XXI
Les théorèmes de modularité

1. Les opérateurs de torsion

Soit M un entier ≥ 1. Soit ϵ un caractère $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$. On pose

$$\tau(\epsilon) = \sum_{v \pmod M} \epsilon(u) e^{2i\pi v/M}.$$

C'est une *somme de Gauss*. Rappelons qu'on a $|\tau(\epsilon)|^2 = M$ et $\tau(\bar{\epsilon}) = \epsilon(-1)\overline{\tau(\epsilon)}$.

Soit k un entier ≥ 1. Soit N un entier ≥ 1. Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N. Pour $f \in M_k(N, \chi)$, on pose

$$S_\epsilon(f) = \sum_{u \pmod M} \bar{\epsilon}(u) f \,|_k \begin{pmatrix} 1 & u/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1. — *On a $S_\epsilon(f) \in M_k(NM^2, \chi\epsilon^2)$. Soit n un entier ≥ 1. Supposons n premier à M ou ϵ primitif. On a*

$$a_n(S_\epsilon(f)) = \epsilon(n) a_n(f) \tau(\bar{\epsilon}).$$

Démonstration. — Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(NM^2)$. Posons

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u'/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $M|(du - au')$. On a alors

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + cu/M & b + du/M - au'/M - cu'/M^2 \\ c & d - cu'/M^2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$S_\epsilon(f) \,|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{u \pmod M} \bar{\epsilon}(u) f \,|_k \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u'/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ et que $d' \equiv d \pmod N$, on a

$$f|_k \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \chi(d) f.$$

On a donc

$$S_\epsilon(f)|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{u \pmod M} \bar\epsilon(u)\chi(d) f|_k \begin{pmatrix} 1 & -u'/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, on a $u \equiv au'/d \pmod N$ et donc

$$\bar\epsilon(u) = \bar\epsilon(u')\bar\epsilon(a/d) = \bar\epsilon(u')\bar\epsilon(d)^2.$$

On a donc

$$S_\epsilon(f)|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi(d)\epsilon(d)^2 S_\epsilon(f).$$

Cela prouve que $S_\epsilon(f) \in M_k(NM^2, \chi\epsilon^2)$.

Écrivons le q-développement de f : $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$. On a

$$S_\epsilon(f)(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{u \pmod M} \bar\epsilon(u) e^{2i\pi n(z+u/M)} = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{u \pmod M} \bar\epsilon(u) e^{2i\pi nu/M} \Big) e^{2i\pi nz}.$$

Or on a $\sum_{u \pmod M} \bar\epsilon(u) e^{2i\pi nu/M} = 0$ si $(n, M) \neq 1$ ou si ϵ primitif. Posons $v = nu$. On a

$$S_\epsilon(f)(z) = \sum_{n\geq 0,(n,M)=1} a_n \sum_{v \pmod M} \bar\epsilon(v/n) e^{2i\pi v/M} e^{2i\pi nz}$$

Les termes pour $(n, M) \neq 1$ ne comptent pas puisque ϵ est un caractère modulo N. On obtient donc

$$S_\epsilon(f)(z) = \tau(\bar\epsilon) \sum_{n\geq 0} \epsilon(n) a_n e^{2i\pi nz}.$$

Cela achève la démonstration.

Alors on pose $f \otimes \epsilon = \frac{1}{\tau(\bar\epsilon)} S_\epsilon(f)$. C'est la *tordue* de f par ϵ. La torsion d'une forme modulaire par un caractère est un cas simple de produit de formes automorphes (ici pour GL_2 et GL_1).

THÉORÈME 2. — *Supposons f primitive, M premier à N et ϵ primitif. Alors $f \otimes \epsilon$ est primitive.*

Démonstration. — On a $a_1(f \otimes \epsilon) = 1$. Soit m un entier ≥ 1. Montrons que $S_\epsilon(f)$ est propre pour T_m. On a

$$T_m S_\epsilon(f) = \sum_{\gamma \in \Delta_m(NM^2)} \sum_{u \pmod M} \bar\epsilon(u) f|_k \begin{pmatrix} 1 & u/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma.$$

Pour chaque u on choisit un entier u' tel que $M|(du-au')$ et on pose $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On pose alors

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & u/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\gamma) \begin{pmatrix} 1 & -u/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne

$$\gamma' = \begin{pmatrix} a+cu/M & b+du/M-au'/M-cu'/M^2 \\ c & d-cu'/M^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\gamma' = \begin{pmatrix} a+cu/M & b+du/M-au'/M-cu'/M^2 \\ c & d-cu'/M^2 \end{pmatrix}$ parcourt alors l'ensemble quotient $\Gamma_1(NM^2)\backslash\Delta_m(NM^2)$.

