

XXII

Formes de Maass

1. Motifs d'Artin pairs de dimension 2

Soit $\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{C})$ un motif d'Artin. Le facteur en la place infinie de $\Lambda(\rho, s)$ est $\Gamma_{\mathbf{C}}(s)$ si ρ est impaire. Si ρ est paire, ce facteur en la place infinie est $\Gamma_{\mathbf{R}}(s)^2$ (resp. $\Gamma_{\mathbf{R}}(s+1)^2$) si $\rho(\text{conjugaison complexe})$ est Id_2 (resp. $-\text{Id}_2$).

Si $f \in S_1(N, \chi)$ est une forme primitive associée à ρ , on a $\chi(-1) = -1$, et donc ρ impaire car $S_1(N, \chi) = 0$ si $\chi(-1) = 1$. Pour rendre compte des motifs d'Artin pairs, il faudrait des objets analogues aux formes modulaires de poids 1, mais associés aux caractères de Dirichlet pairs, et qui donnent lieu à des fonctions L complétées avec un facteur à l'infini du type $\Gamma_{\mathbf{R}}(s)^2$ ou $\Gamma_{\mathbf{R}}(s+1)^2$.

Soit k un entier ≥ 1 . Soit $f \in S_k(N)$. Posons $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$ qui à $z = x + iy$ associe

$$\phi(x + iy) = \Im(z)^{k/2} f(z) = y^{k/2} f(x + iy).$$

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$. Alors on a

$$\phi\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \left(\frac{cz + d}{|cz + d|}\right)^k \phi(z).$$

Ainsi $|\phi|$ est une fonction $\Gamma_1(N)$ -invariante. Comme f est holomorphe, f est harmonique. Cela se traduit par l'identité suivante. Posons $z = x + iy \in \mathcal{H}$. Considérons l'opérateur sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H}, \mathbf{C})$ donné par

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

C'est le *Laplacien hyperbolique*. Il est $\text{SL}_2(\mathbf{R})$ -invariant. On dispose de plus du *Laplacien hyperbolique de poids k*

$$\Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + iky \frac{\partial}{\partial x}.$$

PROPOSITION 1. — *On a alors*

$$\Delta_k(\phi) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k}{2} \right) \phi.$$

Démonstration. — On a

$$\Delta_k(\phi)(x, y) = -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)y^{k/2}f - ky^{k/2+1}\frac{\partial}{\partial y}f - y^{k/2+2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f + ik y^{k/2+1}\frac{\partial}{\partial x}f.$$

Or $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})f = 0$ car f est holomorphe et on a les relations de Cauchy.

Remarque . — On peut déjà noter l'importance de la valeur propre $1/4$. Pour $k = 1$, on a

$$\Delta_1(\phi) = \frac{1}{4}\phi.$$

2. Formes de Maass

Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Soit $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant les conditions (ι) , $(\mathfrak{u})$ et $(\mathfrak{uu})$ suivantes.

(ι) On a $\phi(\gamma.z) = \phi(z)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $z \in \mathcal{H}$.

$(\mathfrak{u})$ Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\Delta(\phi) = \lambda\phi$.

$(\mathfrak{uu})$ Il existe $A > 0$ tel que $\phi(x + iy) = O(y^A)$ quand y tend vers ∞ .

On dit alors que ϕ est une *forme de Maass*. Si de plus on a

$$\int_0^\nu \phi(\delta^{-1} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta z) dt = 0$$

pour tout $\delta \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \delta\Gamma\delta^{-1}$, on dit que ϕ est *parabolique*. Si on pose $\lambda = 1/4 - \nu^2$, on note $M_\nu(\Gamma)$ l'espace des formes de Maass relatives à λ , et $S_\nu(\Gamma)$ l'espace des formes de Maass paraboliques de $M_\nu(\Gamma)$.

