'un nombre fini r d'orbites

$$\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$$

rangées, telles que $\mathcal{X}_i$ est ouverte dans $\cup_{j \geq i} \mathcal{X}_j$, pour tout $1 \leq i \leq r$.

Alors le R-module $C_c^\infty(X; R)_G$ admet r générateurs.

3) Supposons que r est égal à la dimension $r(0)$ de $C_c^\infty(X; E)_G$ pour un corps commutatif E de caractéristique 0. Alors le R-module $C_c^\infty(X; R)_G$ est libre de rang r.

Pour $x \in X$, l'application $g \to g.x : G \to G.x$ induit un homéomorphisme [Bki III.12 §2 Prop.15]

$$G/C_G(x) \simeq G.x.$$

Lorsque X n'a qu'une orbite, on retrouve le théorème (3).

Preuve On démontre par induction sur le nombre r d'orbites que $C_c^\infty(X; R)_G$ admet r générateurs. Soit $\mathcal{X}$ une orbite ouverte. Alors $Y = X - \mathcal{X}$ est une partie fermée stable par G ayant $r-1$ orbites. Comme $C_c^\infty(\mathcal{X}; R)_G$ est libre de rang 1, et comme $C_c^\infty(Y; R)_G$ admet $r-1$ générateurs par hypothèse d'induction, la suite exacte (1.4) montre que $C_c^\infty(X; R)_G$ admet r générateurs.

Supposons $r(0) = r$. Le module $C_c^\infty(X; \mathbf{Z}[1/P(K_R)^{-1}])_G$ sur l'anneau principal $\mathbf{Z}[1/P(K_R)^{-1}]$, de rang $r(0) = r$, admettant r générateurs, est libre. Par changement de base (2), le R-module $C_c^\infty(X; R)_G$ est libre de rang r. $\diamond$

Nappes La condition 2) du théorème sur la géométrie des orbites signifie que X est une union disjointe finie de *nappes* G-invariantes

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_t \tag{4.1}$$

où X_i est l'union finie des orbites ouvertes dans le fermé

$$Y_i := X_i \cup \ldots \cup X_t \tag{4.2}$$

pour tout $1 \leq i \leq t$. En particulier, les orbites de X_1 sont ouvertes et celles de $X_t = Y_t$ sont fermées. On a les suites exactes

$$0 \to C_c^\infty(X_i; R) \to C_c^\infty(Y_i; R) \to C_c^\infty(Y_{i+1}; R) \to 0. \tag{4.3}$$

Les suites de R-modules

$$0 \to C_c^\infty(X_i; R)_G \to C_c^\infty(Y_i; R)_G \to C_c^\infty(Y_{i+1}; R)_G \to 0 \tag{4.4}$$

(on pose $Y_{i+1} = 0$ si $i = t$) sont appelées les *suites de G-coinvariants associées aux nappes*. La maximalité du rang dans le théorème implique que ces suites sont exactes. La preuve montre que les R-modules figurant dans ces suites sont libres.

Proposition *Soient $(Y, G) \subset (X, G)$ localement fermé, $(X, G) \subset (X, G')$ une extension finie (1.a). Si (X, G, R) vérifie les trois conditions du théorème, alors (Y, G, R) et (X, G', R) les vérifient aussi.*

Preuve a) La condition sur les $\mathbf{Q}$-modules des centralisateurs reste vérifiée, car $C_G(x) \subset C_{G'}(x)$ est d'indice fini pour tout $x \in X$ et les valeurs d'un $\mathbf{Q}$-module sont des nombres rationnels positifs.

b) La géométrie des orbites reste la même. C'est clair pour Y, car pour toute orbite $\mathcal{X} \subset Y$, sa fermeture $\overline{\mathcal{X}}$ est contenue dans Y.

