

EXAMEN du 28 mai 2026

Durée : 3h

*Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.
Les parties sont indépendantes.*

I

Soit d un entier > 0 impair sans facteur carré. Posons $K = \mathbf{Q}\sqrt{-d}$. Notons $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Notons h_K son nombre de classes. Soit p un nombre premier totalement décomposé dans le corps K . Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ au dessus de l'idéal $p\mathbf{Z}$.

1. Quel est le degré de K sur $\mathbf{Q}$. Quels sont les nombres de places réelles et complexes ? Quel est le discriminant $\mathcal{D}_K$ de K ?
2. Soit I un idéal principal de $\mathcal{O}_K$. Montrer que sa norme est de la forme $a^2 + db^2$ (si d est congru à 1 modulo 4) ou $(a + b/2)^2 + d(b/2)^2$ (sinon) avec $a, b \in \mathbf{Z}$.
3. Soit i un entier ≥ 1 tel que $p^i < |\mathcal{D}_K/4|$. Montrer que $\mathcal{P}^i$ n'est pas principal dans $\mathcal{O}_K$.
4. Minorer l'ordre de $\mathcal{P}$ dans le groupe des classes de K en fonction de $\mathcal{D}_K$.
5. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers d sans facteur carré congrus à 7 modulo 8.
6. Montrer que si d est congru à 7 modulo 8, le nombre premier 2 est totalement décomposé dans K .
7. Montrer que pour tout entier n , il existe un corps de nombres K avec $h_K > n$.

II

On rappelle que le groupe topologique $\hat{\mathbf{Z}}$ est la limite projective des groupes $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et qu'il s'identifie à $\prod_p \mathbf{Z}_p$ où p parcourt les nombres premiers. Posons $V = \hat{\mathbf{Z}} \times \mathbf{R}$, que l'on munit de la topologie produit. On identifie $\mathbf{Z}$ à un sous-groupe de V par $n \mapsto (n, n)$.

On dit qu'un groupe $(A, +)$ est *infinitement* (resp. *uniquement*) *divisible* si pour tout $a \in A$ et tout entier $n > 0$ il existe (resp. il existe au plus un) $b \in A$ tel que $nb = a$.

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}$. Notons $\mathcal{O}$ son anneau des entiers. Notons r_1 et r_2 les nombres de places réelles et complexes non réelles respectivement. Posons $r = r_1 + r_2 - 1$. Notons $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{A}_K^\times$ l'anneau des adèles et le groupe des idèles de K respectivement. Notons $\mathbf{A}_K^\times / K^\times$ le groupe des classes d'idèles de K et $\mathbf{A}_K^{\times 0}$ le groupe des idèles de valeur absolue 1.

Pour v place finie de K , on note K_v le complété correspondant de K , $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v , $\mathcal{P}_v$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$ et q_v le cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}_v / \mathcal{P}_v$.

1. Soit v une place finie de K . Notons p la caractéristique du corps $\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v$. Soit $u \in \mathcal{O}^\times$ d'image u_v dans $\mathcal{O}_v$.
 - 1.a. Démontrer que $u_v^{(q_v-1)} \in 1 + \mathcal{P}_v$.
 - 1.b. Démontrer que $u_v^{(q_v-1)p^k}$ tend vers 1 lorsque l'entier k tend vers $+\infty$.
 - 1.c. En déduire que l'application $\exp_u : \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O}^\times$ qui à n associe u^n se prolonge par continuité en un homomorphisme de groupes $\hat{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_v^\times$, que l'on notera encore $n \mapsto u^n$.
2. Soit $u \in \mathcal{O}^\times$ tel que l'image u_v de u dans K_v ne soit pas un nombre réel < 0 pour toute place infinie v de K . Considérons la détermination principale $\log$ du logarithme sur $\mathbf{C}-\mathbf{R}_-$. Pour v place infinie de K , considérons le prolongement de $\exp_u$ en une application continue $\mathbf{R} \rightarrow K_v^\times$ qui à t associe $e^{\log(u_v)t}$.
 - 2.a. En déduire que l'application $\exp_u$ se prolonge en un homomorphisme continu de groupes $\text{Exp}_u : V \rightarrow \mathbf{A}_K^\times$ dont la restriction à $\hat{\mathbf{Z}}$ (resp. à $\mathbf{R}$) composée avec la surjection vers $K_v^\times$, pour v place finie (resp. infinie) de K , induit l'application définie ci-dessus.
 - 3.a. Démontrer que $\mathbf{Z}$ est un sous-groupe fermé de V . On munit $V/\mathbf{Z}$ de la topologie quotient.
 - 3.b. Démontrer que $[0, 1[\times \hat{\mathbf{Z}}$ est un système de représentants de V modulo $\mathbf{Z}$.
 - 3.c. En déduire que $V/\mathbf{Z}$ est un groupe compact, connexe et infiniment et uniquement divisible.
 - 3.d. Montrer que le groupe topologique $V/\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{A}_\mathbf{Q}/\mathbf{Q}$.
4. Soient $u_1, u_2 \dots u_r$ des unités de K engendrant un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{O}^\times$. Notons $v_1, v_2 \dots v_{r_2}$ les places infinies non réelles de K . Pour $t \in \mathbf{R}$ et v une place infinie non réelle, notons $e_v^{2i\pi t}$ l'idèle dont toutes les composantes sont égales à 1 sauf celle correspondant à la place v qui vaut $e^{2i\pi t}$.
 - 4.a. Démontrer qu'on peut trouver ces unités de telle sorte qu'aucune ne se trouve dans $\mathbf{R}_-$ via un quelconque plongement $K \rightarrow \mathbf{C}$. C'est ce que nous supposons désormais.
 - 4.b. Considérons l'application $\phi : V^r \times \mathbf{R}^{r_2} \rightarrow \mathbf{A}_K^\times$ qui à $(x_1, \dots, x_r, t_1 \dots t_{r_2})$ associe l'idèle $\text{Exp}_{u_1}(x_1) \dots \text{Exp}_{u_r}(x_r) e_{v_1}^{2i\pi t_1} \dots e_{v_{r_2}}^{2i\pi t_{r_2}}$. Démontrer que l'image de ϕ est contenue dans $\mathbf{A}_K^{\times 0}$.
 - 4.c. Démontrer que l'image réciproque de $K^\times$ par ϕ est $\mathbf{Z}^r \times \mathbf{Z}^{r_2}$. En déduire que ϕ est continue.
 - 4.d. En déduire que l'image D_0 de ϕ dans $\mathbf{A}_K^\times/K^\times$ est compacte, connexe et infiniment divisible.
 - 4.e. Démontrer que toute classe d'idèle de valeur absolue 1 et infiniment divisible est dans D_0 .
5. En déduire que D_0 est la composante neutre du groupe $\mathbf{A}_K^{\times 0}/K^\times$.