Exemple . — Soit $s \in \mathbf{C}$ avec $\Re(s) > 1$. Posons $z = x + iy$. Posons

$$E_s(z) = \pi^{-s}\Gamma(s) \sum_{(n,m) \in \mathbf{Z}^2 - \{0\}} \frac{y^s}{|nz + m|^{2s}}$$

qui converge pour $\Re(s) > 1$. La fonction E_s est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ -invariante. De plus, pour $\nu \in \mathbf{R}$, on a

$$\Delta(y^{\nu+1/2}) = \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)y^{\nu+1/2}.$$

On a alors

$$\Delta(E_{\nu+1/2}) = \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)E_{\nu+1/2}.$$

Alors E_s est une *série d'Eisenstein*, et la série $s \mapsto E_s$ se prolonge à $s \in \mathbf{C}$, en particulier $s = 1/2$, et alors $1/4 - \nu^2 = 1/4$. La valeur propre $1/4$ fait une nouvelle apparition.

On a un analogue de la notion de q -développement pour les formes de Maass. Supposons, pour simplifier, que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$. On a alors $\phi(z+1) = \phi(z)$. Posons $\lambda = 1/4 - \nu^2$. On peut alors écrire

$$\phi(x + iy) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} c_r(y) e^{2i\pi r x}.$$

La relation $\Delta(\phi) = (1/4 - \nu^2)\phi$ se traduit par

$$-y^2 \sum_{r \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c_r(y) - 4\pi^2 r^2 c_r(y) \right) e^{2i\pi r x} = \left(\frac{1}{4} - \nu^2 \right) \sum_{r \in \mathbf{Z}} c_r(y) e^{2i\pi r x}.$$

Posons

$$c_r(y) = y^{1/2} k(2\pi|r|y),$$

où k est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à déterminer (dépendante de r). Le r -ème terme de la relation devient, en posant $u = 2\pi|r|y$,

$$-y^2 \frac{-1}{4y^{3/2}} k(u) - 2y^2 \frac{2\pi|r|}{2y^{1/2}} k'(u) - y^{5/2} (4\pi^2 r^2) k''(u) + 4\pi^2 r^2 y^{5/2} k(u) = \left(\frac{1}{4} - \nu^2 \right) y^{1/2} k(u).$$

En divisant par $y^{1/2}$, on obtient

$$-2\pi|r|y k'(u) - (2\pi|r|y)^2 k''(u) + (2\pi|r|y)^2 k(u) + \nu^2 k(u) = 0.$$

et donc, on obtient l'équation de Bessel tournée

$$uk'(u) + u^2 k''(u) - u^2 k(u) - \nu^2 k(u) = 0.$$

Cette équation dépend de la constante ν , mais pas de r : k est annulé par l'opérateur

$$u^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + u \frac{\partial}{\partial u} - (u^2 + \nu^2).$$

Après la rotation de $\pi/2$, $v = iu$ et $h(v) = k(u)$, elle devient

$$v^2 h''(v) + v h'(v) + (v^2 - \nu^2) h(v) = 0,$$

qui est l'équation de Bessel. L'espace des solutions de l'équation de Bessel est de dimension 2. Il possède un sous-espace de dimension 1 formé par les solutions qui tendent vers 0 en l'infini. Une solution particulière (qui tend vers 0 en l'infini) est fournie par la fonction de Bessel définie par les deux formules

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(t+1/t)y/2} t^\nu \frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-y \operatorname{ch}(x)} \operatorname{ch}(\nu x) dx.$$

(On voit que les deux formules sont égales en coupant la première intégrale $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ et en posant $t = e^{-x}$ et $t = e^x$ respectivement dans les deux termes et en regroupant finalement.)

PROPOSITION 2. — *On a les propriétés suivantes.*

- 1) *On a $K_{-\nu} = K_\nu$.*
- 2) *La fonction K_ν vérifie l'équation de Bessel tournée (pour la constante ν).*
- 3) *On a, si $r \neq 0$,*

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)^{-s} e^{2i\pi r x} dx = 2|r|^{s-1/2} \sqrt{y} K_{s-1/2}(2\pi|r|y)$$

et, si $r = 0$,

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)^{-s} dx = \pi^{-s+1/2} \Gamma(s - 1/2) y^{1-s}.$$

4) *On a*

$$\int_0^\infty K_\nu(y) y^s \frac{dy}{y} = 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right).$$

(L'intégrale converge absolument pour $\Re(s) > |\Re(\nu)|$. On a donc un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.)

