

EXAMEN du 24 juin 2026

Durée : 3h. Une feuille manuscrite est autorisée.

I

Soit K un corps commutatif. Posons $A = \{P \in K[X] / P = a_0 + a_3X^3 + a_4X^4 + \dots\}$.

1. Montrer que A est un anneau intègre.
2. Déterminer $A^\times$.
3. L'anneau A est-il égal à $K[X^3, X^4]$?
4. Soit I l'idéal de A engendré par $\{X^3, X^4\}$. Est-ce un idéal principal ?
5. L'élément X^3 est-il irréductible dans A ?
6. Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 0$ l'élément X^n est-il irréductible dans A ?
7. L'idéal X^3A est-il premier ?
8. L'anneau A est-il factoriel ?
9. Le A -module I est-il isomorphe à A ?
10. Montrer que l'application $A^2 \rightarrow I$ qui à (P, Q) associe $PX^3 + QX^4$ est un morphisme surjectif de A -modules.
11. Le noyau N de ce morphisme est-il engendré par $(-X^4, X^3)$?
12. Le A -module N est-il isomorphe à A ?
13. Montrer que le A -module A^2/N est sans torsion. Est-il libre ?
14. Soit $\phi : A^2 \rightarrow A$ un morphisme surjectif de A -modules. Montrer que le noyau de ϕ est isomorphe à A .
15. Montrer que le corps des fractions de A est isomorphe à $K(X)$.
16. Montrer que le module de fractions de I à dénominateurs dans $A - \{0\}$ est un $K(X)$ -espace vectoriel.
17. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

II

Posons dans $\mathbf{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$:

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \sum_{(i,j,k) \in S} X_i^2 X_j^2 X_k^2,$$

où $S = \{(i, j, k) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^3 \mid i < j < k\}$. Notons S_i le i -ème polynôme symétrique élémentaire de $\mathbf{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$.

1. Montrer que F est symétrique. Combien de termes comprend sa décomposition en somme de monômes ?
2. Montrer que $F = S_3^2 - 2S_4S_2 + 2S_1S_5$.
3. Soit $P(X) = X^5 - X - 1 \in \mathbf{C}[X]$. Calculer le discriminant de P .
4. Les racines de P sont-elles simples ?
5. Notons x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les racines de P dans $\mathbf{C}$. Déterminer $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.