

# XXIV

## Conjectures de Stark

### 1. Une identité numérique

Revenons sur le polynôme  $X^3 - X - 1$ . Notons  $L$  un corps de décomposition sur  $\mathbf{Q}$  de ce polynôme. Rappelons qu'on a  $\chi : \text{Gal}(L/\mathbf{Q}(\sqrt{-23})) \rightarrow \mathbf{C}^\times$  et que les groupes  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q}(\sqrt{-23}))$  et  $\mathcal{C}\ell(\mathbf{Q}(\sqrt{-23}))$  sont isomorphes par la théorie du corps de classe. Alors  $L$  est le corps de classe de Hilbert de  $\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ . On a  $\rho : \text{Ind}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})/\mathbf{Q}} \chi$ . Le déterminant de  $\rho$  est le caractère quadratique  $\epsilon$  du groupe  $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{-23})/\mathbf{Q})$ . On a alors  $\rho^* = \rho \otimes \epsilon$ . Le corps des coefficients de  $\rho$  est  $\mathbf{Q}$ .

On a alors

$$L(\rho, s) = L(\chi, s) = L(f, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

où  $f \in S_1(\Gamma_1(23))$  est la forme modulaire donnée par le  $q$ -développement

$$f(z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)(1 - q^{23n}) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in \mathbf{Z}[[q]].$$

On a vu que le  $q$ -développement de  $f(z)$  est aussi donné par

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} q^{m^2 + nm + 6n^2} - \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} q^{2m^2 + nm + 3n^2} \right).$$

On a alors la fonction  $L$  complétée

$$\Lambda(f, s) = (23)^{s/2} \int_0^\infty f(iy) y^s \frac{dy}{y} = (23)^{s/2} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(f, s).$$

Comme  $s \mapsto \Lambda(f, s)$  est une fonction entière et que  $\Gamma$  a un pôle simple en  $s = 0$ , la fonction  $s \mapsto L(f, s)$  a un zéro en  $s = 0$ . Comme  $\Gamma(s)$  est équivalente à  $1/s$  quand  $s$  tend vers 0 (puisque  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  et que  $\Gamma(1) = 1$ ), on a

$$\Lambda(\rho, 0) = \Lambda(f, 0) = L'(f, 0).$$

Le polynôme  $X^3 - X - 1$  a une unique racine réelle dans  $\mathbf{C}$ , que l'on note  $x_0$ . C'est une unité (car le coefficient constant de  $X^3 - X - 1$  est une unité). Par la formule de Cardan, on a

$$x_0 = \left( \frac{1 + \sqrt{23/27}}{2} \right)^{1/3} + \left( \frac{1 - \sqrt{23/27}}{2} \right)^{1/3},$$

où les racines cubiques sont prises dans  $\mathbf{R}$ . Alors on peut constater que

$$L'(f, 0) = \log(x_0).$$

Les conjectures de Stark donnent une explication à cette identité, au moins à multiplication par un nombre rationnel près (sans nécessiter, d'ailleurs, l'implication des formes modulaires). De plus la dérivée de  $L(f, s)$  en  $s = 1$  met en évidence un nombre particulier, qui se trouve être une unité, dans  $L$ .

## 2. Décomposition de la fonction $\zeta$ de Dedekind

Soit  $L|K$  une extension galoisienne finie de corps de nombres. Posons  $G = \text{Gal}(L/K)$ . Soit  $\rho_G$  la représentation régulière de  $G$ . C'est un motif d'Artin. On a

$$\zeta_L(s) = L(\rho_G, s) = \prod_{\rho} L(\rho, s)^{\dim(\rho)},$$

où  $\rho$  parcourt les représentations irréductibles de  $G$  à isomorphisme près.

Or  $\zeta_L(0)$  est donné par la formule du nombre de classes. Peut-on factoriser  $\zeta_L(0)$  en terme des représentations irréductibles de  $G$  ?

