

XXIII

Formes automorphes

1. Formes modulaires et $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$

On peut exprimer un caractère de Dirichlet comme un caractère d'un groupe de classe d'idèles. Puisque les caractères de Dirichlet correspondent aux représentations de dimension 1 de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, et que les formes modulaires sont candidates à correspondre aux représentations de dimension 2 de ce groupe, on peut soulever la question d'exprimer les formes modulaires dans le langage des adèles.

Soit $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$. Soit k un entier ≥ 1 . Rappelons qu'on a une bijection $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) \simeq \mathcal{H}$ donnée par $g\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) \mapsto gi$, et même $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+/\mathbf{R}_+^\times\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) \simeq \mathcal{H}$, compatible à l'action homographique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ sur $\mathcal{H}$.

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$. On a l'écriture unique

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & y^{-1/2}x \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}_+^\times$, $y \in \mathbf{R}_+^\times$, $x \in \mathbf{R}$, $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. C'est une variante de la *décomposition d'Iwasawa* de g . Alors l'image gi de g dans $\mathcal{H}$ est $x + iy$.

Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Posons $F : \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+ \rightarrow \mathbf{C}$ donnée par la formule

$$F(g) = (f|_k g)(i) = \frac{(ad - bc)^{k/2}}{(ci + d)^k} f(gi).$$

PROPOSITION 1. — *Supposons $f \in S_k(\Gamma)$. Alors, cela se traduit par les propriétés suivantes de F .*

1) Pour $\gamma \in \Gamma$, on a

$$F(\gamma g) = F(g).$$

2) Pour $\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$, on a

$$F(g\rho_\theta) = e^{-ik\theta} F(g)$$

(ici $\rho_\theta \mapsto e^{-ki\theta}$ est un caractère de $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$).

3) Pour $\lambda \in \mathbf{R}^\times$, on a

$$F\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} g\right) = \epsilon\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right) F(g)$$

où ϵ est un caractère de $\{-1, 1\}$, en l'occurrence $\epsilon(-1) = (-1)^k$.

4) Si de plus, f est parabolique, F est bornée. L'annulation de f aux pointes se traduit par, pour $\delta \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et $\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \delta\Gamma\delta^{-1}$, par l'égalité

$$\int_0^\nu F(\delta^{-1} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta) dt = 0.$$

5) L'holomorphie de f se traduit par

$$\Delta(F) = \frac{k}{2}(1 - \frac{k}{2})F,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace–Beltrami donné par

$$\Delta F \left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & y^{-1/2}x \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right) = (-y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) - y \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta})(F).$$

Démonstration. — Les conditions 1-4) sont faciles à vérifier. Pour 4), c'est la formule de Cauchy qui exprime la valeur de f en la pointe $\Gamma\delta\infty$ comme une intégrale le long d'un lacet autour de cette pointe.

Démontrons 5). On a

$$F(g) = e^{-ki\theta} y^{k/2} f(x + iy)$$

et donc

$$\Delta(F)(g) = -e^{-ik\theta} (y^{k/2+2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})f(x + iy) + ky^{k/2+1} \frac{\partial}{\partial y}(x + iy) +$$

$$\frac{k}{2}(\frac{k}{2} - 1)y^{k/2}f(x + iy) + y(-ik)y^{k/2} \frac{\partial}{\partial x}f(x + iy)).$$

Comme f est holomorphe, on a $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 = 0$ et $i\partial f / \partial x = \partial f / \partial y$. On a donc

$$\Delta(F)(g) = -\frac{k}{2}(\frac{k}{2} - 1)e^{-ik\theta} y^{k/2} f(x + iy) = \frac{k}{2}(1 - \frac{k}{2})F(g).$$

La condition d'holomorphie de f peut donc être remplacée par une condition impliquant Δ . Compte tenu de la propriété 2), la propriété 5) est l'invariance par le Laplacien de poids k , vu dans la séance précédente. Pour $k = 1$, on retrouve la valeur propre $1/4$.

Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.

