REPRÉSENTATIONS DES QUATERNIONS DE NORME 1

GUY HENNIART ET MARIE-FRANCE VIGNÉRAS

Abstract. Let p be a prime number, F a local field with finite residue field of characteristic p, D the quaternion division algebra with centre F, and R an algebraically closed field, of any characteristic car_R. We classify the smooth irreducible R-representations π of the group D^1 of elements of D^* with reduced norm 1. Such a π occurs in the restriction of a smooth irreducible R-representation Π of D^*. When the dimension of Π is > 1, following our previous work in the case of $SL_2(F)$, we show that the restriction of Π to D^1 is irreducible or the sum of two irreducible representations. When $\mathrm{car}_R \neq p$, that restriction is the sum of two irreducible equivalent representations if and only if the R-representation of $GL_2(F)$ corresponding to Π via the Jacquet-Langlands correspondence restricts to $SL_2(F)$ as a sum of four inequivalent irreducible representations (this is never the case if $\mathrm{car}_R = 2$).

Résumé. Soit p un nombre premier, F un corps local non-archimédien de corps résiduel fini de caractéristique p, D le corps de quaternions de centre F, et R un corps algébriquement clos de caractéristique car_R arbitraire. Nous classons les R-représentations lisses irréductibles π du groupe D^1 des quaternions de norme réduite 1. Une telle représentation π est contenue dans la restriction à D^1 d'une R-représentation lisse irréductible Π de D^*. Lorsque la dimension de Π est > 1, nous démontrons que la restriction de Π est irréductible ou somme de deux représentations irréductibles. Si $\mathrm{car}_R \neq p$, cette restriction est somme de deux représentations irréductibles isomorphes si et seulement la représentation de $GL_2(F)$ correspondant à Π par la correspondance de Jacquet-Langlands se restreint à $SL_2(F)$ comme une somme de quatre représentations irréductibles non isomorphes (ce n'est jamais le cas si $\mathrm{car}_R = 2$).

Plan

Date: December 13, 2025.

2010 *Mathematics Subject Classification.* primary 22E50, secondary 11F70.

Key words and phrases. Modular irreducible representations, L-packets, Whittaker spaces, Local Langlands correspondence.

1. Introduction

Les conjectures que Langlands a formulées à partir des années 1960 structurent une partie importante de la théorie des nombres moderne. Dans le cadre où le corps de base F est un corps local non-archimédien à corps résiduel fini, elles relient les représentations irréductibles complexes d'un groupe réductif $G(F)$ à des paramètres de nature galoisienne, à valeurs dans un groupe dual de G. Le développement des techniques de congruence impose de remplacer les coefficients complexes par un corps algébriquement clos plus général R. Hors le cas où G est un tore, qui se déduit de la théorie du corps de classes, le premier cas à considérer est celui de $G = SL_2$. Nous avons examiné ce cas en grand détail dans un article précédent [HV25]. Le présent article traite le cas compagnon de la forme intérieure donnée par le groupe de quaternions de norme 1 sur F. Plus précisément, nous fixons un nombre premier p et un corps local non archimédien F de caractéristique résiduelle p. Nous fixons également un corps algébriquement clos R. Lorsque la caractéristique car_R de R n'est pas p, dans loc.cit., nous avons classifié les R-représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$, en utilisant qu'elles apparaissent dans la restriction de R-représentations lisses irréductibles de $GL_2(F)$. Dans le présent article, nous considérons un corps de quaternions D de centre F, $\mathrm{nrd} : D^* \to F^*$ la norme réduite et le groupe D^1 formé des éléments dont la norme réduite vaut 1. C'est une forme intérieure non déployée de $SL_2(F)$, unique à isomorphisme près. Nous classifions les R-représentations lisses irréductibles de D^1, sans hypothèse sur car_R. Elles apparaissent dans la restriction des R-représentations lisses irréductibles de D^*.

Les R-représentations lisses irréductibles de D^* de dimension 1 (les caractères) se restreignent en le caractère trivial de D^1.

Pour $\mathrm{car}_R = p$, les R-représentations lisses irréductibles de D^1 sont des caractères, et forment un groupe cyclique d'ordre $q+1$ où q est le cardinal du corps résiduel de F.

Théorème 1.1 (Théorème principal)**.** *Soit* Π *une* R*-représentation lisse irréductible de dimension* > 1 *de* D^**. Notons* d_Π *la dimension de l'algèbre* $\mathrm{End}_{RD^1}\Pi$ *des endomorphismes de* $\Pi|_{D^1}$*, et* $JL(\Pi)$ *la* R*-représentation irréductible de* $GL_2(F)$*, image de* Π *par la correspondance de Jacquet-Langlands avec* R *comme corps de coefficients.*

a) La restriction à D^1 *de* Π *est irréductible ou somme de deux représentations irréductibles.*

b) La restriction de $JL(\Pi)$ *à* $SL_2(F)$ *est somme de* d_Π *représentations irréductibles non équivalentes.*

On a $d_\Pi = 1$ si $\Pi|_{D^1}$ est irréductible, $d_\Pi = 2$ si $\Pi|_{D^1}$ est réductible avec deux composants irréductibles non équivalents, $d_\Pi = 4$ si $\Pi|_{D^1}$ est réductible avec deux composants irréductibles équivalents. La différence avec le cas de $SL_2(F)$ réside dans le fait que $\Pi|_{D^1}$ peut ne pas être de multiplicité 1.

Nous verrons que $\Pi|_{D^1}$ est réductible si p est impair ou si Π est tordue par un caractère d'une représentation modérée, et donnerons un exemple où $\Pi|_{D^1}$ est irréductible si $p = 2$.

Pour $\mathrm{car}_R \neq p$, les R-caractères non triviaux de D^1 sont les composants des restrictions des R-représentations irréductibles de D^* de dimension 2.

Au §2, nous fixons les notations et énonçons quelques rappels dont nous aurons besoin, puis passons directement à la démonstration du Théorème. Elle se fait en deux temps, au §3.

Si la caractéristique de R n'est ni 2 ni p, d_Π est le nombre des R-caractères lisses χ de F^* tels que la torsion par $\chi \circ \mathrm{nrd}$ stabilise Π. On utilisera alors que la correspondance de Langlands qui associe à Π une R-représentation irréductible lisse de dimension 2 du groupe de Weil absolu W_F de F est compatible à la torsion par les caractères, ce qui permet d'utiliser les résultats de [HV25].

Si $\mathrm{car}_R = 2$ ou p, nous utiliserons la construction de Π explicitée dans [V89]. Nous verrons en §3.3, que $d_\Pi = 2$ sauf si $\mathrm{car}_R = p$, p est impair et Π est induite d'un R-caractère λ de $F^* U_D$ (où U_D est le groupe des unités de l'anneau des entiers de D) de restriction à D^1 l'unique R-caractère d'ordre 2.

Notons ℓ un nombre premier ($\ell = p$ est admis) et X^{ac} une clôture algébrique d'un corps commutatif X. Toute $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$-représentation lisse irréductible de D^1 est entière car D^1 est compact. La réduction modulo ℓ de ces représentations est aussi simple que possible. Nous prouverons au §4:

Théorème 1.2. *1) La réduction modulo ℓ de toute $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$-représentation irréductible lisse de D^1 est irréductible.*

2) Toute $\mathbb{F}_\ell^{ac}$-représentation irréductible lisse de D^1 est la réduction modulo ℓ d'une $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$-représentation irréductible lisse de D^1.

Pour D^* et si $\ell \neq p$ pour $GL_2(F), SL_2(F)$, la propriété 2) reste vraie, mais pas la propriété 1).

Au §5, pour $\mathrm{car}_R \neq 2$ nous établissons une correspondance de Langlands étendue qui à une R-représentation irréductible lisse de D^1 de dimension > 1 associe un morphisme ϕ de W_F dans $PGL_2(R)$ et une R-représentation du groupe des composantes connexes du centralisateur de ϕ dans $SL_2(R)$. Pour $\mathrm{car}_R = 2$, cette méthode ne suffit pas pour donner une correspondance de Langlands étendue.

Dans l'appendice §6, nous donnons des critères d'irréductibilité, utilisés au §3 mais d'un intérêt plus général. Dans le second appendice §7, nous considérons une F-algèbre à division centrale D de degré réduit $d > 1$, et le noyau D^1 de la norme réduite de D^* à F^*. Nous prouvons que tout élément de $D^1 \cap (1 + P_D)$ (où P_D est l'idéal maximal de l'anneau des entiers de D) est produit de deux commutateurs de D^1. En particulier $D^1 \cap (1 + P_D)$ est le groupe des commutateurs de D^1, un résultat dû à C. Riehm. Enfin dans l'appendice §8 dans le cas $F = \mathbb{Q}_p$ nous comparons nos résultats avec ceux pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ de [Abde14] lorsque $R = \mathbb{F}_p^{ac}$, et de [BS25] pour des représentations de Banach.