*Exemple 1.* — Supposons  $L|K$  quadratique. On a alors

$$\zeta_L(s) = \zeta_K(s) L(\chi, s),$$

où  $\chi$  est le caractère  $G \rightarrow \{-1, 1\}$ . Alors  $G = \{1, \sigma\}$  agit sur les groupes qui apparaissent dans la formule du nombre de classe :  $\mathcal{C}\ell(L)$ ,  $\mathcal{O}_L^\times$ ,  $\mu_L$ . Si  $M$  est un  $G$ -module, on peut considérer  $M^\pm = \{m \in M | \sigma(m) = \pm m\}$ . Ainsi, on peut exprimer  $\zeta_K(0)$  en termes de  $\mathcal{C}\ell(L)^+$ ,  $\mathcal{O}_L^{\times,+}$ ,  $\mu_L^+$ .

On peut espérer exprimer  $L(\chi, 0)$  en termes de  $\mathcal{C}\ell(L)^-$ ,  $\mathcal{O}_L^{\times,-}$ ,  $\mu_L^-$ .

*Exemple 2.* — Considérons l'exemple de la section précédente avec  $K = \mathbf{Q}$ ,  $L =$  corps de décomposition de  $X^3 - X - 1$  sur  $\mathbf{Q}$ . Alors  $G$  possède trois représentations irréductibles : la représentation triviale, le caractère quadratique  $\epsilon : G \rightarrow \{-1, 1\}$ , et, comme dans la section précédente, la représentation induite  $\rho = \text{Ind}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})/\mathbf{Q}} \chi$ , qui est de dimension 2, avec  $\chi$  caractère du groupe  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q}(\sqrt{-23}))$ , qui est cyclique d'ordre 3.

On a donc

$$\zeta_L(s) = \zeta(s) L(\epsilon, s) L(\rho, s)^2 = \zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})}(s) L(\rho, s)^2$$

et donc

$$L(\rho, s)^2 = \frac{\zeta_L(s)}{\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})}(s)}.$$

La formule du nombre de classes nous donne le numérateur et le dénominateur du membre de droite en  $s = 0$  et  $s = 1$ . Reprenons la formule du nombre de classes pour  $\Lambda_K$ , où  $K$  est un corps de nombres :

$$\text{Res}_{s=0} \Lambda_K(s) = - \frac{h_K \text{Reg}(K)}{\omega_K}.$$

(Le résidu en  $s = 0$  et l'utilisation de  $\Lambda_K$  est préférable à la formulation en  $s = 1$  avec  $\zeta_K$  puisque la formule élimine toute mention de  $2\pi$  et du discriminant.) On a  $r_1 = 0$  et  $r_2 = 2$  pour  $\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ , et donc  $\text{Reg}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})} = 1$ , et de plus  $h_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})} = 3$  et  $\omega_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})} = 2$ . On a et  $r_1 = 0$  et  $r_2 = 3$  pour  $L$ , et on peut montrer (par réduction modulo  $p$  de  $X^3 - X - 1$  pour des petites valeurs de  $p$ ) que  $\omega_L = 2$ , on en déduit

$$\Lambda(\rho, 0)^2 = \frac{\Lambda_L(0)}{\Lambda_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})}(0)} = \frac{h_L \text{Reg}(L) \omega_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})}}{\omega_L h_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})}} = \frac{h_L \text{Reg}(L)}{3}.$$

On a donc une sorte de formule du nombre de classe pour  $L(\rho, 0)$ , et donc pour  $L(\rho, 1)$  par équation fonctionnelle.

*Remarque .* — Cela donne  $L(\rho, 0)$  au signe près. Comme  $L(\rho, 0)$  est un nombre réel, il suffit de voir si  $L(\rho, 0)$  est  $> 0$ . En raison de l'équation fonctionnelle, il suffit de voir que  $L(\rho, 1)$  est  $> 0$ . Or la série de Dirichlet  $L(\rho, s)$  converge pour  $\Re(s) > 1$ . C'est un produit eulérien holomorphe qui converge pour  $\Re(s) > 1$ ,  $L(\rho, s)$  ne s'annule pas si  $\Re(s) > 1$ . Comme c'est une fonction continue d'une variable réelle, elle ne s'annule pas pour  $\Re(s) > 1$ . Par ailleurs, comme la série de Dirichlet a pour premier terme 1,  $L(\rho, s)$  tend vers 1 lorsque  $s$  tend vers l'infini (sur la droite réelle). Donc, on a  $L(\rho, 1) > 0$ , et donc  $w\Lambda(\rho, 0) = w\Lambda(\rho^*, 0) = \Lambda(\rho, 1) > 0$ .

Ce dernier argument, particulier aux représentations à coefficients réels, est assez mal compris.

