

EXAMEN du 4 juin 2026

Durée : 3h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

Soit $\rho : \text{Gal}(L/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{C})$ une représentation galoisienne impaire, irréductible d'image finie. Supposons ρ de type diédral et de conducteur premier q .

Admettons qu'il existe une forme modulaire parabolique f de poids 1 pour $\Gamma_1(q)$ telle que $L(f, s) = L(\rho, s)$.

1. Rappeler ce que signifie que ρ est de type diédral, impaire.
2. Montrer que ρ est non ramifiée en dehors de q .
3. Montrer que L contient le corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{\epsilon q})$, avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Supposons désormais $\epsilon = -1$.
4. Donner le discriminant de $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$.
5. Indiquer l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$.
6. Montrer que q est congru à 3 modulo 4.
7. Montrer que ρ est induite d'un caractère χ du groupe $\text{Gal}(L/\mathbf{Q}(\sqrt{-q}))$.
8. Montrer que le déterminant de ρ vérifie $\det(\rho)(\text{Frob}_p)$ est le symbole de Legendre de p modulo q , où Frob_p est une substitution de Frobenius en p .
9. Montrer que χ est partout non ramifié.
10. Montrer que $\chi^2 \neq 1$.
11. Montrer que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$ est > 2 .
12. Soit p un nombre premier qui est un carré modulo q . Donner le facteur d'Euler en p de $L(\rho, s)$.
13. Soit p un nombre premier qui n'est pas un carré modulo q . Donner le facteur d'Euler en p de $L(\rho, s)$.
14. Donner le facteur d'Euler en q de $L(\rho, s)$.
15. Montrer que le Nebentypus (ou caractère) de f est le symbole de Legendre modulo q .
16. Rappeler comment χ correspond à un caractère $\tilde{\chi}$ du groupe des classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$.
17. Montrer que le q -développement de f est donné par $\sum_I \tilde{\chi}(I) q^{N_I}$, où I parcourt les idéaux de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$, et N_I est la norme absolue de I .
18. Donner la formule de la fonction L complétée $\Lambda(\rho, s)$ de ρ .
19. La fonction $\Lambda(\rho, s)$ admet-elle un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$?
20. Écrire l'équation fonctionnelle de $\Lambda(\rho, s)$.
21. Ne supposons plus $\epsilon = -1$. Montrer que $\epsilon = 1$ est impossible.