2. Notations et rappels

2.1. Dans la suite,

• F est un corps local non-archimédien, d'anneau d'entiers O_F, d'idéal maximal P_F engendré par p_F, de groupe des unités U_F, de corps résiduel k_F de caractéristique p et de cardinal q, μ_F le groupe cyclique des racines de l'unité dans F^* d'ordre divisant $q-1$, et W_F est le groupe de Weil de F.

• D est un corps de quaternions de centre F, sauf dans l'appendice §7. On notera O_D l'anneau d'entiers de D, P_D l'idéal maximal de O_D, $\omega \in D$ une racine de d'unité d'ordre q^2-1, p_D un générateur de P_D tel que $p_D^2 = p_F$, $p_D \omega p_D^{-1} = \omega^q$, U_D le groupe des unités de O_D, k_D le corps résiduel de O_D (une extension quadratique de k_F), et $\varrho_D : O_D \to k_D$ la surjection canonique. La conjugaison par p_D induit l'élévation à la puissance q sur k_D.

• La norme réduite nrd : $D^* \to F^*$ de noyau D^1 induit une surjection $U_D \to U_F$ et un homéomorphisme $D^*/F^*D^1 \to F^*/(F^*)^2$. Le groupe D^1 est contenu dans U_D. Le groupe F^*D^1 est ouvert et cofini dans D^* sauf si $\mathrm{car}_F = 2$ où il est seulement fermé cocompact.

• R est un corps, algébriquement clos sauf dans l'appendice §6.

• $[x]$ est la partie entière d'un nombre réel x.

2.2. La correspondance locale de Langlands pour D^* avec R comme corps de coefficients, fournit une bijection $\Pi \leftrightarrow \sigma_\Pi$ entre les classes d'isomorphisme des R-représentations irréductibles lisses Π de dimension > 1 de D^* et celles de dimension 2 du groupe de Weil W_F de F [V89].

Si $\mathrm{car}_R \neq p$, la correspondance locale de Jacquet-Langlands pour D^* donne une bijection $\Pi \leftrightarrow JL(\Pi)$ entre les classes d'isomorphisme des R-représentations irréductibles lisses de dimension > 1 de D^* et celles des R-représentations supercuspidales de $GL_2(F)$; la correspondance locale de Langlands pour $GL_2(F)$ donne une bijection $\sigma_\Pi \leftrightarrow JL(\Pi)$ entre les classes d'isomorphisme des R-représentations irréductibles σ_Π de dimension 2 de W_F et celles des R-représentations supercuspidales $JL(\Pi)$ de $GL_2(F)$ [V01], [V02]. Ces bijections dépendent du choix d'une racine carrée de q dans R^*, mais la correspondance locale de Jacquet-Langlands n'en dépend pas. Ces bijections sont compatibles à la torsion par les caractères au sens suivant. Soit $\alpha : W_F \to F^*$ l'application de réciprocité du corps de classes et det : $GL_2(F) \to F^*$ le déterminant. Pour tout R-caractère lisse χ de F^*,

$$\Pi \otimes \chi \circ \mathrm{nrd} \leftrightarrow \sigma_\Pi \otimes \chi \circ \alpha \leftrightarrow JL(\Pi) \otimes \chi \circ \det . \tag{2.1}$$

2.3. Toute R-représentation lisse irréductible de D^* ou de D^1 est de dimension finie et a un caractère central [H09, §2]. Soit ℓ un nombre premier ($\ell = p$ est admis). Une $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$-représentation lisse irréductible Π de D^* est entière si et seulement si son caractère central ω_Π est entier. Si elle est entière, la longueur de sa réduction modulo ℓ est ≤ 2. Quand elle est égale à 2, la dimension de Π est 2. C'est toujours le cas si $\ell = p$. Toute $\mathbb{F}_\ell^{ac}$-représentation lisse irréductible de D^* est la réduction modulo ℓ d'une $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$-représentation lisse irréductible de D^* [V89].

3. Preuve du théorème principal

3.1. La restriction à D^1 d'une R-représentation lisse irréductible de D^* est semi-simple de longueur finie, de composants irréductibles ayant la même multiplicité [HV25, §2.1]. Une R-représentation lisse irréductible π de D^1 apparait dans la restriction d'une R-représentation lisse irréductible Π de D^*, car pour i assez grand, π est triviale sur $D^1 \cap (1+P_D^i)$, donc π s'étend à $F^*D^1(1+P_D^i)$ qui est ouvert d'indice fini dans D^*, et l'induction de $F^*D^1(1+P_D^i)$ à D^* est l'adjoint à gauche de la restriction.

Définition 3.1. Une R-représentation irréductible lisse Π de D^* définit un L-paquet $\mathcal{L}(\Pi)$ formé de l'ensemble des classes d'isomorphismes des R-représentations lisses irréductibles de D^1 contenues dans la restriction de Π à D^1.

Deux L-paquets sont disjoints ou confondus [HV25, Lemma 2.3, (2) (b)] et l'union des L-paquets de D^1 est l'ensemble des classes d'isomorphisme des R-représentations irréductibles de D^1.

Comme Π a un caractère central, on a $\mathrm{End}_{RD^1}\Pi = \mathrm{End}_{RF^*D^1}\Pi$. Comme dans la preuve de [HV25, lemme 2.3]

$$\mathrm{End}_{RF^*D^1}\Pi \simeq \mathrm{Hom}_{RD^*}(\Pi, \mathrm{ind}_{F^*D^1}^{D^*}\Pi|_{F^*D^1}) \simeq \mathrm{Hom}_{RD^*}(\Pi, \Pi\otimes \mathrm{ind}_{F^*D^1}^{D^*}1).$$

Notons d_Π la dimension de $\mathrm{End}_{RD^1}\Pi$. Nous allons montrer que $d_\Pi = 1, 2$ ou 4.

Si $d_\Pi = 1$ alors $\Pi|_{D^1}$ est irréductible; si $d_\Pi = 2$ alors $\Pi|_{D^1}$ est somme de deux représentations irréductibles non équivalentes; si $d_\Pi = 4$ alors $\Pi|_{D^1}$ est somme de deux représentations irréductibles équivalentes ou de quatre représentations irréductibles non équivalentes. Nous montrerons que si $d_\Pi = 4$ le dernier cas ne se produit pas.

3.2. Le groupe des commutateurs (D^*, D^*) de D^* est D^1 [NM43], donc les R-caractères lisses de D^* se factorisent par la norme réduite et leur restriction à D^1 est le caractère trivial.

Mais D^1 possède des caractères lisses non triviaux car $(D^1, D^1) = D^1 \cap (1+P_D)$ [Rie70] (voir l'appendice §7). La surjection canonique $\varrho_D : O_D \to k_D$ induit un isomorphisme de $D^1/(D^1\cap(1+P_D))$ sur le noyau k_D^1 de la norme de k_D/k_F, cyclique d'ordre $q+1$. Les R-caractères lisses de D^1 sont $\chi \circ \rho_D$ pour les R-caractères lisses χ de k_D^1.

Si $\mathrm{car}_R = p$, toute R-représentation irréductible lisse π de D^1 est triviale sur le pro-p sous groupe $D^1 \cap (1+P_D)$ donc est un caractère.

Sans hypothèse sur car_R, chaque R-caractère de D^1 apparait dans la restriction à D^1 d'une R-représentation irréductible lisse Π de D^* triviale sur $1+P_D$. Une telle représentation de dimension > 1 est induite

$$\Pi \simeq \mathrm{ind}_{F^*U_D}^{D^*}\lambda \tag{3.1}$$

d'un R-caractère λ de F^*U_D trivial sur $1+P_D$ tel que $\lambda|_{U_D}$ est régulier, i.e. $\lambda|_{U_D} = \nu\circ\rho_D|_{U_D}$ pour un caractère ν de k_D^* régulier sur k_F^*, i.e. $\nu^q \neq \nu$ [V89], [H09, §3].

La régularité $\nu^q \neq \nu$ est équivalente à la non-trivialité de ν sur k_D^1, car l'image de l'homomorphisme $x \to x^{q-1}$ de noyau k_F^* et d'ordre $|k_D^*|/|k_F^*| = q+1$, est k_D^1.

La restriction à D^1 de λ est $\pi(\nu) = \nu\circ\rho|_{D^1}$ et $\rho_D(D^1) = k_D^1$.

Lemme 3.2. *La restriction à D^1 de Π comme en (3.1) est somme de deux caractères*

$$\Pi|_{D^1} \simeq \pi(\nu) \oplus \pi(\nu^q).$$

Preuve. Comme $D^* = F^*U_D \sqcup p_D F^*U_D$, la restriction de Π à D^1 est la somme de la restriction $\pi(\nu)$ à D^1 de λ et de la restriction $\pi(\nu^q)$ à D^1 du conjugué de λ par p_D. □

On déduit du lemme 3.2 que la dimension d_Π de $\mathrm{End}_{RD^1}\Pi$ est $d_\Pi = 4$ si les caractères $\pi(\nu)$ et $\pi(\nu^q)$ sont égaux et $d_\Pi = 2$ s'ils sont distincts.

