

CORRIGÉ de l'EXAMEN du 13 mai 2026

Durée : 3h. Une feuille manuscrite est autorisée.

I

Soit A un anneau intègre. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. L'anneau A_a est l'anneau de fraction de A par le sous-ensemble multiplicatif $\{a^n | n \in \mathbf{N}\}$. On note F le corps des fractions de A .

L'anneau A est dit *de Goldman* s'il existe $a \in A$ non nul tel que A_a est un corps.

1. Montrer que $\mathbf{Z}$ n'est pas de Goldman.

Si c'était le cas, il existerait $a \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathbf{Z}_a = \mathbf{Q}$. Autrement dit tout nombre rationnel serait une fraction de dénominateur une puissance de a , ce qui est faux pour $1/p$ lorsque p est premier et ne divise pas a .

2. Soit p un nombre premier. Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbf{Q} | a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} - p\mathbf{Z}\}$ est de Goldman.

Il suffit de considérer $a = p$. On a alors $\mathbf{Z}_{(p)p} = \mathbf{Q}$.

3. Montrer que si A est un anneau de Goldman, on a $A_a = F$.

Comme A est intègre, on a $A_a \subset F$. Comme tout corps contenant A est une extension de F , on a bien $A_a = F$.

4. Montrer que A est de Goldman si et seulement si F est une algèbre de type fini sur A (il existe $x_1, \dots, x_n \in F$ tels que $F = A[x_1, \dots, x_n]$).

Si A est de Goldman, on a $F = A_a$. Réciproquement, si $F = A[x_1, \dots, x_n]$, on pose $x_i = p_i/q_i$ avec $p_i, q_i \in A$. On a $F = A[x_1, \dots, x_n] \subseteq A[1/q_1, \dots, 1/q_n] = A_{q_1 \dots q_n} \subseteq F$.

5. Supposons que A est un anneau de polynômes, *i.e.* $A = B[X]$, avec B anneau. Soit $a \in A$ non nul tel que $A_a = F$. Montrer que $(1 - aX)$ est inversible dans A .

Comme A_a est un corps $(1 - aX)$ est inversible dans A_a et on a $1/(1 - aX) = b/a^n$ avec $b \in A - aA$ et $n \in \mathbf{N}$. Comme a et $1 - aX$ sont premiers entre eux, on a $n = 0$ et donc $1/(1 - aX) \in A_a$.

6. Montrer qu'un anneau de polynôme n'est pas de Goldman.

Reprenons la question précédente. Si $A = B[X]$ est de Goldman, il existe $a \in A$ tel que $1 - aX$ est inversible dans A . Mais les seuls inversibles de A sont les constantes inversibles, si bien qu'on a $a = 0$, ce qui est absurde.

7. Soit L un corps. Soit K un sous-corps de L . Soient $x \in L$ et $y \in K[x]$ tels que $K[x]_y = L$. Montrer que $L = K[x]$.

Si $K[x]_y = L$, $K[x]$ est un anneau de Goldman. Si x est transcendant sur K , on a $K[x]$ isomorphe à $K[X]$, qui est un anneau de Goldman. Mais, $K[X]$ n'est pas un anneau de Goldman. Donc x est algébrique sur K , et $K[x]$ est un corps. On a alors $K[x] = K[x]_y = L$.

8. Soient A' un anneau de Goldman de corps des fractions F' et $a' \in A'$ tels que $A' = A[a']$. Soit $b \in A'$ tel que $A'_b = F'$. Montrer que a' et $1/b$ sont algébriques sur F .

Si a' est transcendant sur F , A' est isomorphe à un anneau de polynômes et n'est donc pas de Goldman. Donc a' est algébrique sur F . Même raisonnement pour $1/b$.

9. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $F' = A_a[a']$ et F' module de type fini sur A_a .

Soient $P, Q \in A[X]$ des polynômes annulateurs de a' et $1/b$ respectivement. Notons α et β respectivement leurs coefficients dominants. Posons $a = \alpha\beta$. Alors a' et $1/b$ sont racines de polynômes unitaires à coefficients dans A_a . Il existe $n \in \mathbf{N}$ (resp. $m \in \mathbf{N}$) tels que a'^n (resp. $1/b^m$) est dans le A_a -module engendré par $1, a', \dots, a'^{n-1}$ (resp. $1, 1/b, \dots, 1/b^{m-1}$). On a donc $F' = A[a']_b$ est contenu dans le A_a -module engendré par a^i/b^j avec $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$. Comme b divise a , on a $F' = A[a']_b = A[a']_a$.