On a donc $\bar\epsilon(u) = \bar\epsilon(au'/d) = \bar\epsilon(u')\epsilon(m)$, car $a \equiv 1 \pmod M$ et $d \equiv m \pmod M$.

$$T_m S_\epsilon(f) = \epsilon(n) \sum_{u' \pmod N} (T_m f)_{|_k} \begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \epsilon(m) a_m S_\epsilon f.$$

Ainsi f est propre pour tous les opérateur T_m, pour $m \geq 1$. Il reste à vérifier que f est nouvelle. C'est un calcul direct.

Remarque . — Si M et N ne sont pas premiers entre eux, on peut encore considérer $S_\epsilon(f)$. C'est une forme modulaire pour $\Gamma_1(NM^2)$ propre pour tous les opérateurs T_m avec m premier à NM^2, avec la valeur propre $a_m\epsilon(m)$ (voir la démonstration ci-dessus). Mais elle n'est pas nouvelle en général. Par le théorème de multiplicité 1, il existe une unique forme primitive qui réalise ce système de valeurs propres. On la note $f \otimes \epsilon$. Son niveau, qui n'est pas évident, divise NM^2. Si f est primitive, on a en particulier $(f \otimes \epsilon) \otimes \bar\epsilon = f$ (mais le niveau de f est strictement inférieur au niveau de $f \otimes \epsilon$, si M est premier à N).

Corollaire . — *On a, pour f primitive, $f^* = f \otimes \bar\chi$.*
Démonstration. — Les formes modulaires $f \otimes \chi$ et f^* sont toutes deux primitives avec les mêmes valeurs propres, et sont donc égales.

Proposition 3. — *Supposons f primitive avec $W_N(f) = w_N f^*$, ϵ primitif et M premier à N. Alors on a*

$$W_{NM^2}(f \otimes \epsilon) = \epsilon(-N)\chi(M)\frac{\tau(\epsilon)}{\tau(\bar\epsilon)} w_N f^* \otimes \bar\epsilon.$$

Démonstration. — Soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -NM^2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$. On a

$$S_\epsilon(f)_{|_k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -NM^2 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{u \pmod N} \bar\epsilon(u) f_{|_k} \begin{pmatrix} 1 & u/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -NM^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uilisons la formule

$$\begin{pmatrix} 1 & u/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -NM^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -u'/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -NMu & 1+uu'N \\ -NM^2 & NMu' \end{pmatrix}.$$

Pour chaque u, on choisit un entier u' tel que $M|(1+uu'M)$. On a alors

$$\begin{pmatrix} -NMu & 1+uu'N \\ -NM^2 & NMu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+uu')/M & u \\ Nu' & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $\gamma'_u = \begin{pmatrix} (1+uu')/M & u \\ Nu' & M \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. On a donc

$$W_{NM^2}(S_\epsilon(f)) = \sum_{u' \pmod N} \epsilon(u')\epsilon(-N)(f_{|_k\gamma_{u'}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u'/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme on a $f_{|k\gamma'_u} = \chi(M)f$. Comme $1+uu' \equiv 0 \pmod N$, on a $\bar\epsilon(u) = \epsilon(-N)\epsilon(u')$. On en déduit

$$W_{NM^2}(S_\epsilon(f)) = \epsilon(-N)\chi(M)S_{\bar\epsilon}(W_N(f)).$$

On a donc

$$\tau(\bar\epsilon)W_{NM^2}(f\otimes\epsilon) = \epsilon(-N)\chi(M)\tau(\epsilon)W_N(f)\otimes\bar\epsilon.$$

Comme on a

$$W_{NM^2}(f\otimes\epsilon) = w_{NM^2}\overline{f\otimes\epsilon} = w_{NM^2}\bar f\otimes\bar\epsilon$$

et $W_N(f) = w_N f$, on obtient $w_{NM^2} = \epsilon(-N)\chi(M)w_N\tau(\epsilon)/\tau(\bar\epsilon)$.