Quand a-t-on l'égalité $\pi(\nu) = \pi(\nu^q)$? L'application $\nu|_{k_D^1} \to \pi(\nu)$ est injective, donc $\pi(\nu) = \pi(\nu^q)$ est équivalent à $\nu^q = \nu$ sur k_D^1.

Lemme 3.3. *On a $\nu = \nu^q$ sur k_D^1 si et seulement si $\nu|_{k_D^1}$ est d'ordre 2.*

Preuve. Comme le R-caractère $\nu|_{k_D^1}$ n'est pas trivial et $(\nu|_{k_D^1})^{q+1} = 1$, on a $\nu|_{k_D^1}^{q-1} = 1$ si et seulement si l'ordre de $\nu|_{k_D^1} \neq 1$ divise $(q-1, q+1)$ si et seulement si $\nu|_{k_D^1}$ est d'ordre 2. Le groupe k_D^1 est cyclique d'ordre $q+1$. Il n'admet pas de R-caractère d'ordre 2 si $p = 2$ ou si $\mathrm{car}_R = 2$. Sinon, il admet un unique R-caractère d'ordre 2. □

On déduit du lemme 3.3 que $d_\Pi = 4$ si p est impair, la caractéristique de R n'est pas 2, et $\nu|_{k_D^1}$ est l'unique R-caractère d'ordre 2 de k_D^1. Sinon, on a $d_\Pi = 2$.

Remarque 3.4. Pour $\mathrm{car}_R \neq p$ et p impair, il existe un unique L-paquet de D^1 avec $d_\Pi = 4$ par la correspondance de Jacquet-Langlands et [HV25, Proposition 4.22]. Les lemmes 3.2 3.3 le décrivent explicitement si $\mathrm{car}_R \neq 2, p$ et p impair.

3.3. On suppose que la caractéristique de R n'est ni 2 ni p. Soit Π une R-représentation lisse irréductible de D^* de dimension > 1.

La R-représentation $\mathrm{ind}_{F^*D^1}^{D^*} 1$ de D^* est la somme des $\chi \circ \mathrm{nrd}$ où χ parcourt les R-caractères lisses de F^* de carré trivial. La dimension de $\mathrm{End}_{RD^1}\Pi$ est (§3.1):

$$d_\Pi = \text{ le nombre de } \chi \text{ tels que } \Pi \simeq \Pi \otimes \chi \circ \mathrm{nrd}\,. \tag{3.2}$$

Il n'y a pas de différence avec le cas de $SL_2(F)$. La dimension de $\mathrm{End}_{RSL_2(F)} JL(\Pi)$ est égale au nombre de χ tels que $JL(\Pi) \simeq JL(\Pi) \otimes \chi \circ \det$ [HV25, (4.12)].

Lemme 3.5. *Les algèbres d'endomorphismes de $\Pi|_{D^1}$ et de $JL(\Pi)|_{SL_2(F)}$ ont la même dimension d_Π.*

Preuve. Les correspondances locales de Langlands sont compatibles avec la torsion par les caractères (2.1), donc

$$\Pi \simeq \Pi \otimes \chi \circ \mathrm{nrd} \Leftrightarrow \sigma_\Pi \simeq \sigma_\Pi \otimes \chi \circ \alpha \Leftrightarrow JL(\Pi) \simeq JL(\Pi) \otimes \chi \circ \det\,. \tag{3.3}$$

□

Le lemme 3.5 et [HV25, Theorem1.1] impliquent que $d_\Pi = 1, 2$ ou 4. La représentation $JL(\Pi)|_{SL_2(F)}$ est sans multiplicité, somme de d_Π représentations irréductibles non équivalentes [HV25, (4.5)], mais $\Pi|_{D^1}$ n'est pas de multiplicité 1 si $d_\Pi = 4$.

Lemme 3.6. *Lorsque $d_\Pi = 4$, $\Pi|_{D^1}$ est somme de deux representations irréductibles équivalentes.*

Preuve. Cette propriété est bien connue si $R = \mathbb{C}$ [L71], [LL79], [L24]. Nous montrons ici qu'elle est vraie si $\mathrm{car}_R \neq 2, p$.

On commence par vérifier que si elle est vraie pour R elle est vraie pour tout R' de même caractéristique. Elle est vraie pour la clôture algébrique R_c du corps premier de R si elle est vraie pour R, car les caractères complexes lisses de F^* de carré trivial sont des R_c-caractères, et l'extension des scalaires de R_c à R donne une injection des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de D^* sur R_c vers celles sur R. Réciproquement la propriété pour R_c l'implique pour R, car une R-représentation lisse irréductible tordue par un caractère lisse adéquat est définie sur R_c.

Donc, la propriété dans le cas complexe l'implique pour tout R de caractéristique 0.

On vérifie enfin que la propriété pour $\mathbb{Q}_\ell^{ac} \simeq \mathbb{C}$ l'implique pour $\mathbb{F}_\ell^{ac}$ (qui l'implique pour tout R de caractéristique ℓ). En effet, une $\mathbb{F}_\ell^{ac}$-représentation lisse irréductible Π se relève à $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$ en une représentation $\tilde{\Pi}$ telle que $d_{\tilde{\Pi}} = d_\Pi$, car ce résultat est connu pour σ_Π [HV25, Theorem 4.23 2)], les correspondances de Langlands pour D^* sont compatibles avec la réduction modulo ℓ [V89] et la torsion par les caractères, la formule (3.2) pour les entiers $d_{\tilde{\Pi}}$ et d_Π. □

Ceci achève la preuve du théorème principal si $\mathrm{car}_R \neq 2$. Nous traitons le cas restant $\mathrm{car}_R = 2$ dans §3.4.

3.4. Sans hypothèse sur la caractéristique de R, nous utilisons la construction explicite de Π [V89] pour démontrer le théorème principal. Une R-représentation lisse irréductible Π de D^* est tordue par un caractère d'une représentation modérée ou minimale sauvagement ramifiée. Nous avons déja traité le cas où Π est modérée (triviale sur $1 + P_D$). Supposons maintenant Π minimale sauvagement ramifiée (ceci implique $\mathrm{car}_R \neq p$).

On a une description explicite de Π. Soit $f > 1$ l'entier tel que Π est triviale sur $1 + P_D^f$ mais non sur $1 + P_D^{f-1}$. Le groupe $F^*(1 + P_D^{[(f+1)/2]})$ est commutatif modulo $1 + P_D^f$ et il est distingué d'indice fini dans D^*. On choisit un R-caractère χ de $F^*(1 + P_D^{[(f+1)/2]})$ contenu dans $\Pi|_{F^*(1+P_D^{[(f+1)/2]})}$ et l'on note J le centralisateur de χ dans D^*. La représentation Π est induite d'une R-représentation λ de J de restriction χ-isotypique à $F^*(1 + P_D^{[(f+1)/2]})$,

$$\Pi \simeq \mathrm{ind}_J^{D^*} \lambda.$$

Lorsque f est pair, $[f/2] = f/2$,

$$J = E^*(1 + P_D^{f/2}),\ E/F \text{ quadratique, séparable, ramifiée}$$

(a priori la construction ne donne pas E/F séparable, mais on peut choisir E/F séparable), $J/Ker(\chi)$ est abélien, λ est un caractère, et la dimension de Π est

$$[D^* : J] = [U_D : O_E^*(1 + P_D^{f/2})] = (q + 1)\,[1 + P_D : (1 + P_E)(1 + P_D^{f/2})] > 2.$$

Lorsque f est impair, $[f/2] = (f-1)/2$,

$$J = E^*(1+P_D^{(f-1)/2}),\ E/F \text{ quadratique, séparable, non ramifiée,}$$

et $J/Ker(\chi)$ est un groupe d'Heisenberg. Le groupe $J = F^* O_E^*(1+P_D^{(f-1)/2})$ contient les sous-groupes distingués

$$J'' = F^*(1+P_E)(1+P_D^{(f+1)/2}) \subset J' = F^*(1+P_E)(1+P_D^{(f-1)/2}),$$

$J/Ker(\chi)$ est une extension centrale par le groupe commutatif $J''/Ker(\chi)$ du groupe fini J'/J'' d'ordre q^2. La restriction de λ à J' est irréductible, et la dimension de λ est q, la dimension de Π est

$$q[D^* : J] = q[D^* : E^*(1+P_D^{(f-1)/2})] = 2q\,[1+P_D : (1+P_E)(1+P_D^{(f-1)/2}] > 2.$$

Quelle que soit la parité de f, on note que $J = E^*(1+P_D^{[f/2]})$. L'indice de JD^1 dans D^* est égal à l'indice de $\mathrm{nrd}(J)$ dans F^*, qui divise 2 car $\mathrm{nrd}(J)$ contient $N_{E/F}(E^*)$. On a deux possibilités. Si $D^* = JD^1$ alors $\Pi|_{D^1}$ est égal à

$$\pi(J,\lambda) = \mathrm{ind}_{J\cap D^1}^{D^1}(\lambda|_{J\cap D^1}).$$

Sinon, $D^* = JD^1 \sqcup dJD^1$ pour $d \in D^* \setminus JD^1$ (c'est le cas, si l'extension E/F est non ramifiée, car JD^1 ne contient pas p_D, ou si l'extension E/F est ramifiée et p est impair, car $\mathrm{nrd}(J)$ ne contient pas de racine de l'unité d'ordre $q-1$), alors $\Pi|_{D^1}$ est somme de $\pi(J,\lambda)$ et de son conjugué ${}^d\pi(J,\lambda)$ par d,

$$\Pi|_{D^1} = \pi(J,\lambda) \oplus {}^d\pi(J,\lambda). \tag{3.4}$$

.