De même, une forme de Maass peut être interprétée comme une fonction $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{C}$. La condition 1) doit être remplacée par une invariance sous $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ (alors $k = 0$), la condition 3) devient $\epsilon = 1$ et la condition 5) doit être remplacée par $\Delta(F) = (1/4 - \nu^2)F = \lambda F$, avec bien sûr $\lambda = 1/4$ (alors $k = 1$!) si la forme de Maass est algébrique.

2. Langage adélique

Rappelons que $\hat{\mathbf{Z}}$ est le complété profini de $\mathbf{Z}$, défini comme la limite projective des groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On a l'isomorphisme canonique

$$\lim_{\leftarrow n} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{Z}} \simeq \prod_p \mathbf{Z}_p,$$

où p parcourt les nombres premiers. Posons $\mathbf{A}_0 = \hat{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$.

L'anneau des *adèles finis* est la partie de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ formée par les éléments dont la composante en la place infinie est nulle. On a une identification canonique

$$\mathbf{A}_0 \times \mathbf{R} \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$$

ce qui permet d'identifier l'anneau des adèles finis à $\mathbf{A}_0$.

Soit N un entier ≥ 1 . Posons

$$\mathbf{A}(N\infty) = \prod_{p \nmid N} \mathbf{Z}_p^{\times} \times \prod_{p|N} (1 + N\mathbf{Z}_p) \times \mathbf{R}_+^{\times} \subset \mathbf{A}^{\times}.$$

(C'est le sous-groupe de congruence associé au cycle arithmétique $N\infty$.) En particulier, on a $\mathbf{A}(1) = \prod_p \mathbf{Z}_p^{\times} \times \mathbf{R}^{\times}$. Rappelons qu'on a $\mathbf{A}^{\times} = \mathbf{Q}^{\times} \mathbf{A}(1)$.

On a alors

$$\mathbf{A}^{\times} / \mathbf{Q}^{\times} \mathbf{A}(N\infty) \simeq \mathbf{A}(1) / \mathbf{A}(N\infty) (\mathbf{Q}^{\times} \cap \mathbf{A}(1)).$$

Comme on a $\mathbf{Q}^{\times} \cap \mathbf{A}(1) = \{-1, 1\}$, on a $\mathbf{A}(N\infty) (\mathbf{Q}^{\times} \cap \mathbf{A}(1)) = \mathbf{A}(N)$ et donc

$$\mathbf{A}^{\times} / \mathbf{Q}^{\times} \mathbf{A}(N\infty) \simeq \mathbf{A}(1) / \mathbf{A}(N) \simeq \prod_{p|N} (\mathbf{Z}/p^{v_p(N)}\mathbf{Z})^{\times} \simeq (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{\times}.$$

Le groupe $\mathbf{A}_0^{\times}$ est le groupe des *idèles finis*.

Un sous-groupe K de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$ est ouvert s'il contient un voisinage de l'élément neutre. Cela signifie que K contient $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ pour presque tout nombre premier p , et un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ pour tout nombre premier p .

C'est le cas, par exemple, de

$$K(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

$$K_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

$$K_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

On a $K(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) = \Gamma(N)$, $K_1(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) = \Gamma_1(N)$, $K_0(N) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) = \Gamma_0(N)$.

THÉORÈME 2 (approximation forte). — Soit K un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$ tel que l'application déterminant $K \rightarrow \hat{\mathbf{Z}}^\times$ est surjective, comme c'est le cas pour $K(N)$, $K_1(N)$, $K_0(N)$. Alors on a $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_0) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+ K$. On en déduit

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+(K \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})(K \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+).$$

Démonstration. — Rappelons que l'application canonique $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})$ est surjective pour tout entier $M \geq 1$.

Pour démontrer le théorème, supposons d'abord que $K = \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$.

Soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_0)$. Pour p premier, on note $g_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ la composante en p de g . On a $g_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ pour presque tout p .