### 3. Fonctions $L$ imprimitives

Soit  $S \in \Omega_K$  un ensemble fini contenant les places infinies. Soit un motif d'Artin  $\rho : \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}(V)$ . On prive  $L(\rho, s)$  de facteurs d'Euler en  $S$  en posant

$$L_S(\rho, s) = \prod_{v \in \Omega_K - S} L_v(\rho, s) = \frac{L(\rho, s)}{\prod_{v \in S - \Omega_{K, \infty}} L(\rho, s)} = \frac{\Lambda^{\text{nr}}(\rho, s)}{\prod_{v \in S} L(\rho, s)}.$$

La fonction  $s \mapsto L(\rho, s)$  est une fonction  $L$  incomplète, puisque c'est  $\Lambda^{\text{nr}}(\rho, s)$  privée de ses facteurs aux places infinies. Noter qu'ajouter les facteurs d'Euler en les places infinies change l'ordre d'annulation de  $L(\rho, s)$  en  $s = 0$  mais pas en  $s = 1$ . En effet, ces facteurs sont des produits des fonctions  $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$ , qui un pôle en  $s = 0$  mais ni pôle, ni zéro en  $s = 1$ ,  $\Gamma_{\mathbf{R}}(s + 1)$ , qui n'a ni pôle ni zéro en  $s = 0$  et en  $s = 1$ , et  $\Gamma_{\mathbf{C}}(s)$  qui a un pôle en  $s = 0$  et ni pôle ni zéro en  $s = 1$ .

Quant au facteur d'Euler  $L_v(\rho, s)$  en la place finie  $v$ , il ne possède ni pôle ni zéro en  $s = 1$ . Il possède un pôle en  $s = 0$  d'ordre la multiplicité de 1 comme valeur propre de  $\rho(\text{Frob}_v)$ .

*Exemple .* — Considérons le comportement en  $s = 0$  de la fonction

$$\zeta_{K, S}(s) = \prod_{v \notin S} \frac{1}{1 - |\mathcal{P}_v|^{-s}}$$

qui est associé à l'anneau

$$\mathcal{O}_{K,S} = \{x \in K \mid x \in \mathcal{O}_{K,v}, v \notin S\}.$$

Cet anneau possède un groupe de classe  $\mathcal{Cl}(K)_S$  défini comme le quotient du groupe des idéaux fractionnaire de  $K$  modulo les idéaux principaux de  $\mathcal{O}_{K,S}$ . Le groupe  $\mathcal{Cl}(K)_S$  est le quotient de  $\mathcal{Cl}(K)$  par les idéaux  $\mathcal{P}_v$ , avec  $v \in S$ . On note  $h_{K,S}$  l'ordre de  $\mathcal{Cl}(K)_S$ . On dispose d'un plongement logarithmique

$$\mathcal{O}_{K,S} \rightarrow \mathbf{R}^S$$

qui à  $x$  associe le vecteur  $(\log |x|_v)_{v \in S}$ , et qui a pour image un hyperplan de  $\mathbf{R}^S$ . On en déduit un régulateur  $\text{Reg}_{K,S}$ .

On a alors, au voisinage de  $s = 0$ ,

$$\zeta_{K,S}(s) = -\frac{h_{K,S} \text{Reg}_{K,S}}{\omega_K} s^r + o(s^r)$$

avec  $r = |S| - |\Omega_{K,\infty}| - 1$ . On obtient ainsi une variante de la formule du nombre de classes.

En général, on pose, au voisinage de  $s = 0$ ,

$$L_S(\rho, s) = c_S(\rho) s^{r_S(\rho)} + o(s^{r_S(\rho)}).$$

Alors  $r_S(\rho)$  est l'ordre d'annulation en  $s = 0$  de  $L_S(\rho, s)$  et  $c_S(\rho)$  est le coefficient dominant de  $L_S(\rho, s)$ .

#### 4. L'ordre d'annulation

Déterminons  $r_S(\rho)$ . Soit  $S_L$  l'ensemble des places de  $L$  au dessus de  $S \in \Omega_K$ . Soit  $A$  un anneau. Soit  $A[S_L]$  le groupe abélien libre de base  $S_L$ . Posons

$$A[S_L]^0 = \left\{ \sum_s \lambda_s [s] \in A[S_L] \mid \sum_s \lambda_s = 0 \right\}.$$

Le groupe  $G = \text{Gal}(L/K)$  agit sur  $S_L$  et donc, par  $A$ -linéarité, sur  $A[S_L]$  et  $A[S_L]^0$ .