Lemme 3.7. *Si $p=2$ et Π triviale sur $1+P_D^2$ mais non sur $1+P_D$, alors $\Pi|_{D^1}$ est irréductible.*

Preuve. On a $f=2$, χ est un caractère de $F^*(1+P_D)$ trivial sur $1+P_D^2$ contenu dans $\Pi|_{1+P_D}$ de normalisateur $J = E^*(1+P_D)$ dans D^*, l'extension E/F est quadratique séparable et ramifiée, λ est un caractère de J étendant χ tel que $\Pi = \mathrm{ind}_J^{D^*}\lambda$.

On a $\mathrm{nrd}(J) = F^*$ donc $D^* = JD^1$. En effet, $\mathrm{nrd}(J) = N_{E/F}(E^*)\,\mathrm{nrd}(1+P_D)$. Le groupe $N_{E/F}(E^*)$ contient une uniformisante de F. On a $\mathrm{nrd}(\mu_F) = \mu_F^2 = \mu_F$ et $\mu_F \cap D^1$ est trivial car $p=2$. On a $1+P_F = \mathrm{nrd}(1+P_D) = \mathrm{nrd}(1+P_D^2)$ ((7.4) dans l'appendice 7).

Montrons que $\Pi|_{D^1} = \mathrm{ind}_{J\cap D^1}^{D^1}(\lambda|_{J\cap D^1})$ est irréductible. On a $J\cap D^1 = (1+P_D)\cap D^1$,

$$\frac{J\cap D^1}{(1+P_D^2)\cap D^1} = \frac{(1+P_D)\cap D^1}{(1+P_D^2)\cap D^1} \simeq \frac{1+P_D}{1+P_D^2} \qquad \text{((7) dans l'appendice 7).}$$

On en déduit que le normalisateur de $\lambda|_{J\cap D^1}$ dans D^1 est $J\cap D^1$. Par la remarque 6.4 dans l'appendice §6, la représentation $\mathrm{ind}_{J\cap D^1}^{D^1}(\lambda|_{J\cap D^1})$ est irréductible. □

Lemme 3.8. *Si p est impair, alors $\Pi|_{D^1}$ est somme de deux R-représentations irréductibles non isomorphes de dimension* $(\dim_R \Pi)/2 > 1$.

Preuve. On a déja noté que $[D^* : JD^1] = 2$ et (3.4). Nous montrons que $\pi(J,\lambda)$ est irréductible et non isomorphe à ${}^d\pi(J,\lambda)$.

Le pro-p radical de J est $J_p = (1+P_E)(1+P_D^{[f/2]})$. Tout élément de $1+P_F$ est un carré, $\mathrm{nrd}(J_p) \subset 1+P_F = Z\cap J_p = (1+P_F)^2 = \mathrm{nrd}(Z\cap J_p) \subset \mathrm{nrd}(J_p)$, donc $J_p = (Z\cap J_p)(D^1\cap J_p)$.

La représentation $\lambda|_{J_p}$ est irréductible. Le groupe $Z\cap J_p$ agit dans $\lambda|_{J_p}$ par un caractère, donc $\lambda|_{D^1\cap J_p}$ est irréductible.

L'entrelacement dans D^* de $\lambda|_{J_p}$ est J, donc l'entrelacement dans D^1 de $\lambda|_{D^1\cap J_p}$ est $J\cap D^1$. Ceci implique qu'il n'existe pas d'entrelacement de $\lambda|_{J\cap D^1}$ avec son conjugué par d, et que $\pi(J,\lambda)$ est irréductible et non isomorphe à ${}^d\pi(J,\lambda)$ (Remarque 6.4 dans l'appendice §6). $\square$

Si $\mathrm{car}_R = 2$, alors p est impair, la R-représentation $JL(\Pi)|_{SL_2(F)}$ est aussi somme de deux R-représentations irréductibles non isomorphes (voir [HV25, Theorem 1.5]). Le théorème principal est démontré.

4. Réduction modulo ℓ

Toute $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$-représentation lisse irréductible de D^1 est entière car D^1 est compact. Sa réduction modulo ℓ est aussi simple que possible.

Théorème 4.1. *1) La réduction modulo ℓ d'une $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$-représentation irréductible lisse de D^1 est toujours irréductible (ce n'est pas vrai pour D^*, et si $\ell \neq p$ pour $GL_2(F), SL_2(F)$).*

2) Toute $\mathbb{F}_\ell^{ac}$-représentation irréductible lisse de D^1 est la réduction modulo ℓ d'une $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$-représentation irréductible entière lisse de D^1 (c'est vrai pour D^*, et si $\ell \neq p$ pour $GL_2(F), SL_2(F)$).

Preuve. Le théorème est évident pour les caractères de D^1, donc lorsque $\ell = p$.

Supposons $\ell \neq p$ et considérons une représentation irréductible lisse de D^1 de dimension > 1. Nous avons montré en §3.4 qu'elle est contenue dans la restriction à D^1 d'une représentation irréductible lisse Π de D^* de dimension > 2. Si Π est ℓ-adique (i.e. $R = \mathbb{Q}_\ell^{ac}$) on peut supposer que Π est entière (que son caractère central est entier). On rappelle (voir [V89]) que $r_\ell(\Pi)$ est irréductible car la dimension de Π est > 2, que la correspondance de Langlands Galois-Quaternions commute avec la réduction modulo ℓ, et que toute représentation irréductible lisse ℓ-modulaire (i.e. $R = \mathbb{F}_\ell^{ac}$) de D^* est la réduction modulo ℓ d'une représentation irréductible ℓ-adique entière lisse.

Si $\ell \neq 2$, on note $X(\Pi)$ l'ensemble des caractères lisses ℓ-adiques χ de F^* vérifiant $\Pi \simeq \Pi\otimes\chi\circ\mathrm{nrd}$ et $X(r_\ell(\Pi))$ l'ensemble des caractères lisses ℓ-modulaires de F^* vérifiant $r_\ell(\Pi)) \simeq r_\ell(\Pi)\otimes\chi\circ\mathrm{nrd}$. Par (3.3) et [HV25, Theorem 4.24], la correspondance de Langlands Galois-Quaternions, les entiers $|X(\Pi)|$ et $|X(r_\ell(\Pi))|$ ont les valeurs suivantes:

- $|X(\Pi)| = |X(r_\ell(\Pi))| = 1$ alors $\Pi|_{D^1}$ et $r_\ell(\Pi)|_{D^1} = r_\ell(\Pi|_{D^1})$ sont irréductibles.
- $|X(\Pi)| = |X(r_\ell(\Pi))| = 2$, alors $\Pi|_{D^1}$ est somme de deux représentations irréductibles non équivalentes de réductions irréductibles modulo ℓ non équivalentes.
- $|X(\Pi)| = 2, |X(r_\ell(\Pi))| = 4$, alors $\Pi|_{D^1}$ est somme de deux représentations irréductibles non équivalentes de réductions irréductibles modulo ℓ équivalentes.

• $|X(\Pi)| = |X(r_\ell(\Pi))| = 4$, alors $\Pi|_{D^1}$ est somme de deux représentations èquivalentes de réductions irréductibles modulo ℓ.

On en déduit le théorème si $\ell \neq 2$.