C'est un peu moins évident pour G'. Il est clair que l'application naturelle $G' \to G'.x$ est ouverte pour tout $x \in X$, car sa restriction au sous-groupe ouvert G est ouverte. Soit $\mathcal{X}'$ une orbite dans (X, G'). C'est une union finie de G-orbites $\mathcal{X}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ qui sont conjuguées par G'. La fermeture $\overline{\mathcal{X}}'$ est l'union des fermetures $\overline{\mathcal{X}}_i$ de ces G-orbites. Donc $\overline{\mathcal{X}}'$ est une union de nappes comme en (4.1), pour l'action de G. Les nappes sont stables par G', et $\overline{\mathcal{X}}'$ est une union de nappes pour l'action de G'.

c) La condition de maximalité du rang reste vérifiée. Soit E un corps commutatif de caractéristique 0. La maximalité du rang est équivalente à l'injectivité de l'application

$$C_c^\infty(\mathcal{X}; E)_G \to C_c^\infty(\overline{\mathcal{X}}; E)_G$$

pour tout $\mathcal{X}$. Donc la maximalité du rang est claire pour (Y, G, E).

C'est un peu moins évident pour G'. Soit $\mathcal{X}'$ une orbite dans (X, G') comme en b). Les orbites $\mathcal{X}_i$ pour $i \geq 2$ ne rencontrent pas $\overline{\mathcal{X}}_1$. On choisit une forme linéaire D_1 sur $C_c^\infty(\overline{\mathcal{X}}_1; E)_G$ non nulle sur $C_c^\infty(\mathcal{X}_1; E)$. On identifie D_1 à une forme linéaire sur $C_c^\infty(\overline{\mathcal{X}}'; E)_G$ nulle hors de $\overline{\mathcal{X}}_1$. Notons $1 = g_1, \ldots, g_r$ des éléments de G' représentant les classes de G' modulo le centralisateur de $\mathcal{X}_1$ dans G'. La somme $D = g_1 D_1 + \ldots + g_r D_1$ est une forme linéaire sur $C_c^\infty(\overline{\mathcal{X}}'; E)_{G'}$, non nulle sur $C_c^\infty(\mathcal{X}'; E)$. Donc la maximalité du rang est démontrée pour (X, G', E). $\diamond$

5 Dual Une forme linéaire sur $C_c^\infty(X; R)$ est appelée une *R-distribution sur X*. Le R-module des R-distributions sur X, noté $D(X; R)$, est muni d'une action naturelle (non lisse) de G (1.1). Le R-module $D(X; R)^G$ des distributions G-invariantes sur X s'identifie canoniquement au dual de $C_c^\infty(X; R)_G$:

$$D(X; R)^G \simeq \mathrm{Hom}_R(C_c^\infty(X; R)_G, R)$$

Soit $(Y, G) \subset (X, G)$ fermé. On a la suite exacte duale de (1.4)

$$0 \to D(Y; R)^G \to D(X; R)^G \to D(Y - X; R)^G. \qquad (5.1)$$

Le R-module des R-distributions G-invariantes sur X de *support contenu dans Y* est l'image de $D(Y; R)^G$.

Une R-distribution G-invariante $D_{\mathcal{X}}$ sur X de support la fermeture $\overline{\mathcal{X}} \subset X$ d'une orbite $\mathcal{X}$ sera appelée une *R-intégrale orbitale sur $\mathcal{X}$*. On dit que $D_{\mathcal{X}}$ est *admissible* si sa restriction à $C_c^\infty(\mathcal{X}; R)$ engendre le R-module libre $D(\mathcal{X}; R)^G$.

Existence d'intégrales orbitales *On suppose que (X, G, R) vérifient les trois conditions du théorème (4). Alors pour chaque orbite $\mathcal{X}$, il existe une R-intégrale orbitale admissible $D_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$. On a*

$$D(X;R)^G = \oplus_{\mathcal{X}} R\, D_{\mathcal{X}}. \tag{5.2}$$

Remarque Pour toute orbite $\mathcal{X}$, l'intégrale orbitale $D_{\mathcal{X}}$ n'est pas unique. On peut la remplacer par n'importe quel élément de

$$R^* D_{\mathcal{X}} + D(Y;R)^G \tag{5.3}$$

où R^* est le groupe des unités de R, et $Y = \overline{\mathcal{X}} - \mathcal{X}$. Les intégrales orbitales sur $\mathcal{X}$ sont les éléments de $(R - \{0\}) D_{\mathcal{X}} + D(Y;R)^G$.