10. Montrer que $B = \{x \in F' | A_a[x] \text{ est un } A_a\text{-module de type fini}\}$ est égal à F' .

Notons B cet ensemble. Il contient 1. Soient $x, y \in B$. Alors il existe n, m entiers ≥ 1 tels que $A_a[x]$ et $A_a[y]$ sont des A_a -modules engendrés par $1, x, \dots, x^n$ et $1, y, \dots, y^m$ respectivement. Alors $A_a[x, y]$ est un A_a -module de type fini sur A_a , engendré par $x^i y^j$ avec $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq m$. Alors $A_a[x + y] \subset A_a[x, y]$ et $A_a[xy] \subset A_a[x, y]$ si bien que $x + y, xy \in B$. Donc B est un sous-anneau de F' . Comme B contient A_a et a' , on a $F' \subset A_a[a'] \subset B \subset F'$ et donc $F' = B$.

11. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que A_a est un corps, et F' est une extension finie de A_a .

Montrons que A_a est un corps. Soit $x \in A_a$ non nul. On a $1/x \in F'$ et donc $A_a[1/x]$ est de type fini sur A_a . Il existe donc k entier ≥ 0 tel que $1/x^k$ est une combinaison A_a -linéaire de $1, 1/x, \dots, 1/x^{k-1}$. Il en résulte que $1/x \in A_a[x] \subset A_a$. Donc x est inversible dans A_a . Ainsi A_a est un corps.

12. Soit L un corps tel que $L = A[x_1, \dots, x_n]$, avec $x_1, \dots, x_n \in L$. Montrer que A est de Goldman et que L est une extension finie de F . (*Théorème de Zariski–Goldman–Krull.*)

On procède par récurrence sur n . C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que l'assertion est vraie pour n générateurs et montrons l'assertion pour $n + 1$ générateurs $x_1, \dots, x_{n+1}$. Posons $A' = A[x_{n+1}]$ et notons F' le corps des fractions de A' . On a $L = A'[x_1, \dots, x_n]$. Par hypothèse de récurrence, A' est un anneau de Goldman et L est une extension finie de F' . Utilisons la question précédente. Il existe $a \in A$ tel que $A_a = F$, et A est un anneau de Goldman et l'extension $F'|F$ est finie. Donc les extensions $L|F'$ et $F'|F$ sont finies, si bien que $L|F$ est finie.

II

Soit K un corps. Considérons l'anneau $A = K[X, Y]$. Notons I l'idéal de A engendré par $\{X, Y\}$. Notons N le sous- A -module de A^2 engendré par $\{(X^2, XY), (XY, Y^2)\}$. Considérons le A -module quotient $M = A^2/N$. Notons M_0 la partie de torsion de M .

1. Montrer que I n'est pas un idéal principal.

Supposons qu'il existe $P \in K[X, Y]$ tel que $I = AP$. On a $P|X$ et $P|Y$. Cela entraîne que P est constant et donc $I = A$, ce qui est absurde car $1 \notin I$.

2. L'idéal I est-il premier ?

On a un morphisme surjectif d'anneaux $A \rightarrow K$ donné par l'évaluation en $(0, 0)$. Son noyau est I . L'anneau A/I est donc isomorphe à K , qui est intègre. Donc I est un idéal premier.

3. Justifier que le A -module A/I est isomorphe à K .

On vient de voir que K est isomorphe à A/I , qui est un A -module.

4. Le A -module N possède-t-il un singleton générateur ?

Soit $(P_1, P_2) \in A^2$ tel que $N = A.(P_1, P_2)$. On a alors $P_1|X^2$, $P_1|XY$, $P_2|XY$ et $P_2|Y^2$. Donc P_1 (resp. P_2) est constant ou dans KX (resp. KY). Mais N est contenu dans $A(X, Y)$ et ne contient donc pas de polynôme constant non nul. Les polynômes P_1 et P_2 sont de degré 1. Comme N est engendré par des éléments de degré total 2 en chaque coordonnée, il ne peut contenir (P_1, P_2) .

5. Déterminer la partie de torsion du A -module A^2 .

L'anneau A est intègre. Le module A^2 est libre et donc sans torsion.

6. Montrer que la classe de (X, Y) dans M est de torsion.

On a $X.(X, Y) \in N$ (et aussi $Y.(X, Y) \in N$) et $X \neq 0$ dans A . Donc (X, Y) est de torsion dans M .

