

Contrôle final

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Dans le groupe symétrique S_9 , soient la transposition $\tau = (3\ 7)$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Quelle est la signature $\epsilon(\sigma)$ de σ ?
3. Quel est l'ordre de σ ?
4. Écrire $\tau\sigma\tau^{-1}$ comme produit de cycles à supports disjoints.
5. La transposition τ appartient-elle au groupe G engendré par $\{\sigma, \tau\}$?
6. Y a-t-il un élément d'ordre 9 dans G ?

Exercice 2. Soient a et b deux nombres réels. Soit $u : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ b & 0 & a \\ b^2 & b & 0 \end{pmatrix}. \text{ Il est commode de poser } \lambda = ab.$$

1. Calculer le déterminant de M .
2. Si $\lambda \neq 0$, existe-t-il $N \in M_3(\mathbf{R})$ telle que $N^2 = -M$?
3. Si $b = 0$ et $a \neq 0$, existe-t-il $N \in M_3(\mathbf{R})$ triangulaire avec $N^2 = -M$?
4. Déterminer le polynôme caractéristique P_u de u .
5. Si $\lambda \neq 0$, donner le sous-espace propre de u pour la valeur propre $-\lambda$.
6. Donner une valeur de (a, b) pour laquelle u n'est pas diagonalisable.
7. À quelle condition sur a et b , P_u a-t-il des racines simples ?
8. Quelles sont les dimensions des sous-espaces caractéristiques de u ?
9. Si $b = 0$ et $a \neq 0$, quelle est la dimension de l'espace caractéristique associé à la valeur propre 0 ?
10. Si $b = 0$, calculer M^n pour n entier ≥ 1 .
11. Si $b = 0$, calculer $(I_3 + M)^n$ pour n entier ≥ 1 .
12. Calculer M^2 .
13. Pour n entier ≥ 3 , exprimer M^n comme combinaison linéaire de $(M^k)_{0 \leq k \leq n-1}$.
14. Supposons que $a = 1$ et $b = -2$, déterminer M^n .