Il existe $g_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ tel que $g_0 g \in \mathrm{M}_2(\hat{\mathbf{Z}})$. On peut donc supposer que $g \in \mathrm{M}_2(\hat{\mathbf{Z}})$. Alors $g\hat{\mathbf{Z}}^2$ est un sous-groupe d'indice fini de $\hat{\mathbf{Z}}^2$, si bien que $\hat{\mathbf{Z}}^2/g\hat{\mathbf{Z}}^2$ est un groupe abélien fini engendré par deux éléments et donc de la forme $\mathbf{Z}/r\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/s\mathbf{Z}$.

Ainsi on a $g \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$. Posons $g = u \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} v$, avec $u, v \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$.

Posons $M = rs$. Soit d un entier > 0 tel que $d \equiv \det(u) \pmod{M}$. Alors $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} u$ modulo M est dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})$.

Soit $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ dont $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} u$ est la réduction modulo M . Posons

$$z = \gamma^{-1} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} u.$$

On a $z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{M}$. On a alors

$$g = u \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \gamma^{-1} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} u \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} v \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+ z \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}).$$

Or on a

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+ z \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1} z \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}),$$

et de plus, en posant $z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a, puisque $z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{M}$,

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1} z \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & s\beta/r \\ r\gamma/s & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}).$$

Ainsi, on a montré que $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+ \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$. Cela achève la démonstration dans le cas $K = \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$.

Pour établir le cas général, il suffit de montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})K = \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$. Comme K est ouvert dans $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$, il existe un entier $N > 0$ tel que K contienne les matrices de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$ congrues à I_2 modulo N .

La réduction modulo N de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})K$ contient $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ et des matrices de tout déterminant dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$. Le groupe obtenu comme la réduction modulo N de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})K$ est donc $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. Ainsi on a $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})K = \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$.

Remarque . — Il existe des théorèmes d'approximation forte analogues à celui qui vient d'être énoncé pour divers groupes algébriques.

Soit K un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$ tel que l'application déterminant $K \rightarrow \hat{\mathbf{Z}}^\times$ est surjective. Posons $\Gamma = K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. C'est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

D'après le théorème d'approximation, pour tout $g_0 \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$ il existe $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ et $h \in K$ tels que $g_0 = \gamma h$. Alors γ et h sont déterminés à $K \cap \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+ = \Gamma$ près.

Soit $f \in M_k(\Gamma)$. Posons

$$\Phi_f(g_0) = f|_k \gamma^{-1}$$

qui est indépendant du choix de γ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$, puisque γ est bien défini à Γ près. Alors $f|_k \gamma^{-1}$ est modulaire pour le groupe $\gamma\Gamma\gamma^{-1}$, qui est de congruence. Notons $M_k(\infty)$ la limite injective sur N de $M_k(N)$.

$$M_k(\infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} M_k(N).$$

Ainsi, on a une application $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) \rightarrow M_k(\infty)$ qui à g_0 associe $f|_k \gamma^{-1}$.

On en déduit une fonction $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+ \rightarrow \mathbf{C}$ qui à (g_0, g_∞) associe $f|_k \gamma^{-1} g_\infty(i)$. Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})(\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$, on en déduit une fonction

$$\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C},$$

qui est $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ -invariante à gauche. C'est la *forme automorphe* associée à f .

Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ est muni d'une action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, on peut s'intéresser à l'action de leurs sous-groupes compacts maximaux $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$. En particulier, on peut retrouver le poids k de f grâce à l'action de $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ puisque $\Phi(g\rho_\theta) = e^{-ik\theta}\Phi(g)$ et le sous-groupe Γ par le fait que Φ est K -invariante à droite.

De même, si on part d'une forme de Maass, on peut lui associer une forme automorphe comme fonction $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$.

Voyons comment on retrouve le caractère de f , via l'action du centre $Z(\mathbf{A})$ formé des matrices scalaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$.

PROPOSITION 3. — Soit N un entier ≥ 1 . Soit χ un caractère $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$. Il s'identifie à un caractère $\hat{\chi} : \mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times \cdot \mathbf{A}(N\infty) \rightarrow \mathbf{C}^\times$ (voir ci-dessus). Soit $f \in M_k(N, \chi)$. Soit $\alpha \in \mathbf{A}^\times$. On a alors, pour $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$,

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} g\right) = \hat{\chi}(\alpha^{-1})\Phi(g).$$

Démonstration. — Comme Φ est invariante par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$, et que $\hat{\chi}$ est invariant par $\mathbf{Q}^\times$, il suffit de montrer le théorème après multiplication de α par $q \in \mathbf{Q}^\times$.