Si $\ell = 2$ alors p est impair. Si p est impair, le lemme 3.8 pour $\mathbb{Q}_\ell^{ac}$ et $\mathbb{F}_\ell^{ac}$ ($\dim \Pi > 2$ signifie que Π est tordue par un caractère d'une représentation minimale sauvagement ramfiée), implique que $\Pi|_{D_1}$ est la somme de deux représentations de D_1 de réduction modulo ℓ irréductibles et non équivalentes. On en déduit le théorème si p est impair, donc si $\ell = 2$. □

5. Paramètres de Langlands étendus

Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{car}_R \neq p$. La correspondance de Langlands pour D^* (see §2.2) est une bijection qui associe à une R-représentation lisse irréductible Π de D^* de dimension > 1, une R-représentation lisse irréductible σ_Π de W_F de dimension 2, à isomorphisme près. Cette bijection est compatible à la torsion par les R-caractères lisses de F^*, donc la classe de conjugaison du morphisme $\overline{\sigma}_\Pi$ de W_F dans $PGL_2(R)$ déduit de σ_Π ne dépend que de la restriction de Π à D^1. Ce morphisme est lisse, et elliptique au sens où il ne prend pas ses valeurs dans un tore de $PGL_2(R)$. Comme tout tel morphisme se relève en une R-représentation lisse irréductible de W_F [HV25, Lemma 5.1], on obtient ainsi une bijection entre les L-paquets non triviaux pour D^1 et les classes de conjugaison de morphismes lisses elliptiques de W_F dans $PGL_2(R)$. C'est ce qu'on peut appeler la correspondance de Langlands pour D^1. La question se pose alors de savoir si l'on peut étendre cette correspondance au sens où, pour une R-représentation lisse irréductible Π de dimension > 1 de D^*, l'on peut indexer les classes d'isomorphismes des composants irréductibles de $\Pi|_{D^1}$ en termes de $\overline{\sigma}_\Pi$. Pour $R = \mathbb{C}$, c'est vrai pour les formes intérieures de SL_n (pour $n = 2$ voir [LL79] si $\mathrm{car}_F = 0$, [L24] en toute caractéristique pour F, et pour n général voir [HS12] si $\mathrm{car}_F = 0$, [ABPS16], [AMPS17] en toute caractéristique pour F). Pour $\mathrm{car}_R \neq p$ nous avons étudié la question analogue pour $SL_2(F)$, et montré que les résultats pour $R = \mathbb{C}$ sont également valables si et seulement si $\mathrm{car}_R \neq 2$ [HV25, paragraphe après Theorem 1.5]. Nous analysons ici le cas de D^1. Comme dans [HS12] nous considérons non le centralisateur $\overline{C}_\Pi$ de $\overline{\sigma}_\Pi$ dans $PGL_2(R)$, comme nous l'avons fait pour $SL_2(F)$, mais plutôt son centralisateur C_Π dans $SL_2(R)$, et les représentations irréductibles de C_Π dont la restriction au centre μ de $SL_2(R)$ est fidèle (les autres représentations irréductibles de C_Π sont triviales sur μ, et s'identifient aux représentations irréductibles du groupe fini $\overline{C}_\Pi = C_\Pi/\mu$).

Proposition 5.1. *Soit Π une R-représentation lisse irréductible de D^*, de dimension > 1, et rappelons que $\mathrm{car}_R \neq p$.*

A) Supposons $\mathrm{car}_R \neq 2$ et choisissons une racine de l'unité $i \in R$ d'ordre 4.

- *Si $d_\Pi = 1$, alors $p = 2$ et $C_\Pi = \mu$.*
- *Si $d_\Pi = 2$, alors C_Π est conjugué au sous-groupe d'ordre 4 engendré par $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.*
- *Si $d_\Pi = 4$, alors C_Π est conjugué au groupe Q_8 engendré par $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

B) Si $\mathrm{car}_R = 2$, *alors* $d_\Pi = 2$ *et* C_Π *est trivial.*

Preuve. Cette proposition est une variante de [HV25, Theorem 5.2]. Soit $JL(\Pi)$ la R-représentation irréductible de $GL_2(F)$ correspondant à Π par la correspondance de Jacquet-Langlands (§2.2). Elle est supercuspidale, puisque $\dim(\Pi) > 1$. De plus, σ_Π, qui est irréductible, correspond à $JL(\Pi)$ par la correspondance de Langlands, et d_Π est le cardinal $d_{JL(\Pi)}$ du L-paquet de $SL_2(F)$ attaché à $JL(\Pi)$. On applique à $JL(\Pi)$ [HV25, Theorem 5.2 et sa preuve]. D'après la preuve A) de loc. cit. Theorem 5.2, le centralisateur $\overline{C}_\Pi$ de l'image de $\overline{\sigma}_\Pi$ est fini, isomorphe au groupe des R-caractères de W_F qui stabilisent σ_Π.

A) Supposons $\mathrm{car}_R \neq 2$. Alors $\overline{C}_\Pi$ est un 2-groupe élémentaire de cardinal d_Π. On voit donc:

• Si $d_\Pi = 1$ (ce qui ne se produit que si $p = 2$), alors $\overline{C}_\Pi$ est trivial et $C_\Pi = \mu$.

• Si $d_\Pi = 2$, alors $\overline{C}_\Pi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'après [B10, Proposition 4.1], à conjugaison près $\overline{C}_\Pi$ contient l'image de $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, auquel cas C_Π est engendré par cette matrice.

• Si $d_\Pi = 4$, alors $\overline{C}_\Pi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On vérifie immédiatement que Q_8 est un groupe quaternionien d'ordre 8, d'image dans $PGL_2(R)$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Appliquant à nouveau loc. cit., on obtient qu'à conjugaison près $\overline{C}_\Pi$ est l'image de H_8, auquel cas $C_\Pi = Q_8$.

B) Si $\mathrm{car}_R = 2$, alors $\overline{C}_\Pi$ est trivial, et son image inverse C_Π dans $SL_2(R)$ l'est aussi. □

Soit Π comme dans la proposition. Notons $|\mathcal{L}(\Pi)|$ le cardinal de son L-paquet $\mathcal{L}(\Pi)$.

A) Si $\mathrm{car}_R \neq 2$, nous avons

• $|\mathcal{L}(\Pi)| = d_\Pi = 1$ et $C_\Pi = \mu$ a un unique R-caractère fidèle.

• $|\mathcal{L}(\Pi)| = 1, d_\Pi = 4$ et $\mathcal{C}_\Pi \simeq Q_8$ a, à isomorphisme près, une seule R-représentation irréductible dont la restriction au centre est fidèle. Elle est de dimension 2, ce qui interprète le fait que la multiplicité du composant irréductible de $\Pi|_{D^1}$ est 2.

• $|\mathcal{L}(\Pi)| = d_\Pi = 2$ et $\mathcal{C}_\Pi \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ a deux R-caractères fidèles qui devraient correspondre aux deux éléments de $\mathcal{L}(\Pi)$. Mais contrairement au cas de $SL_2(F)$, nous ne disposons pas des modèles de Whittaker pour choisir une des composantes irréductibles de $\Pi|_{D^1}$. Même pour $R = \mathbb{C}$ et $\mathrm{car}_F = 0$, un tel choix demande certainement des données supplémentaires, soit globales comme le mentionne [L24, dernier paragraphe], soit locales [K16, §5.4].

B) Si $\mathrm{car}_R = 2$, nous avons $|\mathcal{L}(\Pi)| = d_\Pi = 2$ et C_Π est trivial. On n'a donc pas une correspondance de Langlands étendue.

6. Appendice: Critères d'irréductibilité

Soit R un corps commutatif, G un groupe localement profini, J un sous-groupe ouvert de G, et λ une R-représentation irréductible lisse de J. On s'intéresse à l'irréductibilité de l'induite compacte $\mathrm{ind}_J^G \lambda$ de λ à G.

Regardons les endomorphismes de $\mathrm{ind}_J^G \lambda$. L'induite compacte $\mathrm{ind}_J^G \lambda$ est contenue dans l'induite $\mathrm{Ind}_J^G \lambda$ de λ à G. Les fonctions dans $\mathrm{ind}_J^G \lambda$ à support dans JgJ pour $g \in G$ forment une sous-représentation $\operatorname{ind}_J^{JgJ}\lambda$ de $(\operatorname{ind}_J^G\lambda)|_J$. On définit de même $\operatorname{Ind}_J^{JgJ}\lambda \subset (\operatorname{Ind}_J^G\lambda)|_J$. L'induction compacte ind_J^G est l'adjointe à gauche de la restriction de G à J, tandis que l'induction Ind_J^G est son adjointe à droite [V96, §5.7].

On a $\operatorname{End}_{RG}(\operatorname{ind}_J^G\lambda) \subset \operatorname{Hom}_{RG}(\operatorname{ind}_J^G\lambda, \operatorname{Ind}_J^G\lambda)$ et

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{RG}(\operatorname{ind}_J^G\lambda, \operatorname{Ind}_J^G\lambda) &\simeq \operatorname{Hom}_{RJ}(\operatorname{ind}_J^G\lambda, \lambda) = \operatorname{Hom}_{RJ}(\oplus_{JgJ}\operatorname{ind}_J^{JgJ}\lambda, \lambda)\\ &\simeq \prod_{JgJ}\operatorname{Hom}_{RJ}(\operatorname{ind}_J^{JgJ}\lambda, \lambda) \simeq \prod_{JgJ}\operatorname{Hom}_{R(J\cap {}^gJ)}({}^g\lambda, \lambda),\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{End}_{RG}(\operatorname{ind}_J^G\lambda) &\simeq \operatorname{Hom}_{RJ}(\lambda, \operatorname{ind}_J^G\lambda) = \operatorname{Hom}_{RJ}(\lambda, \oplus_{JgJ}\operatorname{ind}_J^{JgJ}\lambda)\\ &\simeq \oplus_{JgJ}\operatorname{Hom}_{RJ}(\lambda, \operatorname{ind}_J^{JgJ}\lambda) \text{ car } \lambda \text{ est irréductible.}\end{aligned} \tag{6.2}$$

Si JgJ/J est compact, alors $\operatorname{ind}_J^{JgJ}\lambda = \operatorname{Ind}_J^{JgJ}\lambda$ et par adjunction $\operatorname{Hom}_{RJ}(\lambda, \operatorname{ind}_J^{JgJ}\lambda)$ est isomorphe à $\operatorname{Hom}_{R(J\cap {}^gJ)}(\lambda, {}^g\lambda)$.