Preuve La fermeture $\overline{\mathcal{X}}$ vérifie les conditions du théorème 4. La suite de R-modules libres

$$0 \to C_c^\infty(\mathcal{X};R)_G \to C_c^\infty(\overline{\mathcal{X}};R)_G \to C_c^\infty(\overline{\mathcal{X}} - \mathcal{X};R)_G \to 0$$

est exacte. Il existe donc une intégrale orbitale admissible $D_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$. Les suites exactes de G-coinvariants de modules libres associées aux nappes (4.4) montrent

$$D(Y_i;R)^G = \oplus_{\mathcal{X} \subset X_i} R\, D_{\mathcal{X}} \ \oplus D(Y_{i+1};R)^G$$

pour tout $1 \leq i \leq t-1$,et $D(Y_t;R)^G = \oplus_{\mathcal{X} \subset X_t} R\, D_{\mathcal{X}}$. . On en déduit (5.2) $\diamond$

6 Densité des intégrales orbitales

Soient R un anneau commutatif, V un R-module, I un ensemble, et $(v_i^*)_{i \in I}$ des formes linéaires sur V. On dit que les formes linéaires $(v_i^*)_{i \in I}$ forment un ensemble *dense* dans le dual de V, si tout $v \in V$ qui annule v_i^* pour tout $i \in I$, est nul. Si R est un corps, il est équivalent de dire que pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie $W \subset V$, la restriction à W des $(v_i^*)_{i \in I}$ contient une base du dual de W.

Théorème *Soit X un espace localement profini muni d'une action continue d'un groupe localement profini G, et soit R un anneau commutatif intègre tel qu'il existe un sous-groupe ouvert compact K_R de G de pro-ordre inversible dans R. On suppose que*

1) Il existe une application continue $p : X \to \mathcal{S}$ de X dans un espace localement profini $\mathcal{S}$, telle que les fibres $X_\int$, $\int \in \mathcal{S}$, soient stables par G.

Alors les restrictions aux fibres fournissent une application injective

$$C_c^\infty(X;R)_G \to \prod_{\int \in \mathcal{S}} C_c^\infty(X_\int;R)_G. \tag{6.1}$$

2) Les fibres $X_\int$, $\int \in \mathcal{S}$, vérifient les conditions du théorème (4).

Alors, pour chaque orbite $\mathcal{X} \subset X$, il existe une intégrale orbitale admissible $D_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$, et les $D_{\mathcal{X}}$ pour toute orbite $\mathcal{X} \subset X$ forment un ensemble dense dans $D(X;R)^G$.

3) La topologie de X admet une base dénombrable. Alors

a) Le R-module $C_c^\infty(X;R)_G$ est libre.

b) Si X est un groupe localement profini, avec les hypothèses de (1.d), le R-module $M_Y^{\mathcal{L}}(R)$ est libre.

Preuve 1) Soit $f \in C_c^\infty(X;R)$ d'image 0 dans $C_c^\infty(X_\int;R)_G$ pour tout $\int \in \mathcal{S}$. Comme $(X_\int, G) \subset (X,G)$ est fermé, toute fonction de $C_o(X_\int;R)$ est la restriction d'une fonction de $C_o(X;R)$. Sur $X_\int$, la fonction f est égale à une fonction $\phi \in C_o(X;R)$. Le support de $f-\phi$ est un compact C qui ne rencontre pas $X_\int$. L'image $p(C)$ de C dans $\mathcal{S}$ ne contient pas $\int$. Il existe un voisinage ouvert et fermé de $\int$ dans $\mathcal{S}$ qui ne rencontre pas $p(C)$. L'image inverse $V_\int$ de ce voisinage dans X est ouvert, fermé, stable par G, et contient $X_\int$. On a $f=\phi$ sur $V_\int$.

Le support de f est compact, donc recouvert par un ensemble de $V_\int$ pour $\int$ dans une partie finie T de $\mathcal{S}$. Pour toute partie non vide J de T, l'intersection

$$V_J = \cap_{\int \in J} V_\int$$

est ouverte fermée et stable par G, la restriction f_J de f à V_J appartientà $C_o(V_J;R) \subset C_o(X;R)$, et l'on a

$$f = -\sum (-1)^{|J|} f_J.$$

Donc $f \in C_o(X;R)$.

2) résulte de 1) et de (4), (5).

3) a) Si la topologie de X admet une base dénombrable, alors [Bki I.5, §1 no4 def.6] X est dénombrable à l'infini, et $C_c^\infty(X;E)$ est de dimension dénombrable, pour tout corps commutatif E.