Utilisons que $\mathbf{A}^\times = \mathbf{Q}^\times \mathbf{A}(1)$. Il existe $q \in \mathbf{Q}^\times$ tel que $q\alpha \in \mathbf{A}(1)$. On peut donc supposer que $\alpha \in \mathbf{A}(1)$. Posons $\alpha = (\alpha_0, \alpha_\infty)$, avec $\alpha_0 \in \hat{\mathbf{Z}}^\times$, $\alpha_\infty \in \mathbf{R}^\times$.

Posons $g = (g_0, g_\infty)$, avec $g_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_0)$, $g_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$. On a $g_0 = \gamma h$, avec $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ and $h \in K_1(N)$. On a alors

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} g\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} g_0, \begin{pmatrix} \alpha_\infty & 0 \\ 0 & \alpha_\infty \end{pmatrix} g_\infty\right).$$

Soit $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, telle que $d \equiv \alpha_0 \pmod{N}$. Alors, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} g_0 = \gamma \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} h = \gamma \delta \delta^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} h.$$

On remarque que $\gamma \delta \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ et $\delta^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} h \in K_1(N)$. On trouve alors

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} g\right) = f|_{\delta^{-1}\gamma^{-1}g_\infty}.$$

Or, on a $f|_{\delta} = \bar{\chi}(d)f$ et $\hat{\chi}(\alpha_0^{-1}) = \chi(d)$. Cela permet de conclure

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} g\right) = \bar{\chi}(d)f|_{\delta\gamma^{-1}g_\infty} = \hat{\chi}(\alpha_0^{-1})\Phi(g).$$

3. Opérateurs de Hecke

Soit p un nombre premier. Soit $f \in M_k(N)$. On a

$$T_p(f) = p^{k/2-1} \sum_{\gamma \in \Gamma_1(N) \backslash \Delta_p(N)} f|_{\delta\gamma}$$

où $\Delta_p(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z}) \mid ad - bc = p, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$.

Si Φ est la fonction $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ associée à f , la fonction $T_p(\Phi) : \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ associée à $T_p(f)$ est donnée par

$$T_p(\Phi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_1(N) \backslash \Delta_p(N)} \Phi(\gamma g)$$

Supposons que p ne divise pas N . Alors $\Gamma_1(N) \backslash \Delta_p(N)$ est un ensemble à $p+1$ éléments.

On définit l'*algèbre de Hecke locale* sur le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ comme l'ensemble des fonctions $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \rightarrow \mathbf{C}$ à support compact, et invariantes à gauche et à droite sous $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

Le groupe topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est localement compact (car $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ est un voisinage compact de l'identité), et donc muni d'une mesure de Haar dg , unique à un scalaire près. On normalise cette mesure par $\int_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} dg = 1$. L'algèbre de Hecke locale contient la fonction caractéristique ξ_p de

$$\Theta_p = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p) \mid \det(g) = p\}.$$

Si ξ appartient à l'algèbre de Hecke locale, on pose (convolution avec la fonction $x \mapsto \xi(x^{-1})$)

$$R_\xi(\Phi)(g) = \int_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \xi(x) \Phi(gx) dx.$$

PROPOSITION 4. — On a

$$T_p(\Phi) = R_{\xi_p}(\Phi).$$

Démonstration. — On a

$$R_{\xi_p}(\Phi)(g) = \int_{\Theta_p} \Phi(gx) dx = \sum_{j \in \Theta_p / \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} \Phi(gj).$$

Si R est un système de représentants de $\Gamma_1(N) \backslash \Delta_p(N)$, l'ensemble

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \delta^{-1} \mid \delta \in R \right\}$$

est un système de représentants de $\Theta_p / \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Posons $g = (g_0, g_\infty) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+ \cdot (K \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$ et $g_0 = \gamma h$, avec $h \in K_1(N)$, et $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$. On a donc

$$R_{\xi_p}(\Phi)(g) = \sum_{j \in J} \Phi \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}^{-1} gj \right) = \sum_{\delta \in R} f_{|_k \gamma^{-1} \delta}(f) = (T_p(f))|_{k \gamma^{-1}}.$$

Cela achève la démonstration.