La contribution de $\iota \in \operatorname{End}_{RJ}\lambda$ dans $\operatorname{End}_{RG}(\operatorname{ind}_J^G\lambda)$ est $\operatorname{ind}_J^G(\iota)$.

On en déduit l'équivalence des trois propriétés suivantes:
- $\operatorname{End}_{RG}(\operatorname{ind}_J^G\lambda) = \operatorname{End}_{RJ}\lambda$.
- Le composant λ-isotypique de $(\operatorname{ind}_J^G\lambda)|_J$ est égal à λ.
- $J = \{g \in G \mid \operatorname{Hom}_{RJ}(\lambda, \operatorname{ind}_J^{JgJ}\lambda) \neq 0\}$.

Lemme 6.1. *La représentation* $\operatorname{ind}_J^G\lambda$ *est irréductible lorsque l'on a:*

a) Les propriétés équivalentes ci-dessus sont vérifiées.

b) Pour toute sous-représentation π *de* $\operatorname{ind}_J^G(\lambda)$*, si* λ *est quotient de* $\pi|_J$ *alors* λ *est une sous-représentation de* $\pi|_J$*.*

Preuve. On choisit une sous-représentation non-nulle X de $\operatorname{ind}_J^G(\lambda)$. Comme $\operatorname{ind}_J^G(\lambda) \subset \operatorname{Ind}_J^G(\lambda)$, par adjunction λ est un quotient de $X|_J$. Par b), λ est une sous-représentation de $X|_J$. Par adjunction, il existe un endomorphisme de $\operatorname{ind}_J^G\lambda$ d'image non nulle Y contenue dans X. Par a), cet isomorphisme est de la forme $\operatorname{ind}_J^G(\iota)$ pour un endomorphisme non nul ι de λ. Comme λ est irréductible, $\iota \in \operatorname{End}_{RJ}\lambda$ est inversible, donc $\operatorname{ind}_J^G(\iota) \in \operatorname{End}_{RG}(\operatorname{ind}_J^G\lambda)$ est inversible et $\operatorname{ind}_J^G\lambda = Y = X$. Donc $\operatorname{ind}_J^G(\lambda)$ est irréductible. □

On rappelle que l'ensemble d'entrelacement de λ dans G est

$$\{g \in G \mid \operatorname{Hom}_{R(J\cap {}^gJ)}(\lambda, {}^g\lambda) \neq 0\}.$$

Il est égal à J si et seulement si (en conjuguant par g^{-1}):

$$J = \{g \in G \mid \operatorname{Hom}_{R(J\cap {}^gJ)}({}^g\lambda, \lambda) \neq 0\}.$$

Par les équivalences (6.1) cette égalité est équivalente à $\operatorname{Hom}_{RG}(\operatorname{ind}_J^G\lambda, \operatorname{Ind}_J^G\lambda) = \operatorname{End}_{RJ}\lambda$. Avec les équivalences (6.2), elle implique a) du lemme 6.1.

Le critère simple d'irréductibilité [V00, Lemma 3.2] lorsque R est algébriquement clos, est un cas particulier de la variante suivante du lemme 6.1:

Variante 6.2. *La représentation* $\operatorname{ind}_J^G \lambda$ *est irréductible lorsque l'on a:*
a') L'ensemble d'entrelacement de λ *dans* G *est* J.
b') la propiété b) du lemme 6.1 où quotient et sous-représentation sont permutés.

Preuve. Soit Y un quotient non nul de $\operatorname{ind}_J^G \lambda$. Par adjonction, λ est une sous-représentation de $Y|_J$. Par b') λ est un quotient de $Y|_J$, donc par adjonction $\operatorname{Hom}_{RG}(Y, \operatorname{Ind}_J^G \lambda) \neq 0$, et il existe un homomorphisme non nul de $\operatorname{ind}_J^G \lambda$ dans $\operatorname{Ind}_J^G \lambda$. Son image est dans $\operatorname{ind}_J^G \lambda$ car a') implique a). On termine comme dans la preuve du lemme 6.1. □

Soit J^1 un sous-groupe compact de J de pro-ordre inversible dans R (de sorte que toutes les R-représentations lisses de J^1 sont semi-simples), et μ une R-représentation lisse irréductible de J^1. Le lemme suivant est un raffinement du critère d'irréductibilité du lemme 6.1.

Lemme 6.3. *La représentation* $\operatorname{ind}_J^G \lambda$ *est irréductible lorsque l'on a:*
c) La restriction de λ *à* J^1 *est* μ*-isotypique de multiplicité finie* m.
d) Le composant μ*-isotypique de la restriction à* J^1 *de* $\operatorname{ind}_J^G \lambda$ *est de multiplicité* m.

Preuve. Si $\operatorname{ind}_J^G(\lambda)$ est réductible, on choisit une sous-représentation non-nulle X de $\operatorname{ind}_J^G(\lambda)$ telle que le quotient Y soit non nul. Par adjonction λ est une sous-représentation de $Y|_J$ et un quotient de $X|_J$. Donc la multiplicité de μ dans la restriction à J^1 de Y et de X est au moins $2m$. Ceci contredit d). □

Remarque 6.4. • c) et d) impliquent que le composant μ-isotypique de $\operatorname{ind}_J^G \lambda|_{J^1}$ est la sous-représentation λ de $\operatorname{ind}_J^G \lambda|_J$, donc c) et d) impliquent a).
• Si $\lambda|_{J^1}$ est irréductible (isomorphe à μ, $m = 1$) et son entrelacement dans G est égal à J alors $\operatorname{Hom}_{RJ^1}(\mu, \operatorname{ind}_J^{JgJ^1} \lambda) = 0$ si $g \notin J$ donc d) est vérifié et $\operatorname{ind}_J^G \lambda$ est irréductible.

À notre connaissance, un critère d'irréductibilité proche de celui du lemme 6.3 est utilisé dans toutes les constructions explicites de représentations irréductibles cuspidales de groupes réductifs p-adiques sur un corps commutatif R de caractéristique $\ell \neq p$ [HV22]. Il est appliqué avec J compact modulo le centre de G et J^1 est un pro-p sous-groupe ouvert de J.

7. Appendice: Commutateurs de D^1

Dans cet appendice, on considère un corps gauche D de centre F et de degré $d^2 > 1$ sur F et d'invariant de Hasse r/d pour $1 \leq r \leq d, (r,d) = 1$. On utilise les notations traditionnelles $O_D, P_D, k_D, \rho_D, U_D$ déjà utilisées quand D est un corps de quaternions (Notations 2.1). On note $U_D^0 = U_D, U_D^i = 1 + P_D^i$ pour $i > 0$. On choisit une racine de l'unité $\omega \in D$ d'ordre $q^d - 1$ et un générateur p_D de P_D tel que $p_D^d = p_F$, $p_D \omega p_D^{-1} = \omega^{q^r}$. L'extension $E = F(\omega)$ de F est non ramifiée de degré d. La norme réduite nrd : $D \to F$ (resp. trace réduite trd : $D \to F$) de D sur F restreinte à E est la norme $N_{E/F}$ (resp. trace $T_{E/F}$) de E sur F. On note D^1 le noyau de nrd.

Théorème 7.1. *Tout élément de* $D^1 \cap U_D^1$ *est produit de deux commutateurs de* D^1.

On en déduit le résultat déjà connu (see [Rie70, Corollary page 521]):

Corollaire 7.2. *Le groupe* (D^1, D^1) *engendré par les commutateurs de* D^1 *est* $D^1 \cap U_D^1$.

Preuve. Par le théorème, $D^1 \cap U_D^1 \subset (D^1, D^1)$. Par l'application quotient $\varrho_D : O_D \to k_D$, $D^1/(D^1 \cap U_D^1)$ s'identifie au noyau k_D^1 de la norme de k_D^* vers k_F^*, et k_D^1 est commutatif. Donc $(D^1, D^1) \subset D^1 \cap U_D^1$. $\square$

Remarque 7.3. Si H est un F-groupe simplement connexe et isotrope alors $H(F) = (H(F), H(F))$ par [PR84, 6.15].

Nakayama et Matsushima [NM43] ont prouvé que chaque élément of D^1 est le produit de trois éléments of D^*. Nous démontrons maintenant le théorème en nous inspirant de leur preuve.