7. Montrer que le A -module quotient $A^2/A.(X, Y)$ est sans torsion.

Soit $(U, V) \in A^2$ de classe dans $A^2/A.(X, Y)$ de torsion. Il existe $P \in A$ non nul tel que $(PU, PV) \in A(X, Y)$. Il existe $Q \in A$ tel que $PU = QX$ et $PV = QY$. On a donc $YPU = XPV$ et donc $YU = XV$ (car P non nul) et donc $X|U$ (car X irréductible et X ne divise pas Y) et de même $Y|V$. On a donc $(U, V) \in A(X, Y)$. La classe de (U, V) est donc nulle dans $A^2/A.(X, Y)$.

8. Montrer que le A -module M_0 est engendré par (X, Y) .

Soit $(U, V) \in A^2$ de classe de torsion dans M . Il existe $P \in A$ non nul tel que $(PU, PV) \in N$. Il existe $R, S \in A$ tels que $(PU, PV) = R.(X^2, XY) + S.(XY, Y^2)$, et donc $PU = RX^2 + SXY$ et $PV = RXY + SY^2$. Cela donne $PUY = PVX$ et donc $UY = VX$ et donc comme à la question précédente $(U, V) \in A(X, Y)$.

9. Montrer que l'annulateur de M_0 dans A est I .

Cet annulateur est formé par les $P \in A$ tels que $P.m = 0$ pour tout $m \in M_0$. C'est-à-dire tels que $P.(X, Y) \in N$. C'est-à-dire tels qu'il existe $R, S \in A$ tels que $P.(X, Y) = R.(X^2, XY) + S.(XY, Y^2)$ ou encore $PX = RX^2 + SXY$ et $PY = RXY + SY^2$. On a donc $P = RX + SY \in I$. Réciproquement, tout élément de I annule M_0 .

10. Montrer que M_0 est un A -module isomorphe à A/I .

On a un morphisme de A -modules $A \rightarrow M_0$ donné par $P \rightarrow P.(X, Y)$. Il est surjectif car M_0 est engendré par (X, Y) . Son noyau est I puisque I est l'annulateur de M_0 et donc de (X, Y) . Ainsi M_0 est un A -module isomorphe à A/I , qui est isomorphe à K .

11. Le A -module $A^2/A.(X, Y)$ est-il libre ?

Soit B une base du A -module $A^2/A(X, Y)$. Le A -module $A^2/(I.A^2 + A.(X, Y)) = A^2/I.A^2$ est un A/I -module, c'est-à-dire un K -espace vectoriel, isomorphe à K^2 . Il est de dimension 2. La base B de $A^2/A.(X, Y)$ modulo I est une base de l'espace vectoriel K^2 . Ainsi $A^2/A.(X, Y)$ est de rang 2. Mais l'anneau A est intègre. On peut considérer le corps des fractions F de A , et voir A^2 comme contenu dans F^2 qui est un F espace vectoriel de dimension 2. Il existe une combinaison linéaire non nulle de B à coefficients dans F qui est dans la droite $F(X, Y)$. Quitte à multiplier par le dénominateur des coefficients, on obtient une combinaison linéaire de B à coefficients dans A qui est dans $A.(X, Y)$. Ainsi, B n'est pas libre sur A . Donc $A^2/A.(X, Y)$ n'est pas un module libre.

12. Montrer que le A -module M_0 n'a pas de supplémentaire dans M .

Supposons qu'un tel supplémentaire existe. Alors la suite exacte $0 \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow M/M_0 \rightarrow 0$ est scindée. Il existe un morphisme de A -modules $\phi : M \rightarrow M_0$ réciproque de l'injection canonique $M_0 \rightarrow M$. En composant ϕ avec la surjection canonique on obtient un

morphisme de A -modules $\psi : A^2 \rightarrow M \rightarrow M_0$. Le morphisme ψ est déterminé par $\psi(1, 0)$ et $\psi(0, 1)$. Posons $\psi(1, 0) = U.(X, Y)$ et $\psi(0, 1) = V.(X, Y)$, avec $U, V \in A$. Ils vérifient $\psi(1, 0) \in (1, 0) + N$ et $\psi(0, 1) \in (0, 1) + N$ et donc $U.(X, Y) - (1, 0) \in N$ et $V.(X, Y) - (0, 1) \in N$ et donc $XU.(X, Y) + YV.(X, Y) - (X, Y) = U.(X^2, XY) + V.(XY, Y^2) - (X, Y) \in N$ et donc $(X, Y) \in N$, ce qui est absurde. Donc le supplémentaire n'existe pas.