Démonstration. — L'identité 1) est évidente sur la deuxième formule qui définit K_ν . Vérifions 2). Utilisons la deuxième formule. On a, en intégrant par parties,

$$\nu^2 K_\nu(y) = \nu [\text{sh}(\nu x) e^{-y \text{ch}(x)}]_0^\infty + \nu \int_0^\infty y \text{sh}(x) e^{-y \text{ch}(x)} \text{sh}(\nu x) dx.$$

Le premier terme du membre de droite est nul. Intégrons encore par partie. On a

$$\nu^2 K_\nu(y) = [y \text{sh}(x) \text{ch}(\nu x) e^{-y \text{ch}(x)}]_0^\infty + \int_0^\infty (y^2 \text{sh}(x)^2 - y \text{ch}(x)) e^{-y \text{ch}(x)} \text{ch}(\nu x) dx.$$

Le premier terme du membre de droite est encore nul. On a, en utilisant la relation, $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$,

$$\nu^2 K_\nu(y) = \int_0^\infty (y^2 \text{ch}(x)^2 - y^2 - y \text{ch}(x)) e^{-y \text{ch}(x)} \text{ch}(\nu x) dx.$$

Il reste à utiliser que

$$\frac{\partial}{\partial y} K_\nu(y) = - \int_0^\infty \text{ch}(x) e^{-y \text{ch}(x)} \text{ch}(\nu x) dx$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} K_\nu(y) = \int_0^\infty \text{ch}(x)^2 e^{-y \text{ch}(x)} \text{ch}(\nu x) dx.$$

On a donc la relation cherchée

$$\nu^2 K_\nu(y) = y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_\nu(y) + y \frac{\partial}{\partial y} K_\nu(y) - y^2 K_\nu(y).$$

Pour établir 3), on utilise la formule $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$. On a donc

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{-\infty}^\infty (x^2 + y^2)^{-s} e^{2i\pi r x} dx = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{ty}{\pi(x^2 + y^2)}\right)^s e^{2i\pi r x} dx, \quad dt,$$

où on a remplacé t par $\pi t(x^2 + y^2)/y$. On obtient donc, en exploitant la convergence absolue de l'intégrale double

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{-\infty}^\infty (x^2 + y^2)^{-s} e^{2i\pi r x} dx = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi t(x^2 + y^2)/y} t^s e^{2i\pi r x} dx \frac{dt}{t}.$$

On utilise maintenant la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\pi x^2/y} e^{2i\pi r x} dx = \sqrt{\frac{y}{t}} e^{-y\pi r^2/t}.$$

On obtient

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{-\infty}^\infty (x^2 + y^2)^{-s} e^{2i\pi r x} dx = 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{y}{t}} e^{-y\pi r^2/t - \pi t y} t^s \frac{dt}{t}.$$

et donc on trouve

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{-\infty}^\infty (x^2 + y^2)^{-s} e^{2i\pi r x} dx = 2y^{1/2} \int_0^\infty e^{-2\pi|r|y(|r|/t + t/|r|)} t^{s-1/2} \frac{dt}{t}.$$

Il suffit maintenant de changer la variable t en $t/|r|$.

Il reste à prouver 4). On a

$$\int_0^\infty K_\nu(y) y^s \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{(t+1/t)y/2} t^\nu y^s \frac{dy}{y} \frac{dt}{t}.$$

Posons $u = ty/2$ et $v = y/(2t)$. Le déterminant jacobien de ce changement de variable est 2. On a donc

$$\int_0^\infty K_\nu(y) y^s \frac{dy}{y} = 2^{s-2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v} u^{(s+\nu)/2} v^{(s-\nu)/2} \frac{dv}{v} \frac{du}{u}.$$

On peut séparer les intégrales :

$$\int_0^\infty K_\nu(y) y^s \frac{dy}{y} = 2^{s-2} \int_0^\infty e^{-u} u^{(s+\nu)/2} \frac{du}{u} \int_0^\infty e^{-v} v^{(s-\nu)/2} \frac{dv}{v} = 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right).$$

La convergence absolue pour $\Re(s) > \Re(|\nu|)$ se voit. Cela achève de prouver la proposition.

Le théorème suivant est une conséquence de la discussion ci-dessus.