Preuve. On fixe un entier positif $i \geq 1$ et une racine de l'unité $z \in E$ d'ordre $(q^d-1)/(q-1)$. Il existe $w \in U_E^1$ tel que $N_{E/F}(w) = \mathrm{nrd}(1+p_D)$. Fixons w et posons $t = (1+p_D)w^{-1}$. Alors $t \in D^1 \cap U_D^1$. Adaptant la méthode de [NM43], nous allons montrer par approximations successives :

$$\text{Pour tout } a \in D^1 \cap U_D^1, \text{ il existe } b, c \in D^1 \text{ tels que } a = (z,b)(t,c). \tag{7.1}$$

Nous allons utiliser les deux assertions suivantes:

a) Supposons que i n'est pas un multiple de d. Alors pour tout $1 + sp_D^i \in U_D^i$ il existe $v \in D^1 \cap U_D^i$ tel que $(z,v) \equiv 1 + sp_D^i$ modulo U_D^{i+1}.

b) Supposons que $i \geq 1$ est un multiple de d. Alors pour tout $1+yp_D^i \in U_D^i$ avec $\rho_D(y) \in k_D$ de trace nulle dans k_F, il existe $1 + xp_D^{i-1} \in U_D^{i-1}$ tel que $(1 + p_D, 1 + xp_D^{i-1}) \equiv 1 + yp_D^i$ modulo U_D^{i+1}. Dans ce cas, on a aussi $(t, 1 + xp_D^{i-1}) \equiv 1 + yp_D^i$ modulo U_D^{i+1}.

Prouvons (7.1). Supposons trouvés $b_i, c_i \in D^1 \cap U_D^1$ tels que $a \equiv (z, b_i)(t, c_i)$ modulo U_D^i. Pour $i = 1$ on prend $b_i = c_i = 1$.

Si i n'est pas multiple de d et $a = u(z, b_i)(t, c_i)$ pour $u \in D^1 \cap U_D^i$, par a) il existe $v \in D^1 \cap U_D^i$ tel que $(z, v) \equiv u$ modulo U_D^{i+1}. Comme $(z, vb_i) = (z, v)(v, (z, b_i))(z, b_i)$ et $(v, (z, b_i)) \in U_D^{i+1}$, on a $a \equiv (z, vb_i)(t, c_i)$ modulo U_D^{i+1}. On pose $b_{i+1} = vb_i, c_{i+1} = c_i$.

Si $i = kd, k \geq 1$, est un multiple de d non nul et $a = (z, b_i)(t, c_i)u$ pour $u \in D^1 \cap U_D^i$, alors $u = 1 + yp_F^k \in D^1$ avec $y \in O_D$. Admettons que la trace de $\rho_D(y)$ dans k_F est nulle (nous le prouvons dans la remarque 7.4). Par b) il existe $v \in D^1 \cap U_D^{i-1}$ tel que $u \equiv (t, v)$ modulo U_D^{i+1}. Donc $a \equiv (z, b_i)(t, c_i)(t, v)$modulo U_D^{i+1}. Comme $(t, c_iv) = (t, c_i)(c_i, (t, v))(t, v)$ et $(c_i, (t, v)) \in U_D^{i+1}$, on a $a \equiv (z, b_i)(t, c_iv)$ modulo U_D^{i+1}. On pose alors $b_{i+1} = b_i, c_{i+1} = c_iv$.

Les suites (b_i) et (c_i) convergent vers b et c respectivement, et à la limite on obtient $a = (z, b)(t, c)$. $\square$

Nous avons admis dans cette preuve que la trace de $\rho_D(y)$ dans k_F est nulle. Nous le montrons dans la remarque suivante.

Remarque 7.4. Nous rappelons que le O_E-module O_D est libre de base $(p_D^i)_{0 \leq i \leq d-1}$ [Rei75, (13.3)] et que la trace $T_{E/F}$ de E dans F restreinte à O_E, la trace T_{k_E/k_F} de k_E dans k_F, les réductions ρ_E de O_E dans k_E, et ρ_F de O_F dans k_F, forment un diagramme commutatif (les groupes de Galois de E/F et de k_E/k_F sont isomorphes)[Rei75, p.144]. Ceci implique que tout élément $y = \sum_{i=0}^{d-1} e_i p_D^i, e_i \in O_E$, de O_D vérifie:

$$\mathrm{trd}(y) = T_{E/F}(e_0),\ \rho_D(y) = \rho_E(e_0) \in k_D = k_E,\ \rho_F \circ \mathrm{trd}(y) = T_{k_E/k_F} \circ \rho_D(y). \tag{7.2}$$

Le polynome caractéristique réduit de y est $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ où $a_i \in O_F, a_d = 1, a_{d-1} = -\mathrm{trd}(y), a_0 = (-1)^d \mathrm{nrd}(y)$ [Rei75, (9.21)]. Son polynôme caractéristique est $P(X)^d$ [Rei75, (9.14)]. Pour un entier $k > 0$, le polynome caractéristique réduit de $1 + yp_F^k$ est $p_F^{kd} P((X-1)p_F^{-k})$. Son terme constant est $p_F^{kd} P((-1)p_F^{-k}) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i a_i p_F^{k(d-i)} = (-1)^d + (-1)^{d-1} a_{d-1} p_F^k$ modulo p_F^{k+1}. Ceci implique

$$\mathrm{nrd}(1 + yp_F^k) = 1 + \mathrm{trd}(y)p_F^k \ \text{ modulo } p_F^{k+1}. \tag{7.3}$$

On déduit de (7.2) et (7.3):

$$\mathrm{nrd}(1 + yp_F^k) = 1 \Leftrightarrow \rho_F \circ \mathrm{trd}(y) = 0 \Leftrightarrow T_{k_E/k_F} \circ \rho_D(y) = 0.$$

Il nous reste à prouver les assertions a) et b).

Preuve de a). Soit $i \geq 1$ non multiple de d. Notons que $z \in D^1$ et que $\rho_D(z)$ a le même ordre que z et engendre k_D/k_F (sinon il engendrerait une sous-extension de k_D/k_F de degré $e < d$, mais c'est impossible car $(q-1)(q^{d-1}-1) < (q-1)q^{d-1} = q^d - q^{d-1} < q^d - 1$. En particulier $\rho_D(z)^{q^{ri}} \neq \rho_D(z)$ car r est premier à d. Pour $x \in O_D$, on a

$$z(1+xp_D^i)z^{-1} = 1 + yp_D^i \quad \text{avec } y \in O_D \text{ et } \rho_D(y) = \rho_D(z)\rho_D(z)^{-q^{ri}}\rho_D(x) \neq \rho_D(x) \text{ dans } k_D.$$

Pour $s \in O_D$, iI existe $x \in O_D$ tel que le commutateur $(z, 1 + xp_D^i)$ est $1 + sp_D^i$ modulo P_D^{i+1}, car l'on a:

$$(z, 1 + xp_D^i) \equiv 1 + sp_D^i \quad \text{modulo} \quad P_D^{i+1} \Leftrightarrow \rho_D(y - x) = \rho_D(s),$$

et nous venons de voir que $\rho_D(y) \neq \rho_D(x)$.

Pour tout $1 + sp_D^i \in U_D^i$ il existe donc $1 + xp_D^i \in U_D^i$ tel que $(z, 1 + xp_D^i) \equiv 1 + sp_D^i$ modulo U_D^{i+1}. Le lemme suivant implique qu'il existe $u \in D^1 \cap U_D^i$ tel que $u \equiv 1 + xp_D^i$ modulo P_D^{i+1}. On a $(z, u) \equiv 1 + sp_D^i$ modulo U_D^{i+1}.

Lemme 7.5. *On a pour* $i \geq 1$,

$$\mathrm{nrd}(U_D^i) = U_F^k \quad \text{si } i = dk - j \text{ avec } 0 \leq j \leq d-1,\ k \geq 1. \tag{7.4}$$

L'injection de D^1 *dans* D^* *induit un isomorphisme*

$$(D^1 \cap U_D^i)/(D^1 \cap U_D^{i+1}) \to U_D^i/U_D^{i+1} \tag{7.5}$$

si i *n'est pas un multiple de* d.

Preuve. Montrons (7.4). La norme réduite envoie U_D dans U_F, et U_D^i dans $U_D^i \cap U_F$. Il est bien connu que $N_{E/F}(U_E^i) = U_F^i$ [S68, Chapitre V Proposition 1]. On a $P_D^i \cap O_F = P_F^k$ et $P_D^i \cap O_E = P_D^k$ pour $i = dk - j$ avec $0 \leq j \leq d-1,\ k \geq 1$.

On déduit de (7.4) que $\mathrm{nrd}(U_D^i) = \mathrm{nrd}(U_D^{i+1})$ si i n'est pas un multiple de d. Dans ce cas, l'injection induit l'isomorphisme . □

Preuve de b).

Pour $x \in O_D$, le commutateur $(1+p_D, 1+xp_D^{i-1})$ est $1+yp_D^i$ avec $\rho_D(y) = \rho_D(x)^{q^r} - \rho_D(x)$ si i est un multiple de d.