Par le changement de base (2) il suffit de montrer que $C_c^\infty(X;R)_G$ est libre pour $R = \mathbf{Z}[1/P(K_R)^{-1}]$. L'anneau R est alors principal, de corps des fractions $\mathbf{Q}$. Le R-module $C_c^\infty(X;R)_G$ est sans torsion et ne contient pas de droite (de $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension 1). Un R-module sans torsion est plat, et $C_c^\infty(X;R)_G$ s'identifie avec son image dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $C_c^\infty(X;\mathbf{Q})_G$ de dimension dénombrable. On a $C_c^\infty(X;\mathbf{Q})_G = C_c^\infty(X;R)_G \otimes_R \mathbf{Q}$.

Il suffit de démontrer que [Vig1, I.Appendice C.4] : pour tout $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel $V \subset C_c^\infty(X;\mathbf{Q})_G$ de dimension finie, le R-module $M := V \cap C_c^\infty(X;R)_G$ est contenu dans un R-module libre de V de rang $\dim V$ et contient une base de V. Comme $\mathbf{Q}$ est le corps des fractions de R, si (f_i) dans $C_c^\infty(X;R)$ relève une base (v_i) de V sur $\mathbf{Q}$, on peut choisir $r \in R$ tel que les valeurs des (rf_i) appartiennent à R, donc $(rv_i) \in M$ est une base de V.

La densité des intégrales orbitales sur X implique que le dual de V a une base $(D_1, \ldots, D_n)$ formée de restrictions à V d'intégrales orbitales. L'image de M par une intégrale orbitale est contenue dans R. Soit $(D_1^*, \ldots, D_n^*)$ la base duale dans V. Alors $m \in M$ s'écrit $m = \sum D_i(m) D_i^*$ avec $D_i(m) \in R$, et $M \subset \sum R D_i^*$.

b) Un anneau intègre a une caractéristique 0 ou $l > 0$. Posons $R_o = \mathbf{Z}[1/P(K_R)^{-1}]$ si la caractéristique de R est 0 et $R_o = \mathbf{F}_l$ (le corps fini à l éléments) si la caractéristique de R est $l > 0$. L'extension R/R_o est plate, donc par changement de base (2), il suffit de montrer que R-module $M_Y^{\mathcal{L}}(R_o)$ est libre. Un sous-module d'un module libre sur un anneau principal est libre. Donc $M_Y^{\mathcal{L}}(R_o)$ est libre, si $C_c^\infty(X;R_o)_G$ est libre. $\diamond$

Proposition *Soit $(X, G, R, p : X \to \mathcal{S})$ vérifiant les conditions du théorème. Alors,*

a) Pour tout $(Y, G) \subset (X, G)$ localement fermé, $(Y, G, R, p|_Y : Y \to p(Y))$ vérifie les conditions du théorème.

b) Pour toute extension finie $(X, G) \subset (X, G')$ telle que $Q := G'/G$ agit sur S par une action régulière, p est G'-équivariant, on note $S' = S/Q$ et $p' : X \to S'$ le composé de p avec la surjection $S \to S'$. Alors $(X, G', R, p' : X \to S')$ vérifie les conditions du théorème.

Preuve Evident. $\diamond$

7 Conjecture de Howe et développement en germes de Shalika

Théorème *On suppose que (X, G) est un groupe localement profini, et que $(X, G, R, p : X \to \mathcal{S})$ vérifie les trois conditions de (6). Soit $\int \in \mathcal{S}$ de fibre $X_\int \subset X$, et $\mathcal{L} \subset X$ un sous-groupe $\mathcal{L} \subset X$ ouvert compact.*

1) L'homomorphisme naturel

$$M^{\mathcal{L}}_{X_\int}(R) \to C^\infty_c(X_\int; R)_G$$

est un isomorphisme, si $\mathcal{L}$ est assez petit.

2) On suppose que la dimension $r^{\mathcal{L}}_Z(0)$ du E-espace vectoriel $M^{\mathcal{L}}_Z(E)$ est finie pour un $(Z, G) \subset (X, G)$ ouvert, fermé, relativement compact modulo G, contenant $X_\int$, et pour un corps commutatif E de caractéristique 0.