Remarque . — Si N et M ne sont pas premiers entre eux, il n'y a pas de formule simple pour $W_{NM^2}(f\otimes\epsilon)$.

Corollaire . — *On a pour $f \in M_k(N,\chi)$ primitive, ϵ primitif et M premier à N, l'équation fonctionnelle*

$$i^{-k}\epsilon(-N)\chi(M)w_N\frac{\tau(\epsilon)}{\tau(\bar\epsilon)}\Lambda(\bar f\otimes\bar\epsilon, s) = \Lambda(f\otimes\epsilon, k-s).$$

Proposition 4. — *Si $f \in M_k(N,\chi)$ de q-développement $\sum_{n\geq 0} a_n q^n$ est primitive, et que ϵ est primitif avec N premier à M, on a*

$$L(f\otimes\epsilon) = \sum_{n\geq 1}\frac{a_n\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-a_p\epsilon(p)p^{-s}+a_{p,p}\epsilon(p)^2p^{k-1-2s}}$$

et

$$\Lambda(f\otimes\epsilon) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)(NM^2)^{s/2}L(f\otimes\epsilon, s).$$

2. Les théorèmes inverses

Étant donnée une série de Dirichlet

$$L(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s},$$

est-ce la fonction L d'une forme modulaire ? On peut imposer des conditions de croissance sur les coefficients a_n : $a_n = O(n^A)$ pour $A \in \mathbf{R}$.

Posons, pour $s \in \mathbf{C}$,

$$\Lambda(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s).$$

On dit qu'une fonction entière F est *bornée dans toute bande verticale*, si pour tous a, $b \in \mathbf{R}$, il existe $C \in \mathbf{R}$ avec, pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $a < \Re(s) < b$ on a $|F(s)| < C$.

Théorème 5 (Hecke). — *Soit k un entier ≥ 1 Si Λ admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$ borné dans toute bande verticale et vérifie l'identité*

$$\Lambda(k-s) = i^{-k}\Lambda(s).$$

Alors la fonction de q-développement,

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$$

est une forme forme modulaire parabolique de poids k pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Démonstration. — Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est engendré par les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il suffit de montrer que $f_{|_k S} = f$ et $f_{|_k T} = f$. La deuxième égalité est immédiate. L'identité $f_{|_k S} = f$ résulte de l'équation fonctionnelle et de l'application de la transformée de Mellin inverse. Elle se traduit par l'identié $f(iy) = y^{-k} f(i/y)$ pour $y \in \mathbf{R}$.

En effet, on a

$$\sum_{n\geq 1} a_n e^{-2\pi y n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma_0} y^{-s}\Lambda(s)\, ds$$

pour $\Re(\sigma_0) > A+1$ et $a_n = O(A^n)$.

Ensuite, on exprime la différence des intégrales $\frac{1}{2\pi i}\int y^{-s}\Lambda(s)\, ds$ sur les chemins de supports $\Re(s) = \sigma_0$ et $\Re(s) = k - \sigma_0$, pour $\sigma_0 > k$, ce qui se ramène, après avoir fait tendre T vers l'infini, à une intégrale de contour dans le sens trigonométrique sur un rectangle de centre $k/2$, de largeur $> k$, et de hauteur T si on fait tendre T vers l'infini. L'intégrale sur le segment vertical droit existe en raison de la croissance des coefficients a_n et tend vers $f(iy)$quand T tend vers ∞. L'intégrale sur le segment vertical gauche existe par l'équation fonctionnelle et tend vers $-y^{-k}f(i/y)$ quand T tend vers ∞. Comme Λ est bornée sur toute

bande verticale, les intégrales le long des chemins horizontaux tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini. On en déduit $f(iy) = y^{-k}f(i/y)$ pour $y \in \mathbf{R}$, et donc $f(z) = z^{-k}kf(-1/z)$ pour $z \in \mathcal{H}$, par propriété des fonctions holomorphes.

Il existe une variante du théorème 5 pour les formes modulaires de niveau et poids quelconque. Mais il faut faire intervenir la torsion par des caractères.

