

Contrôle final

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculettes et téléphones sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Considérons le groupe symétrique S_7 . Soient $\tau \in S_7$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_7.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Quelle est la signature $\epsilon(\sigma)$ de σ ?
3. Quel est l'ordre de $\tau\sigma\tau^{-1}$?
4. Écrire $\tau\sigma\tau^{-1}$ comme produit de cycles à supports disjoints.
5. Existe-t-il $\rho \in S_7$ tel que $\rho^2 = \tau\sigma\tau^{-1}$?
6. Existe-t-il $\rho \in S_7$ tel que $\rho^3 = \tau\sigma\tau^{-1}$?

Exercice 2. Soient $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{C}$. Soit $u : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \text{ de polynôme caractéristique } P_M.$$

1. Calculer le déterminant de M .
2. Supposons $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Posons $b = b_1 + b_2 + b_3$.
 - (a) En déduire que $P_M(X) = (a - X)^2(a + b - X)$.
 - (b) Déterminer les sous-espaces propres de u .
 - (c) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de u .
 - (d) Donner une base de trigonalisation de u .
 - (e) Si $a = 0$, calculer M^2 .
 - (f) Si $a = 0$, calculer M^n pour n entier ≥ 0 .
 - (g) Calculer M^n pour n entier ≥ 0 .
 - (h) Si de plus $b = 0$, M est-elle diagonalisable ?
3. Supposons que $a_1 = -b_1, a_2 = -b_2, a_3 = -b_3$. Soit $N \in M_3(\mathbf{C})$ de polynôme caractéristique P_N .
 - (a) À quelle condition M est-elle inversible ?
 - (b) Déterminer alors M^{-1} .
 - (c) Calculer P_M .
 - (d) Si $P_N = P_M$, montrer que N est de trace nulle.
 - (e) Si N est de trace nulle, montrer qu'il existe $b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{C}$ tels que $P_N = P_M$.