PROPOSITION 1. — On a

$$r_S(\rho) = \sum_{v \in S} \dim(V^{G_w}) - \dim(V^G),$$

où  $G_w = \text{Gal}(L_w/K_v)$  avec  $w$  place de  $S_L$  au dessus de  $v$ , si  $v$  est finie,  $G_w$  est un groupe de décomposition en  $v$ .

Démonstration. — Cela résulte de l'équation fonctionnelle et des lemmes suivants.

*Lemme 2.* — La fonction  $s \mapsto L(\rho, s)$  a un pôle d'ordre  $\dim(V^G)$  en  $s = 1$ .

*Lemme 3.* — Pour tout  $v \in \Omega_K$ , le facteur d'Euler  $s \mapsto L_v(\rho, s)$  est sans zéro ni pôle en  $s = 1$ , et a un pôle d'ordre  $\dim(V^{G_w})$  en  $s = 0$ .

*Démonstration.* — Démontrons les lemmes simultanément. Si ces lemmes sont vrais pour des représentations  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , ils sont vrais pour  $\rho_1 \oplus \rho_2$ . De plus, ils restent vrais par passage à l'induite. En effet, si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et  $\tau$  est une représentation de  $H$  sur  $W$ . On a alors  $(\text{Ind}_H^G W)^G = (W \otimes_{\mathbf{C}[H]} \mathbf{C}[G])^G \simeq W^H$ .

Par le théorème de Brauer, qui affirme que toute représentation d'un groupe fini est virtuellement une somme d'induites de représentations de dimension 1, on s'est donc ramené à démontrer les lemmes pour des représentations de dimension 1. C'est-à-dire qu'on peut supposer que  $\rho : G \rightarrow \mathbf{C}^\times$ . On sait alors que  $s \mapsto L(\rho, s)$  ne s'annule pas si  $\rho \neq 1$  et s'annule à l'ordre 1 si  $\rho = 1$ . Cela prouve le lemme 1.

Si  $v$  est une place finie, le fait que  $s \mapsto L_v(\rho, s)$  n'ai ni pôle, ni zéro en  $s = 1$  résulte du fait que l'image par  $\rho$  d'un Frobenius est une racine de l'unité.

Si  $v$  est une place infinie, on a  $L_v(\rho, s) = \Gamma$ , et donc ne s'annule pas en  $s = 1$ .

Si  $v$  est une place finie, en  $s = 0$ , l'ordre d'annulation de  $s \mapsto L_v(\rho, s)$  est 1 si l'image par  $\rho$  d'un Frobenius est 1. C'est 0 sinon. C'est donc la formule annoncée. Si  $v$  est une place infinie, la fonction  $\Gamma$  a un pôle en  $s = 0$ .

Cela achève de prouver les lemmes et donc la proposition.

**COROLLAIRE .** — Si  $V$  est de dimension 1, on a

$$r_S(\rho) = |\{v \in S \mid \rho(G_w) = 1\}|$$

si  $\rho \neq 1$  et

$$r_S(\rho) = |S| - 1$$

si  $\rho = 1$ .

*Remarque .* — Considérons le  $G$ -module  $V \otimes_G \mathbf{C}[S_L]^0$ . On a une réinterprétation agréable de  $r_S(\rho)$  :

$$r_S(\rho) = \dim(V \otimes_G \mathbf{C}[S_L]^0)^G.$$

(Certains préfèrent utiliser  $\text{Hom}_G(V^*, \mathbf{C}[S_L]^0)$  où  $\text{Hom}_G$  désigne les morphismes compatibles à l'action de  $G$  et  $V^*$  est la représentation contragrédiente de  $\rho$ ).

