

Contrôle final

Exercice 1. Considérons le groupe symétrique S_7 . Soient $\tau \in S_7$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_7.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
C'est $(1\ 4\ 7)(2\ 5\ 3\ 6)$.
2. Quelle est la signature $\epsilon(\sigma)$ de σ ?
C'est $(-1)^2(-1)^3 = -1$.
3. Quel est l'ordre de $\tau\sigma\tau^{-1}$?
Comme $\tau\sigma\tau^{-1}$ est conjugué de σ , il a même ordre que σ . Comme σ est produit d'un 3-cycle et d'un 4-cycle disjoints, son ordre est 12.
4. Écrire $\tau\sigma\tau^{-1}$ comme produit de cycles à supports disjoints.
Par la formule de conjugaison, c'est $(\tau(1)\ \tau(4)\ \tau(7))(\tau(2)\ \tau(5)\ \tau(3)\ \tau(6))$.
5. Existe-t-il $\rho \in S_7$ tel que $\rho^2 = \tau\sigma\tau^{-1}$?
Non car alors $\epsilon(\rho^2) = \epsilon(\rho)^2 = 1$ et $\epsilon(\tau\sigma\tau^{-1}) = \epsilon(\sigma) = -1$.
6. Existe-t-il $\rho \in S_7$ tel que $\rho^3 = \tau\sigma\tau^{-1}$?
Non car dans ce cas, ρ serait d'ordre $3 \times 12 = 36$. Mais S_7 n'a pas d'élément d'ordre 36.

Exercice 2. Soient $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{C}$. Soit $u : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \text{ de polynôme caractéristique } P_M.$$

1. Calculer le déterminant de M .
C'est $a_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1$.
2. Supposons $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Posons $b = b_1 + b_2 + b_3$.
 - (a) En déduire que $P_M(X) = (a - X)^2(a + b - X)$.
Il suffit de remplacer a_i par $a - X$ dans le déterminant de M , pour $i = 1, 2, 3$.
 - (b) Déterminer les sous-espaces propres de u .
Les valeurs propres de u sont a et $a + b$. Les sous-espaces propres correspondants sont respectivement le plan P d'équation $x + y + z = 0$ et la droite dirigée par le vecteur (b_1, b_2, b_3) . Ces deux sous-espaces sont en somme directe, sauf si $b = 0$. Dans ce dernier cas, le seul sous-espace propre est P .

- (c) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de u .
Si $b \neq 0$, ce sont les sous-espaces propres. Si $b = 0$, a est la seule valeur propre de u ; donc le sous-espace caractéristique associé est $\mathbf{C}^3$.
- (d) Donner une base de trigonalisation de u .
Si $b \neq 0$, on peut considérer les trois vecteurs propres $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$, (b_1, b_2, b_3) . Si $b = 0$, les trois vecteurs $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$, u , avec $u \notin P$ conviennent.
- (e) Si $a = 0$, calculer M^2 .
C'est bM .
- (f) Si $a = 0$, calculer M^n pour n entier ≥ 0 .
C'est $b^{n-1}M$ pour $n \geq 1$ et I_3 si $n = 0$.
- (g) Calculer M^n pour n entier ≥ 0 .
On a donc $(M - aI_3)^n = b^{n-1}(M - aI_3)$. On a $M^n = (M - aI_3 + aI_3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} (M - aI_3)^k = a^n I_3 + \sum_{k=1}^n C_n^k a^{n-k} b^{k-1} (M - aI_3)$. C'est $a^n I_3$ si $b = 0$. Si $b \neq 0$, on trouve $a^n (I_3 - b^{-1}M) + (a + b)^n / b (M - aI_3) = (ba^n - (a + b)^n a) / b I_3 + ((a + b)^n - a^n) / b M$.
- (h) Si de plus $b = 0$, M est-elle diagonalisable?
On a $M \neq 0$ et $M - aI_3$ nilpotente. Donc $M - aI_3$, et donc M , n'est pas diagonalisable.
3. Supposons que $a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$, $a_3 = -b_3$.
Soit $N \in M_3(\mathbf{C})$ de polynôme caractéristique P_N .
- (a) À quelle condition M est-elle inversible?
Le déterminant de M est $2b_1 b_2 b_3$. Il est nul si et seulement si b_1 , b_2 et b_3 sont tous non nuls.
- (b) Déterminer alors M^{-1} .
C'est $\begin{pmatrix} -1/(2b_1) & 1/(2b_2) & 1/(2b_3) \\ 1/(2b_1) & -1/(2b_2) & 1/(2b_3) \\ 1/(2b_1) & 1/(2b_2) & -1/(2b_3) \end{pmatrix}$.
- (c) Calculer P_M .
On a $P_M(X) = -X^3 + (b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3)X + 2b_1 b_2 b_3$.
- (d) Si $P_N = P_M$, montrer que N est de trace nulle.
Le coefficient en X^2 de P_N est la trace de N . C'est donc 0 au vu du calcul de P_M .
- (e) Si N est de trace nulle, montrer qu'il existe $b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{C}$ tels que $P_N = P_M$.
Posons $P_N = -X^3 + uX^2 + vX + w \in \mathbf{C}[X]$. On a $u = 0$ car N est de trace nulle. Soient $b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{C}$ les trois racines (comptées avec multiplicités) du polynôme $-X^3 - vX + w/2$. On a alors $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, $(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) = v$ et $b_1 b_2 b_3 = w/2$, si bien que $P_M(X) = -X^3 + vX + w = P_N(X)$.