THÉORÈME 3. — Soit $\phi \in M_\nu(\Gamma)$. Supposons que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$. Il existe une famille de nombres complexes $(a_r)_{r \in \mathbf{Z}}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $y > 0$, on a

$$\phi(x + iy) = y^{1/2} \sum_{r \in \mathbf{Z}} a_r K_\nu(2\pi|r|y) e^{2i\pi r x}.$$

L'expression est le *développement de Fourier au moyen de fonctions de Bessel* de ϕ (ou, quelquefois, de *Fourier–Bessel*).

On a l'involution ι sur $M_\nu(\phi)$ donnée par $\iota(\phi)(x + iy) = \phi(-x + iy)$. Si $\iota(\phi) = \phi$, on dit que ϕ est *paire*. Si $\iota(\phi) = -\phi$, on dit que ϕ est *impaire*.

L'espace $M_\nu(\Gamma)$ est de dimension finie. Mais contrairement au cas des formes modulaires holomorphes $M_k(\Gamma)$, pour $k \geq 2$, on ne dispose pas de formule simple pour cette dimension.

On peut déduire de la propriété 3) de la proposition 2 que $a_r = O(|r|^{1/2})$ quand r tend vers l'infini.

3. Sous-groupes de congruence

Soit N un entier ≥ 1 . Pour $\nu \in \mathbf{R}$, posons $M_\nu(N) = M_\nu(\Gamma_1(N))$. Posons, pour $\phi \in M_\nu(\Gamma_1(N))$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$,

$$\phi|_\gamma = \phi\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

On a alors une théorie de Hecke pour les formes de Maass de $M_\nu(N)$:

- Des opérateurs δ_{d*} et δ_d^* de montée et descente de niveau.
- Les notions qui en découlent de formes anciennes et nouvelles
- Pour m entier ≥ 1 , un opérateur de Hecke T_m sur $M_\nu(N)$ défini par

$$T_m(\phi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_1(N)\Delta_m(N)} \phi|_\gamma.$$

- Un opérateur $T_{m,m}$ sur $M_\nu(N)$ défini par $T_{m,m} = 0$ si m et N ne sont pas premiers entre eux et par

$$T_{m,m}(\phi) = \phi|_\gamma,$$

où $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, avec $d \equiv m \pmod{N}$. C'est l'opérateur diamant associé à l'action de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ sur $M_\nu(N)$. Pour χ caractère $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$, on note $M_\nu(N, \chi)$

le sous-espace de $M_\nu(N)$ formé par les ϕ telles que $T_{m,m}(\phi) = \chi(m)\phi$ pour tout entier m premier à N . On a alors $M_\nu(N) = 0$ si $\chi(-1) = -1$.

– Une décomposition

$$M_\nu(N) = \oplus_\chi M_\nu(N, \chi),$$

où χ parcourt les caractères modulo N .

– Les opérateurs $T_m, T_{m,m}, \Delta, \iota$ engendrent une algèbre commutative.

– Ils vérifient la relation $T_m T'_m = T_{mm'}$ si m et m' sont des entiers premiers entre eux.

On a de plus $T_{p^{r+1}} = T_p T_{p^r} - T_{p,p} T_{p^{r-1}}$ si p est premier et r entier ≥ 1 .

– On a la relation $a_1(T_m(\phi)) = a_m(\phi)$, pour m entier ≥ 1 , où a_m est le coefficient qui apparaît dans le développement de Fourier avec les fonctions de Bessel de $\phi \in M_\nu(N)$.

– Un produit hermitien sur les formes de Maass paraboliques de $M_\nu(N)$ donné par la formule

$$[\phi_1, \phi_2]_{\Gamma_1(N)} = \frac{1}{\text{vol}(\Gamma_1(N) \backslash \mathcal{H})} \int_{\Gamma_1(N) \backslash \mathcal{H}} \phi_1(x+iy) \overline{\phi_2(x+iy)} \frac{dx dy}{y^2},$$

pour lequel on a les propriétés d'adjonction analogues à celle des formes modulaires holomorphes. Il en résulte

– Une notion de forme de Maass *normalisée* lorsque le coefficient a_1 du développement de Bessel est égal à 1.