## 5. Le coefficient dominant

Considérons  $\lambda : \mathcal{O}_{L, S_L}^\times \rightarrow \mathbf{R}[S_L]$  donnée par  $u \mapsto \sum_{w \in S_L} \log(|u|_w)[w]$ . Son image est contenue dans  $\mathbf{R}[S_L]^0$  par la formule du produit. Son noyau est  $\mu_L$ , par une variante du théorème des unités. On en déduit des isomorphismes compatibles à l'action de  $G$

$$\mathcal{O}_{L, S_L}^\times \otimes \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}[S_L]^0$$

et, après extension des scalaires à  $\mathbf{C}$ ,

$$\lambda : \mathcal{O}_{L,S_L}^\times \otimes \mathbf{C} \simeq \mathbf{C}[S_L]^0.$$

(On conserve la notation  $\lambda$  par abus.) L'isomorphisme  $\lambda$  est de nature transcendante et ne produit pas d'isomorphisme canonique de  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels. Comme une représentation de  $G$  est caractérisée à isomorphisme près par son caractère, la compatibilité à l'action de  $G$  de l'isomorphisme  $\mathcal{O}_{L,S_L}^\times \otimes \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}[S_L]^0$  montre que les caractères de ces deux  $G$ -modules sont identiques. Ainsi les caractères des  $G$ -modules  $\mathcal{O}_{L,S_L}^\times \otimes \mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}[S_L]^0$  sont identiques, si bien qu'on a un isomorphisme

$$f : \mathbf{Q}[S_L]^0 \rightarrow \mathcal{O}_{L,S_L}^\times \otimes \mathbf{Q}$$

compatible à l'action de  $G$ . On en déduit un isomorphisme de  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels

$$\lambda \circ f : \mathbf{C}[S_L]^0 \rightarrow \mathbf{C}[S_L]^0.$$

Cet isomorphisme produit un isomorphisme de  $G$ -modules

$$\text{Id} \otimes_G \lambda \circ f : V \otimes_G \mathbf{C}[S_L]^0 \rightarrow V \otimes_G \mathbf{C}[S_L]^0$$

et donc un endomorphisme  $\mathbf{C}$ -linéaire

$$(\lambda \circ f)_\rho : (V \otimes_G \mathbf{C}[S_L]^0)^G \rightarrow (V \otimes_G \mathbf{C}[S_L]^0)^G.$$

Alors le *régulateur de Stark* de  $(\rho, S, f)$  est

$$R_S(\rho, f) = \det((\lambda \circ f)_\rho).$$

Un choix différent de  $f$  produirait le même nombre  $R_S(\rho, f)$  à un nombre rationnel non-nul près.

## 6. La conjecture de base de Stark

Notons  $\phi$  le caractère de  $\rho$  (*i.e.* on a  $\phi(\sigma) = \text{Tr}(\rho(\sigma))$  pour tout  $\sigma \in G$ ). Notons  $\mathbf{Q}(\phi)$  le corps engendré par les valeurs de  $\phi$ . C'est une extension abélienne de  $\mathbf{Q}$ .

Posons  $\Delta = \text{Gal}(\mathbf{Q}(\phi)/\mathbf{Q})$ . Tout élément de  $\Delta$  s'étend en un élément de  $\text{Aut}(\mathbf{C})$ .

Pour  $\alpha \in \text{Aut}(\mathbf{C})$ , on a

$$\rho^\alpha : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}(V^\alpha)$$

où  $V^\alpha$  est le groupe  $V$  muni de l'action de  $\mathbf{C}$  donnée par

$$(\lambda, v) \mapsto \alpha(\lambda)v.$$

On a alors  $\text{Tr}(\rho^\alpha) = \alpha(\text{Tr}(\rho))$ . On peut dès lors considérer  $L_S(\rho^\alpha, s)$ .

PROPOSITION 4. — On a

$$r_S(\rho) = r_S(\rho^\alpha).$$

*Démonstration.* — On a peut utiliser la formule suivante pour  $r_S(\rho^*)$ . On a

$$r_S(\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \phi(\sigma) \nu(\sigma),$$

où  $\nu(\sigma)$  est la trace de  $\sigma$  agissant sur  $\mathbf{C}[S_L]^0$ . Les quantité qui interviennent dans le membre de droite ne change pas si on change  $\rho$  en  $\rho^\alpha$ .

CONJECTURE (Stark). — 1) On a

$$\frac{R_S(\rho, f)}{c_S(\rho)} \in \mathbf{Q}(\phi).$$

2) De plus, pour  $\alpha \in \text{Aut}(\mathbf{C})$ , on

$$\alpha\left(\frac{R_S(\rho, f)}{c_S(\rho)}\right) = \frac{R_S(\rho^\alpha, f)}{c_S(\rho^\alpha)}.$$

Le point 1 est une conjecture de rationalité. La véracité de la conjecture est indépendante du choix de  $S$ .