Soit k un entier ≥ 2. Pour ϵ caractère de Dirichlet modulo N, posons

$$L_\epsilon(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n \epsilon(n)}{n^s}$$

et

$$\Lambda_\epsilon = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)(NM^2)^{s/2}L_\epsilon(s).$$

Posons de plus

$$\bar{\Lambda}_\epsilon(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)(NM^2)^{s/2}\sum_{n\geq 1} \frac{\overline{a_n\epsilon(n)}}{n^s}.$$

THÉORÈME 6 (Weil). — *Supposons qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\Lambda(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)N^{s/2}L(s)$ est entière, bornée dans toute bande verticale et qu'il existe un nombre complexe w_N vérifiant pour tout $s \in \mathbf{C}$*

$$i^{-k}w_N\bar{\Lambda}_1(s) = \Lambda_1(1-s).$$

Supposons de plus que pour tout caractère de Dirichlet primitif ϵ modulo M, avec $(N, M) = 1$, la fonction Λ_ϵ est entière et bornée dans toute bande verticale, et qu'on ait pour tout $s \in \mathbf{C}$,

$$i^{-k}w_N\chi(M)\epsilon(-N)\frac{\tau(\epsilon)}{\tau(\bar{\epsilon})}\bar{\Lambda}_\epsilon(s) = \Lambda_\epsilon(1-s).$$

Alors $\sum_{n\geq 1} a_n q^n$ est le q-développement d'une forme modulaire parabolique de poids k et de niveau N.

Remarque . — Un nombre fini de caractères ϵ suffit pour prouver le théorème de Weil. Il existe une version plus précise, due à Atkin et Li de ce théorème où on utilise seulement les caractères ϵ modulo M avec $M|N$. Cela demande une compréhension plus fine de la torsion des formes modulaires par des caractères.

Il existe une version du théorème 6 pour les formes modulaires non nécessairement paraboliques. Il faut alors alors tenir compte de pôles en $s = 0$ et $s = k$.

Jacquet et Langlands ont généralisé ces théorèmes, reformulés dans le langage adélique. Notamment, il existe des variantes des théorèmes de Hecke–Weil–Jacquet–Langlands pour $L(\rho, s)$ avec ρ associé à un motif d'Artin de dimension 2 pair.

De nombreuses déclinaisons et généralisations ont été trouvée par la suite. Ces théorèmes jouent un rôle important pour attacher des formes modulaires (ou formes automorphes) à des représentations galoisiennes.

Un développement plus récent est dû à Booker. Il s'énonce de la façon suivante. Posons $L(s) = L(\rho, s)$ où ρ est un motif d'Artin de dimension 2 irréductible. S'il existe ϵ tel que $L(\rho \otimes \epsilon, s)$ a un pôle, alors $L(\rho, s)$ a une infinité de pôles. On en déduit que si ρ satisfait la conjecture d'Artin (c'est-à-dire que $s \mapsto L(\rho, s)$ est holomorphe) et ρ impair, il existe une forme de poids 1 telle que $L(f, s) = L(\rho, s)$.

3. Les théorèmes de modularité

Les propriétés formelle de $\Lambda(f, s)$, pour f primitive de poids 1, coïncident avec celles de $\Lambda(\rho, s)$ où $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ impaire. En effet, on a les propriétés communes suivantes (ou plus précisément ces propriétés sont communes à (f, f^*) d'une part et (ρ, ρ^*) d'autre part).

– Les facteurs d'Euler sont de degré 2.
– Le facteur d'Euler en la place infinie est $\Gamma_{\mathbf{C}}$.
– On a un facteur $N^{s/2}$.
– On a une équation fonctionnelle entre s et $1 - s$.
– On a une constante w_N avec w_N nombre complexe de module 1.
– Les séries de Dirichlet convergent pour $\Re(s) > 3/2$.

Cette correspondance est confirmée dans une direction par le théorème suivant.

Théorème 7 (Deligne–Serre). — *Soit $f \in S_1(N, \chi)$ primitive de q-développement $\sum_{n \geq 1} a_n q^n$. Il existe ρ : $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ d'image finie, impaire, de conducteur N telle que $\Lambda(\rho, s) = \Lambda(f, s)$. De plus ρ est irréductible. En particulier, pour tout nombre premier p ne divisant pas N, l'image par ρ d'un sous-groupe d'inertie en p est triviale et le polynôme caractéristique de $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ est $X^2 - a_p X + \chi(p)$.*

On en déduit une inégalité de type Ramanujan–Petersson.