En effet, on calcule $(1+a)(1+b)(1+a')(1+b')$ avec $a+a'+aa' = b+b'+bb' = 0$, en négligeant les termes avec deux a et un b, ou un a et deux b. On a $(1+a)(1+b)(1+a') = 1+(1+a)b(1+a') = 1+b+ab+ba' = 1+b+ab-ba$ et $(1+b+ab-ba)(1+b') = 1+ab-ba$. On prend $a = p_D, b = xp_D^{i-1}$.

Tout élément de k_D de trace nulle dans k_F est de la forme $v^{q^r} - v$ pour $v \in k_D$. En effet, l'application linéaire $v \mapsto v^{q^r} - v : k_D \to k_D$ de noyau k_F car $(r,d) = 1$, a son image contenue dans le noyau de la trace $k_D \to k_F$ qui est surjective.

Pour $y \in O_D$ avec $\rho_D(y)$ de trace nulle dans k_F, il existe donc $x \in O_D$ tel que $(1 + p_D, 1 + xp_D^{i-1}) \equiv 1 + yp_D^i$ modulo p_D^{i+1}.

8. Appendice: Le cas $F = \mathbb{Q}_p$ et $R = \mathbb{F}_p^{ac}$.

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ et $R = \mathbb{F}_p^{ac}$, nous donnons pour D et D^1 l'analogue d'une proposition démontrée pour les $\mathbb{F}_p^{ac}$-représentation irréductibles supercuspidales de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ (appelées supersingulières) par Breuil pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et par Abdellatif pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour un entier $0 \le r \le p-1$, on note $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{F}_p^2)$ la représentation de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ étendue à $K = \mathbb{Q}_p^* GL_2(\mathbb{Z}_p)$ en envoyant p sur l'identité.

Proposition 8.1. [Abde14, Théorème 4.12]. *Il existe des $\mathbb{F}_p^{ac}$-représentations supersingulières non équivalentes $\Pi_0, \ldots, \Pi_{p-1}$ de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\pi_0, \ldots, \pi_{p-1}$ de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ telles que:*

1) $\Pi_r = (\mathrm{ind}_K^{GL_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r(\mathbb{F}_p^2))/T, \qquad 0 \le r \le p-1,$

est la représentation conoyau d'un certain endomorphisme T de $\mathrm{ind}_K^{GL_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r(\mathbb{F}_p^2)$.

2) $\Pi_r|_{SL_2(\mathbb{Q}_p)} \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}, \quad 0 \le r \le p-1.$

3) Une représentation supersingulière de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à une représentation π_r pour un unique entier $0 \le r \le p-1$.

Soit π_0 un plongement de k_D^1 dans $(\mathbb{F}_p^{ac})^*$ relevé à D^1 par la surjection canonique $\rho_D : U_D \to k_D^*$ restreinte à D^1. Pour tout entier $0 \le r \le p-1$, soient $\pi_r = \pi_0^{r+1}$ et λ_r un $\mathbb{F}_p^{ac}$-caractère de $\mathbb{Q}_p^* U_D$ égal à 1 sur p et à π_r sur D^1. On a $\pi_r^p = \pi_0^{(r+1)p} = \pi_0^{p-r} = \pi_{p-1-r}$ car $\pi_0^{p+1} = 1$. Nous avons démontré en §3.2:

Proposition 8.2. *1) La $\mathbb{F}_p^{ac}$-représentation $\Pi_r = \mathrm{ind}_{\mathbb{Q}_p^* U_D}^{D^*} \lambda_r$ est irréductible de dimension 2 pour $0 \le r \le p-1$.*

2) $\Pi_r|_{D^1} \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}$ *pour* $0 \le r \le p-1$.

3) Une $\mathbb{F}_p^{ac}$-représentation irréductible lisse de D^1 de dimension > 1 est isomorphe à une représentation π_r pour un unique entier $0 \le r \le p-1$.

Dans les deux propositions, on remarque que la restriction de Π_r au sous-groupe $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ ou D^1 a multiplicité 1 sauf si p est impair et $r = (p-1)/2$ où elle est 2.

On comparera avec les résultats de [BS25]. La restriction à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ d'une représentation de Banach unitaire p-adique irréductible Π of $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur une extension finie $E/\mathbb{Q}_p$, associée par la correspondance locale de Langlands p-adique, à une représentation galoisienne σ_Π absolument irréductible continue de dimension 2, est une somme directe de $s \leq 2$ représentations irréductibles. Elle est sans multiplicité et s est le cardinal S du centralisateur dans PGL_2 de la représentation projective galoisienne associée à σ_Π sauf si σ_Π est triplement imprimitive auquel cas $S = 4$ et $\Pi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)}$ est somme directe de deux représentations irréductibles équivalentes.

Références

[Abde14] R. Abdellatif – Classification des représentations modulo p de $SL_2(F)$. Bulletin de la S.M.F. Tome 142, $n^0 3$ 2014.

[ABPS16] A.-M. Aubert, P. Baum, R. J. Plymen and M. Solleveld – The local Langlands correspondence for inner forms of SL_n, Res. Math. Sci. 3 (2016), Paper no. 32, 34 pp.

[AMPS17] A.-M. Aubert, S. Mendes, R.Plymen, M.Solleveld – On L-packets and depth for $SL_2(K)$ and its inner forms. International Journal of Number Theory Vol.13, No.10 (2017) 2545-2568.

[B10] A.Beauville – Finite Subgroups of $PGL_2(K)$, Contemporary Math. 522, 2010, pp.23-29.

[BS25] D.Ban, M.Strauch – p-adic Banach space representations of $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. Israel J. of Math. TBD (XXXX)1-33. (2025) https://doi.org/10.1007/s11856-025-2731-4.

[H09] G. Henniart – Sur les Représentations Modulo p de Groupes Réductifs p-adiques. Contemporary Mathematics Volume 489, p.41-55 (2009)

[HV22] G. Henniart, M.-F. Vignéras – Representations of a reductive p-adic group in characteristic distinct from p. Tunisian Journal of Mathematics Vol. 4 (2022), No. 2, 249-305.

[HV25] G. Henniart, M.-F. Vignéras – Representations of $SL_2(F)$. To appear in Pacific Journal of Mathematics 2025.

[HS12] K. Hiraga, H. Saito – On L-packets for Inner Forms of SL_n. Memoirs of the A.M.S. No 1013, 2012.

[K16] T, Kaletha – Rigid inner forms of real and p-adic groups, Ann. of Math. (2) 184 (2016), no. 2, 559–632.

[L71] J.-P.Labesse – L-indistinguishable representations and trace formula for $SL(2)$, Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971), pp. 331-338. Halsted, New York, 1975.

[L24] J.-P.Labesse – Stabilisation et germes pour $SL(2)$ en toutes caractéristiques. ArXiv 2411.14820v1.mathNT (2024).

[LL79] J.-P.Labesse, R.P.Langlands – L-indistinguishability for $SL(2)$, Can. J. Math., Vol.XXX1, No.4,1979, pp.726-785.

[NM43] T. Nakayama and Y. Matsushima – Über die multiplikative Gruppe einer p-adische Division algebra, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943). Proceedings of the Japan Academy Series A: Mathematical Sciences, volume 19, issue 10.

[PR84] G. Prasad and M. S. Raghunathan – Topological central extensions of semisimple groups over local fields, Ann. of Math. (2) 119 (1984), no. 1, 143-201.

[Rei75] I. Reiner – Maximal orders, L.M.S. Monographs, Academic Press 1975.

[Rie70] C. Riehm – The norm 1 group of a p-adic division algebra, Amer. J.Math. 92 (1970), 499-523.

[S68] J.-P.Serre – Corps locaux. Deuxième édition. Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago VIII, Hermann 1968.

[V89] M.-F. Vignéras – Correspondance modulaire galois-quaternions pour un corps p-adique. Number Theory (Ulm 1987) LNM 1380:254-266 (1989).

[V96] M.-F. Vignéras – Représentations ℓ-modulaires d'un groupe réductif fini p-adique avec $\ell \neq p$. Birkhauser Progress in math. 137 (1996).

[V00] M.-F. Vignéras – Irreducible modular representations of a reductive p-adic group and simple modules for Hecke algebras. International European Congress Barcelone 2000. Progress in Math. 201, 117-133, Birkhauser.

[V01] M.-F. Vignéras – Correspondance de Langlands semi-simple pour $GL(n, F)$ modulo $\ell \neq p$. Invent. math. 144, 177-223 (2001).

[V02] M.-F. Vignéras – Modular representations of p-adic groups and of affine Hecke algebras. International Congress of Mathematicians. Beijing 2002. Higher Education Press.

(Guy Henniart) Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Saclay F-91405 Orsay Cedex

E-mail address: `guy.henniart@math.u-psud.fr`

(M.-F. Vignéras) Institut de Mathématiques de Jussieu, place Jussieu, Paris 75005 France

E-mail address: `marie-france.vigneras@imj-prg.fr`