– Une forme de Maass $\phi \in M_\nu(N)$ est dite *primitive* si elle est propre pour $T_m, T_{m,m}, \Delta, \iota$ pour tout $m \geq 1$, et si elle est nouvelle et normalisée. On a alors

$$\phi(x+iy) = y^{1/2} \sum_{r \in \mathbf{Z}} a_r K_\nu(2\pi|r|y) e^{2i\pi r x},$$

avec a_r valeur propre de T_r , pour tout entier $r > 0$. De plus on a $a_r = a_{-r}$ (resp. $a_r = -a_{-r}$ si ϕ est paire (resp. impaire)).

– Un opérateur $W_N : M_\nu(N, \chi) \rightarrow M_\nu(N, \bar{\chi})$ vérifiant, si ϕ est primitive,

$$W_N(\phi) = w_N \phi^*,$$

où ϕ^* est donné par le développement

$$\phi^*(x+iy) = y^{1/2} \sum_{r \in \mathbf{Z}} \overline{a_r} K_\nu(2\pi|r|y) e^{2i\pi r x},$$

avec $\overline{a_r} = a_r \bar{\chi}(r)$ si r est premier à N .

Supposons que ϕ est parabolique. Il n'est pas attendu que les valeurs propres des opérateurs de Hecke soient algébriques en général, sauf pour $\lambda = 1/4$, mais on ne sait pas le prouver, sauf dans les cas particuliers ci-dessous. Si $\lambda = 1/4$, on dit que la forme de Maass est *algébrique*.

Soit $\phi \in M_\nu(N)$ paire ou impaire. Posons

$$L(\phi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

et

$$\Lambda(\phi, s) = N^{s/2} \pi^{-s} L(\phi, s) \Gamma\left(\frac{s + \nu + \epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s - \nu + \epsilon}{2}\right),$$

avec $\epsilon = 0$ si ϕ est paire et $\epsilon = 1$ si ϕ est impaire.

Si ϕ est primitive avec $T_p(\phi) = a_p \phi$ et $T_{p,p}(\phi) = a_{p,p} \phi$, $L(\phi, s)$ admet le produit eulérien,

$$L(\phi, s) = \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + a_{p,p} p^{-2s}}.$$

THÉORÈME 4. — *Supposons ϕ primitive et parabolique. Alors $\Lambda(\phi, s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$ et l'équation fonctionnelle*

$$\Lambda(\phi^*, s) = w_N \Lambda(\phi, 1 - s),$$

avec w_N nombre complexe de module 1.

Démonstration. — Montrons le pour $N = 1$. Le cas général ne pose pas de difficulté, en utilisant l'opérateur W_N . On a alors, pour $y \in \mathbf{R}$, la relation $\phi(iy) = \phi(i/y)$.

Supposons d'abord ϕ paire. On a $a_0 = 0$ et $a_r = a_{-r}$. Considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty \phi(iy) y^s \frac{dy}{y},$$

qui converge (en l'infini en raison de la décroissance rapide pour les formes paraboliques, en 0 par $\phi(iy) = \phi(i/y)$). Pour s assez grand, on remplace ϕ par son développement. On obtient

$$\int_0^\infty \phi(iy) y^s \frac{dy}{y} = \int_0^\infty \sum_{r \in \mathbf{Z}} a_r K_\nu(2\pi|r|y) y^s \frac{dy}{y}.$$

Posons $u = 2\pi|r|y$ et remarquons qu'on a convergence absolue de l'intégrale. On obtient alors

$$2 \sum_{r=1}^\infty a_r (2\pi r)^{-s} \int_0^\infty K_\nu(u) u^s \frac{du}{u} = \Gamma\left(\frac{s + \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s - \nu}{2}\right) \pi^{-s} L(\phi, s).$$

L'équation fonctionnelle résulte de l'identité $\phi(iy) = \phi(i/y)$, ce qui donne

$$\Lambda(\phi, s) = \Lambda(\phi, 1 - s)$$

et on a $\phi = \phi^*$ si $N = 1$.