Corollaire 1. — *On a, pour tout p premier, $|a_p| \leq 2$.*
Démonstration. — Les valeurs propres de $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ sont des nombres complexes de module 1. Comme a_p est la trace de $\rho(\mathrm{Frob}_p)$, on a bien $|a_p| \leq 2$.

Corollaire 2. — *La série de Dirichlet $L(f, s)$ converge pour $\Re(s) > 1$.*
Démonstration. — Les relations de multiplicativité des coefficients a_m et le corollaire 1 entraînent que $a_n = O(n^\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$. D'où la convergence de la série.

Corollaire 3. — *Les coefficients de f sont dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres.*
Démonstration. — En effet, il suffit de montrer que les coefficients a_p, pour p premier, sont dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres. C'est le cas, puisque a_p est la trace d'une matrice d'ordre fini qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

On a un résultat dans la direction inverse du théorème de Deligne–Serre.

Théorème 8 (Khare–Wintenberger). — *Soit* $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ *d'image finie, impaire, de conducteur* N. *Il existe une forme primitive* $f \in S_1(N)$ *telle que* $\Lambda(f,s) = \Lambda(\rho,s)$.

Corollaire . — *La conjecture d'Artin est vraie pour* ρ.

Les preuves de ces conjectures sont indirectes et utilisent la théorie des formes modulaires de poids $k \geq 2$. En particulier, elles utilisent le théorème suivant pour une infinité de nombres premiers l.

Théorème 9 (Khare–Wintenberger). — *Soit* l *un nombre premier. Soit* $\bar{\mathbf{F}}_l$ *une clôture algébrique de* $\mathbf{F}_l$. *Soit* $\rho_l : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{F}}_l)$ *d'image finie, impaire, de conducteur* N, *et de poids* k. *Il existe* $f \in S_k(N)$ *primitive de* q*-développement* $\sum_{n\geq 1} a_n q^n$ *telle que, en notant* $\mathcal{O}$ *l'anneau des entiers du corps engendré par les coefficients* a_n *et* λ *un idéal premier non nul de* $\mathcal{O}$ *au dessus de* l *(et donc de corps résiduel contenu dans* $\bar{\mathbf{F}}_l$*), le polynôme caractéristique de* $\rho_l(\mathrm{Frob}_p)$ *est* $X^2 - \tilde{a_p}X + \tilde{\chi}(p)$, *où* $\tilde{}$ *désigne l'image dans* $\mathcal{O}/\lambda \subset \bar{\mathbf{F}}_l$.

Dans cet énoncé, le conducteur N est donné par une recette analogue à celle du conducteur d'Artin, excepté qu'on oublie le facteur qui est une puissance de l. Le poids k est, par construction, un entier ≥ 2, et est lui déterminé par la restriction de ρ_l à un sous-groupe d'inertie en l. Le théorème 9 était une conjecture de Serre, avant d'être démontré par Khare et Wintenberger. On ne sait pas formuler de bon analogue de cette conjecture de Serre lorsque ρ_l est paire.

Toute représentation qui intervient dans le théorème 8 donne lieu à des représentations comme celles du théorème 9 par réduction modulo un premier au dessus de l, pour tout nombre premier l.

Les théorèmes 7 et 8 admettent des analogues pour les représentations réductibles impaires de dimension 2. Une représentation réductible ρ de dimension 2 et de conducteur N est donnée par deux caractères de Dirichlet χ_1 et χ_2 de conducteurs respectifs N_1 et N_2 tels que ρ est isomorphe à $\chi_1 \oplus \chi_2$ et $N = N_1 N_2$.

Si χ_1 et χ_2 ne sont pas tous deux triviaux et $\chi_1\chi_2(-1) = -1$, ce qui revient à dire que ρ est impaire, on dispose de la fonction donnée par le q-développement suivant :

$$E_{\chi_1,\chi_2}(z) = \delta_1 L(\chi_1, 0)/2 + \delta_2 L(\chi_2, 0)/2 + \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n} \chi_1(d)\chi_2(n/d)q^n,$$

Ici, δ_i est nul si $\chi_i \neq 1$ et $\delta_i = 1$ sinon. Alors on a $E_{\chi_1,\chi_2} \in M_1(N, \chi_1\chi_2)$ et non parabolique. C'est une *série d'Eisenstein*. C'est une formalité de montrer l'égalité

$$\Lambda(E_{\chi_1,\chi_2}, s) = \Lambda(\chi_1 \oplus \chi_2, s).$$