La proposition 3 nous indique que l'opérateur $T_{p,p}$ peut lui aussi être exprimé par la convolution avec une fonction de l'algèbre de Hecke locale.

Si on s'intéresse à la place archimédienne, les propriétés vis-à-vis de l'opérateur de Laplace–Beltrami ne dépendent que de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, ce qui justifie que le Laplacien est l'opérateur de Hecke en la place infinie. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ (sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$) joue alors le rôle de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

4. La représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ sur $M_k(\infty)$

On a vu que cette représentation est donnée ainsi. Soit $f \in M_k(\infty)$. Soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$. Posons $g = (g_0, g_\infty) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_0) \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$. Posons $g_0 = \gamma h$, avec $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ et $h \in K_1(N)$. On a alors

$$g \cdot f = f|_k \gamma^{-1} g_\infty.$$

Notons π_f le $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ -module engendré par f . Le théorème de multiplicité un s'exprime alors ainsi.

THÉORÈME 5. — *Supposons f primitive de q -développement $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, alors π_f est irréductible et contient toute forme modulaire g telle que $T_p(g) = a_p g$ pour presque tout nombre premier p .*

La représentation π_f est la *représentation automorphe* de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ associée à f . Une de ses caractéristiques essentielles, qui justifie le mot automorphe, est l'invariance à gauche par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$. Plus généralement que les formes modulaires holomorphes et les formes de Maass, la théorie des formes automorphes vise à comprendre les espaces de fonctions sur $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ (avec des conditions vis-à-vis de l'action à droite de sous-groupes compacts tels que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$, et des conditions analytiques). Elle vise en particulier à comprendre les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ dans ces espaces de fonctions.

La représentation π_f contient pour chaque nombre premier p une représentation $\pi_{p,f}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Cela permet de localiser la forme modulaire f . Avant de discuter cette localisation, notons qu'en raison de l'invariance à gauche par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$, la collection des $\pi_{p,f}$, lorsque p parcourt les nombres premiers, n'est pas arbitraire.

Lorsque p est premier au niveau de f , on a vu que le coefficient a_p ne dépend que de $\pi_{p,f}$. Il résulte de l'interprétation du caractère de f que $a_{p,p}$ ne dépend que de $\pi_{p,f}$. Ainsi le facteur d'Euler en p de $\Lambda(f, s)$ ne dépend que de $\pi_{p,f}$.

Si la forme primitive f est associée à une représentation galoisienne (par exemple au sens de Deligne–Serre), la donnée de $\pi_{p,f}$ détermine le polynôme caractéristique de $\rho(\mathrm{Frob}_p)$, et donc la restriction de ρ à un sous-groupe de décomposition en p (rappelons que p ne divise pas le niveau de f et donc que p est non-ramifié pour ρ). Il se trouve que tous les facteurs qui dépendent de p de $\Lambda(f, s)$ (*i.e.* le facteur d'Euler et la valuation p -adique du conducteur) sont déterminés par $\pi_{p,f}$.

Cela ouvre la possibilité d'une correspondance purement locale entre représentations de dimension 2 (resp. n) du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$). Cette correspondance, dite *correspondance de Langlands locale*, a été élucidée (par Harris–Taylor, Henniart, Fargues–Scholze...).

Revenons au groupe global $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$. La traduction dans le langage adélique suggère d'étendre la théorie des formes modulaires en remplaçant GL_2 par GL_n , et l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$ par l'anneau des adèles d'un corps de nombres quelconque. Ainsi, on peut envisager des généralisations des formes modulaires dont les fonctions L coïncident avec les fonctions L des motifs d'Artin, et espérer montrer la conjecture d'Artin. C'est l'objet (d'une partie) de la correspondance de Langlands globale sur laquelle on sait bien peu.