Il existe une conjecture plus précise, qui dans une forme très aboutie est due à Block et Kato, qui prédit  $c_S(\rho)$  à  $\mathbf{Z}[\phi]^\times$  près, autrement dit la conjecture prédit le sous- $\mathbf{Z}[\phi]$  module de  $\mathbf{C}$  engendré par  $c_S(\rho)$ , mais pas le nombre  $c_S(\rho)$  lui-même. La conjecture de Bloch–Kato, même dans ses formes encore plus abouties, dues par exemples à Fontaine et Perrin-Riou, ne peut lever l’ambiguïté à  $\mathbf{Z}[\phi]^\times$  près subsiste. Elle est donc toujours incomplète. Lorsque  $\mathbf{Z}[\phi] = \mathbf{Z}$ , il s’agit simplement d’une ambiguïté de signe, qui peut être levée grâce à l’argument donné pour le motif d’Artin de la section 1. La conjecture de Bloch–Kato contient une prédiction pour la valeur en tout entier (pas seulement  $s = 0$  et  $s = 1$ ) de toute fonction  $L$  d’Artin, et même la fonction  $L$  de tout motif (pas seulement les motifs d’Artin). Par exemple, elle explique les valeurs aux entiers de la fonction  $\zeta : \zeta(2) = \pi^2/6$  etc. Elle contient en particulier la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer pour les courbes elliptiques (qui concerne les formes modulaires de poids 2), et les valeurs aux entiers des fonctions  $L$  des formes modulaires de tout poids.

La méthode directe de comptage asymptotique d’idéaux utilisée pour prouver la formule du nombre de classes ne semble pas avoir de généralisation pour aborder les conjecture de Stark (sauf dans quelques cas très particuliers comme la représentation diédrale de la section 1). Ces dernières années, c’est la théorie des systèmes d’Euler qui a permet de progresser sur ces problèmes.

La conjecture de Stark met en évidence l’existence de certaines unités du corps  $L$ . En particulier, si l’extension  $L|K$  est abélienne cette mise en évidence est importante au vu du

douzième problème de Hilbert : comment trouver des générateurs explicite des extensions abéliennes de corps de nombres. Ce problème n'a à ce jour de solution satisfaisante que si  $K = \mathbf{Q}$  ou  $K$  est un corps quadratique imaginaire.

## 7. Formes modulaires de poids 1

Soit  $N$  un entier  $\geq 1$ . Soit  $\chi$  un caractère  $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ . Soit  $f \in S_1(N, \chi)$  une forme primitive de  $q$ -développement  $\sum_{n \geq 1} a_n q^n$ .

Soit  $\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{C})$  associée à  $f$  par le théorème de Deligne–Serre. On a donc

$$L(f, s) = L(\rho, s).$$

Alors

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(f, s) = \int_0^\infty f(iy) y^s \frac{dy}{y}$$

admet un prolongement holomorphe à  $\mathbf{C}$ .

Soit  $\alpha \in \text{Aut}(\mathbf{C})$ . Posons

$$f^\alpha = \sum_{n \geq 1} \alpha(a_n) q^n.$$

C'est une compagne de  $f$ , et on a  $f^\alpha \in S_1(N)$ . On peut même préciser le caractère  $f^\alpha \in S_1(N, \alpha \circ \chi)$ . Alors  $f^\alpha$  correspond à la représentation galoisienne  $\rho^\alpha$  obtenue en composant  $\rho$  avec  $\alpha$ .

Sans le lien entre formes modulaires et motifs d'Artin, on ignore *a priori* si  $L(f, s)$  et  $L(f^\alpha, s)$  ont même ordre d'annulation en  $s = 1$ . Cependant c'est une conséquence des conjectures de Stark.

La conjecture de Stark entraîne en particulier l'énoncé suivant.

CONJECTURE . — Il existe  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_t \in \mathcal{O}_L^\times$  et  $c_1, \dots, c_t \in \mathbf{Q}(\rho)$  tels que

$$L'(f, 0) = \sum_{i=1}^t c_i \log(\epsilon_i).$$