

EXAMEN du 13 mai 2026

Durée : 3h. Une feuille manuscrite est autorisée.

I

Soit A un anneau intègre. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. L'anneau A_a est l'anneau de fraction de A par le sous-ensemble multiplicatif $\{a^n | n \in \mathbf{N}\}$. On note F le corps des fractions de A .

L'anneau A est dit *de Goldman* s'il existe $a \in A$ non nul tel que A_a est un corps.

1. Montrer que $\mathbf{Z}$ n'est pas de Goldman.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbf{Q} | a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} - p\mathbf{Z}\}$ est de Goldman.
3. Montrer que si A est un anneau de Goldman, on a $A_a = F$.
4. Montrer que A est de Goldman si et seulement si F est une algèbre de type fini sur A .
5. Supposons que A est un anneau de polynômes, *i.e.* $A = B[X]$, avec B anneau. Soit $a \in A$ non nul tel que $A_a = F$. Montrer que $(1 - aX)$ est inversible dans A .
6. Montrer qu'un anneau de polynôme n'est pas de Goldman.
7. Soit L un corps. Soit K un sous-corps de L . Soient $x \in L$ et $y \in K[x]$ tels que $K[x]_y = L$. Montrer que $L = K[x]$.
8. Soient A' un anneau de Goldman de corps des fractions F' et $a' \in A'$ tels que $A' = A[a']$. Soit $b \in A'$ tel que $A'_b = F'$. Montrer que a' et $1/b$ sont algébriques sur F .
9. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $F' = A_a[a']$ et F' module de type fini sur A_a .
10. Montrer que $B = \{x \in F' | A_a[x] \text{ est un } A_a\text{-module de type fini}\}$ est égal à F' .
11. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que A_a est un corps, et F' est une extension finie de A_a .
12. Soit L un corps tel que $L = A[x_1, \dots, x_n]$, avec $x_1, \dots, x_n \in L$. Montrer que A est de Goldman et que L est une extension finie de F . (*Théorème de Zariski–Goldman–Krull.*)

II

Soit K un corps. Considérons l'anneau $A = K[X, Y]$. Notons I l'idéal de A engendré par $\{X, Y\}$. Notons N le sous- A -module de A^2 engendré par $\{(X^2, XY), (XY, Y^2)\}$. Considérons le A -module quotient $M = A^2/N$. Notons M_0 la partie de torsion de M .

1. Montrer que I n'est pas un idéal principal.
2. L'idéal I est-il premier ?
3. Justifier que le A -module A/I est isomorphe à K .
4. Le A -module N possède-t-il un singleton générateur ?
5. Déterminer la partie de torsion du A -module A^2 .
6. Montrer que la classe de (X, Y) dans M est de torsion.
7. Montrer que le A -module quotient $A^2/A.(X, Y)$ est sans torsion.
8. Montrer que le A -module M_0 est engendré par (X, Y) .
9. Montrer que l'annulateur de M_0 dans A est I .
10. Montrer que M_0 est un A -module isomorphe à K .
11. Le A -module $A^2/A.(X, Y)$ est-il libre ?
12. Montrer que le A -module M_0 n'a pas de supplémentaire dans M .