Supposons maintenant ϕ impaire. On considère l'intégrale

$$\int_0^\infty \psi(iy) y^{s+1/2} \frac{dy}{y},$$

où on a posé

$$\psi(x + iy) = \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x + iy) = \sum_{r=1}^\infty a_r r y^{1/2} K_\nu(2\pi r y) \cos(2\pi r x).$$

On a alors $\psi(iy) = -\psi(i/y)/y^2$. On a alors

$$\int_0^\infty \psi(iy) y^{s+1/2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{4\pi i} \int_0^\infty \sum_{r=1}^\infty a_r r y^{1/2} K_\nu(2\pi|r|y) y^{s+1/2} \frac{dy}{y}.$$

On pose encore $u = 2\pi|r|y$. On obtient alors

$$\sum_{r=1}^\infty a_r r (2\pi r)^{-s-1} \int_0^\infty K_\nu u^{s+1} \frac{du}{u} = \Gamma\left(\frac{s+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1-\nu}{2}\right) \pi^{-s} L(\phi, s).$$

L'équation fonctionnelle est alors

$$\int_0^\infty \psi(iy) y^{s+1/2} \frac{dy}{y} = \int_\infty^0 (-u^2) \psi(iu) u^{-s-1/2} \left(-\frac{du}{u}\right) = - \int_0^\infty \psi(iu) u^{3/2-s} \frac{du}{u}.$$

On a donc

$$\Lambda(\phi, s) = -\Lambda(\phi, 1-s),$$

avec encore $\phi = \phi^*$.

Si $\nu = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 1/4$, les fonctions L des formes de Maass primitives ont les mêmes propriétés formelles que les fonctions L des motifs d'Artin ρ de dimension 2 pairs. Les formes de Maass paires et impaires distinguent les deux types pour l'image d'une conjugaison complexe par ρ . Si $\lambda \neq 1/4$, il n'y a pas de lien apparent avec les représentations galoisiennes.

Soit $\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{C})$ un motif d'Artin pair, irréductible.

THÉORÈME 5 (Hecke, Maass, Langlands, Tunnell). — *Si ρ est de type diédral, tétraédral, ou octaédral, il lui correspond une forme de Maass primitive (avec $\lambda = 1/4$).*

(Les cas diédraux sont dûs à Hecke et Maass, le cas tétraédral à Langlands, le cas octaédral à Tunnell. Ces résultats utilisent une version du théorème inverse de Hecke–Weil pour les formes de Maass. Tout cela s'appliquait aux représentations impaires, mais dans ce cas on dispose du théorème plus général de Khare–Wintenberger). Il n'y a pas de tel résultat dans le cas icosaédral. Il n'y a pas de théorème de type Deligne–Serre qui associe un tel ρ à une forme de Maass primitive.

Ce théorème fournit un moyen de construire explicitement des formes de Maass paraboliques, qui était connu de Maass dans le cas diédral.

CONJECTURE 1 ("Ramanujan–Pettersson"). — *Soit p un nombre premier. Soit ϕ une forme de Maass algébrique parabolique avec $T_p(\phi) = a_p \phi$. Alors on a*

$$|a_p| \leq 2.$$

Cette conjecture est vérifiée pour les formes de Maass associées aux motifs d'Artin comme dans le théorème précédent. Un moyen de la démontrer serait d'associer un motif d'Artin à toute forme de Maass parabolique algébrique. On peut voir Δ et ι comme les opérateurs de Hecke et diamant en la place infinie. On a un analogue de la conjecture de Ramanujan–Petersson en la place infinie.

CONJECTURE 2 (Selberg). — *Si Γ est un sous-groupe de congruence et ϕ une forme de Maass parabolique avec $\Delta(\phi) = \lambda\phi$, on a*

$$\lambda \geq 1/4.$$

Un résultat dans cette direction est dû à Kim et Sarnak : on a $\lambda \geq 975/4096$. Plus précisément, la conjecture de Selberg affirme que pour une forme de Maass associée à la constante ν , on a $\nu \in [-1/2, 1/2]$ ou ν imaginaire pur. Selberg a prouvé la conjecture pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. La conjecture est fausse si on n'impose pas que Γ est de congruence (il y a des contre-exemples), ou si on n'impose pas que ϕ est parabolique (voir les séries d'Eisenstein).