Alors, il existe $(Y, G) \subset (X, G)$ ouvert, fermé, relativement compact modulo G, contenant $X_\int$, tel que le foncteur de restriction

$$res^{\mathcal{L}}_Y(R) : M^{\mathcal{L}}_Y(R) \to M^{\mathcal{L}}_{X_\int}(R).$$

est un isomorphisme.

Preuve 1) Le $\mathbf{Z}[1/p]$-module $C^\infty_c(X_{G.s}; \mathbf{Z}[1/p])_G$ est (libre) de type fini (4), engendré par les image f_C des restrictions à $X_\int$ de 1_C, pour un nombre fini de $C \subset X$ ouverts compacts. On choisit comme on le peut, $\mathcal{L}$ sous-groupe ouvert compact, tel que les C sont bi-invariants par $\mathcal{L}$. Par changement de base $\rho : \mathbf{Z}[1/p] \to R$ (2), les $\rho(f_C)$ engendrent le R-module $C^\infty_c(X_{G.s}; R)_G$. Donc homomorphisme naturel

$$M^{\mathcal{L}}_{X_\int}(R) \to C^\infty_c(X_\int; R)_G$$

est un isomorphisme.

2) On déduit de (6) que les R-modules $M^{\mathcal{L}}_Y(R)$ et $M^{\mathcal{L}}_{X_\int}(R)$ sont libres. Par changement de base (2), il suffit de démontrer 2) pour l'anneau R_o égal à $\mathbf{Z}[1/P_R]$ ou le corps fini $\mathbf{F}_l$.

Le changement de base de $\mathbf{Z}[1/P_R]$ à E (évidemment l'extension est plate) montre que le $\mathbf{Z}[1/P_R]$-module libre $M^{\mathcal{L}}_Z(\mathbf{Z}[1/P_R])$ est de type fini. L'espace vectoriel $M^{\mathcal{L}}_Z(\mathbf{F}_l)$ est un quotient de $M^{\mathcal{L}}_Z(\mathbf{Z}[1/P_R]) \otimes \mathbf{F}_l$ (voir la preuve du changement de base (2)). Donc la dimension de $M^{\mathcal{L}}_Z(\mathbf{F}_l)$ est finie, elle ne dépend que de l, et $\leq r^{\mathcal{L}}_Z(0)$

Comme R_o est noetherien, le noyau de la restriction $res^{\mathcal{L}}_{X_\int, Z}$ est de type fini. La preuve de 1) en (6) montre qu'il existe Y ouvert fermé stable par G tel que

$X_f \subset Y \subset Z$ et $res^{\mathcal{L}}_{Y,Z}(R)$ annule $\mathrm{Ker}\, r^{\mathcal{L}}_{X_f,Z}(R)$. Par transitivité, le noyau de $\mathrm{res}^{\mathcal{L}}_{X_f,Y}(R)$ est nul. $\diamond$

Remarque Si $\mathcal{L}$ est assez petit, $r^{\mathcal{L}}_Y(0) = r^{\mathcal{L}}_Y(l)$ est le nombre (fini) d'orbites de X_f. A priori, le choix de Y dépend de l.

Dans le théorème, on a quatre conditions : les trois conditions du théorème de (6) et la nouvelle condition 2).

Proposition *Si $(X, G, R, p : X \to \mathcal{S})$ vérifie les quatres conditions du théorème, pour toute extension finie $(X, G) \subset (X, G')$ comme dans la proposition de (6), $(X, G', R, p' : X \to \mathcal{S}')$ vérifie les quatres conditions du théorème.*

Preuve En effet, une partie ? relativement compacte modulo G' est relativement compacte modulo G. Le sous-espace $M^{\mathcal{L}}_?(E)'$ pour G' est l'image de l'espace $M^{\mathcal{L}}_?(E)$ pour G par l'application naturelle $C^\infty_c(Y; R)_G \to C^\infty_c(Y; R)_{G'}$. Donc si $M^{\mathcal{L}}_?(E)$ est de dimension finie, le quotient $M^{\mathcal{L}}_?(E)'$ est de dimension finie. $\diamond$

8 Applications aux groupes réductifs p-adiques et à leurs algèbres de Lie

On considère un "groupe réductif p-adique" $G = \underline{G}(F)$ *non nécessairement connexe* comme dans l'introduction. On applique les résultats des paragraphes précédents à (X, G, R) où X est le groupe localement profini égal à la partie connexe $G^o := \underline{G}(F)$ ou $X = \mathrm{Lie}\, G = \mathrm{Lie}\, G^o$ muni de l'action continue de G par conjugaison ou par la représentation adjointe, et R un anneau commutatif intègre où p est inversible. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des orbites semi-simples de X, $p : X \to \mathcal{S}$ l'application qui associe à $x \in X$ l'orbite de la partie semi-simple de x.

Théorème *$(X, G, R, p : X \to \mathcal{S})$ vérifie les conditions du théorème d'existence et de densité des intégrales orbitales (6), de la conjecture de Howe et du développement en germes de Shalika (7).*

Preuve Les propositions des paragraphes 6 et 7 permettent de se ramener au cas connexe. Il est bien connu que :

1) La topologie de X admet une base dénombrable.

2) L'action de G sur X est unimodulaire, et pour tout $x \in X$ l'application $g \to g.x : G \to G.x$ est ouverte ([B] III.9.1).

3) Les centralisateurs $C_G(x)$ sont unimodulaires.

4) L'application $X \to X_{ss}$ qui associe à $x \in X$ sa partie semi-simple est continue.

5) Les fibres de p vérifie la condition de géométrie des orbites du théorème (4) ([HC-VD lemma 31, page 71] [HC-DBS 4.10, 4.13]). Le prolongement continu des intégrales orbitales complexes [Rao] implique la condition de maximalité.

6) La condition de finitude du rang des G-coinvariants relatifs du théorème (7) est impliquée par la conjecture de Howe [HC-DBS], [C], [W].

7) Si s, s' sont semi-simples, alors $G.s, G.s'$ sont fermés. Si $G.s \cap G.s' = \emptyset$, soit $V_s \subset X$ un voisinage ouvert compact de s contenu dans $X - G.s'$. Alors $X - G.V_s$ est un voisinage ouvert et fermé de $G.s'$.

Le sous-ensemble $X_{ss} \subset X$ des éléments semi-simples est fermé, stable par G. On le munit de la topologie induite, et de l'action de G induites par (X, G). On munit S de la topologie quotient. L'application p est continue, comme composée d'applications continues $p : X \to X_{ss} \to S$. Il résulte de 7) que S est localement compact et totalement discontinu [Bki I.80, §10, prop. 10]. $\diamond$.

Remarque Les autres résultats classiques (la densité des intégrales orbitales régulières, ou des transformées de Fourier des intégrales orbitales sur l'algèbre de Lie restreintes aux éléments réguliers, l'indépendance linéaire des germes), ne sont pas valables sans restriction sur R. Une conséquence du théorème est qu'ils sont valables si la caractéristique de R n'appartient pas à un certain ensemble fini de nombres premiers [Vig]'.

Références

[Bki] Bourbaki N. Topologie Générale. Chapitre 1 à 4. Hermann. Paris 1971. Benjamin, New-York 1969.

[B] Borel Armand Linear Algebraic Groups. Benjamin, New-York 1969.

[C] Clozel L. Orbital integrals on p-adic groups: A proof of the Howe conjecture. Annals of Mathematics 129 (1989) 237-251.

[HC-DBS] Harish-Chandra. Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups. Collected Papers IV, Springer 1984, 371-438. Notes by DeBacker-Sally 1997.

[HC-VD] Harish-Chandra. Notes by G. van Dijk. Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups. Lecture Notes in Mathematics 162 Springer-Verlag 1970.

[Rao] Rao R. Orbital integrals in reductive groups. Ann. of Math. 96 (1972) 505-510.

[Vig] Vignéras M.-F. Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$. Progress in Math 137. Birkhauser 1996.

[Vig]' Vignéras M.-F. Premiers réguliers de l'analyse harmonique mod l d'un groupe réductif p-adique. Preprint 1998.

[W] Waldspurger J.-L. Une formule des traces locales pour les algèbres de Lie p-adiques. J. reine angew. Math. 465 (1995), 41-99.

Marie-France Vigneras
Université de Paris 7
UFR de Mathématiques
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France
email: vigneras@math.jussieu.fr