XX
Théorèmes de multiplicité un

1. Les opérateurs d'Atkin–Lehner

Soit N un entier ≥ 1. Soit k un entier ≥ 1. Soit D un diviseur de N tel que D et N/D sont premiers entre eux. Soit $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ tel que $ad - bc = D$, $N|c$, $D|a$, $D|d$, $D|(b-1)$, $(N/D)|(a-1)$. Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ normalise $\Gamma_1(N)$.

Pour $f \in M_k(N)$, on pose
$$W_D(f) = f_{|_k W},$$
qui ne dépend pas du choix de W, puisque plusieurs choix diffèrent par multiplication à gauche par un élément de $\Gamma_1(N)$. L'opérateur W_D est dit d'*Atkin–Lehner*, ou de *Fricke* dans certains cas.

Le cas le plus important est $N = D$. On a alors $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 1. — *Soit m un entier ≥ 1 premier à N. On a dans* $\mathrm{End}(M_k(N))$ *:*

1) $W_N^2 = (-1)^k$,

2) $W_N\langle m\rangle = \langle m\rangle^{-1} W_N$ et

3) $W_N T_m = \langle m\rangle^{-1} T_m W_N$.

Démonstration. — La propriété 1) résulte de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -N & 0 \\ 0 & -N \end{pmatrix}$ qui agit comme $(-1)^k$ sur $M_k(N)$. La propriété 2) résulte, pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ de l'identité $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c/N \\ -bN & a \end{pmatrix}$. Si $d \equiv m \pmod{N}$, on a $a \equiv m^{-1} \pmod{N}$. Pour démontrer 3), on utilise une formule analogue pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta_m(N)$.

Lorsque k est pair, W_N est donc une involution. Les opérateurs W_N et les opérateurs diamants engendrent un groupe diédral qui agit sur $M_k(N)$. Les opérateurs W_D laissent stables les parties anciennes et nouvelles de $M_k(N)$. Pour $N = D$, cela résulte du fait que $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}$ commute à δ_d.

Corollaire 1. — *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N. On a $W_N M_k(N,\chi) = M_k(N,\bar{\chi})$.*

COROLLAIRE 2. — *Si $\chi = 1$, W_N est une involution qui laisse stable $M_k(N, \chi)$ (qui est nul si k est impair) et ses valeurs propres sont égales à 1 ou -1.*

Soit $f \in M_k(N)$. Si on a $T_m(f) = a_m f$, on a

$$T_m W_N(f) = \langle m \rangle W_N T_m(f) = a_m \langle m \rangle W_N(f) = a_m W_N \langle m \rangle^{-1}(f).$$

Si $f \in M_k(N, \chi)$, avec χ caractère de Dirichlet, on a $W_N(f) \in M_1(N, \bar{\chi})$ et $T_m W_N(f) = a_m \bar{\chi}(m) W_N(f)$. Donc $W_N(f)$ est propre pour T_m. Mais W_N ne préserve pas $M_k(N, \chi)$, sauf si $\chi = \bar{\chi}$, ce qui est impossible en poids 1.

Les opérateurs W_D satisfont des propriétés analogues à celles de la proposition 1. On peut en particulier factoriser W_N comme $W_N = W_D W_{N/D}$ et plus généralement, en posant $N = \prod_p p^{e_p}$,

$$W_N = \prod_p W_{p^{e_p}}.$$

2. Le produit hermitien de Petersson

Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.
Soient $(f, g) \in S_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma)$. On pose

$$\langle f, g \rangle_\Gamma = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma \backslash \mathcal{H})} \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} \Im(z)^k \frac{dx\, dy}{y^2},$$

où $z = x + iy$, et la mesure $\frac{dx\, dy}{y^2}$ est la forme volume hyperbolique, invariante par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$. Ici $\mathrm{vol}(\Gamma \backslash \mathcal{H}) = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} \frac{dx\, dy}{y^2}$, dont la valeur est $|\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})| \pi/3$. La forme différentielle $f(z)\overline{g(z)}\Im(z)^k \frac{dx\, dy}{y^2}$ est Γ-invariante. La convergence de l'intégrale résulte du fait que f ou g est parabolique si bien qu'on a décroissance rapide au voisinage des pointes. On a un accouplement hermitien défini positif, qui s'étend à $M_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma)$, mais pas à *a priori* $M_k(\Gamma) \times M_k(\Gamma)$ puisque l'intégrale ne converge pas. Le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\Gamma$ ne change pas si on remplace Γ par un sous-groupe Γ' d'indice fini, puisque le numérateur et le dénominateur sont changé par l'indice de Γ' dans Γ.

Résumons ses principales propriétés.

PROPOSITION 2. — *Soit N un entier ≥ 1. Soit m un entier premier à N. L'opérateur adjoint de T_m pour $\langle ., . \rangle_{\Gamma_1(N)}$ est $\langle m \rangle^{-1} T_m$.*

Démonstration. — On utilise la formule, pour $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$, en exploitant l'invariance de $f(z)\overline{g(z)}\Im(z)^k \frac{dx\, dy}{y^2}$ et en appliquant γ^{-1}

$$f_{|_k \gamma} \overline{g(z)} \Im(z)^k \frac{dx\, dy}{y^2} = f \overline{g_{|_k \gamma^{-1}}(z)} \Im(z)^k \frac{dx\, dy}{y^2}.$$

En posant, $\tilde{\gamma} = \det(\gamma)\gamma^{-1}$. L'opération $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ sur les matrices qui définissent T_m change T_m en $\langle m \rangle^{-1} T_m$.

Remarque . — Au vu de l'identité $\langle m\rangle^{-1}T_m = W_N T_m W_N^{-1}$, on peut vérifier que l'adjoint de T_m est $W_N T_m W_N^{-1}$ pour tout entier $m \geq 1$.

COROLLAIRE 1. — *Les opérateurs T_m et $T_{m,m}$ pour m parcourant les entiers premiers à N, sont simultanément diagonalisables.*

COROLLAIRE 2. — *Si a_m est une valeur propre pour T_m dans l'espace $M_k(N,\chi)$, pour m entier premier à N, on a $\overline{a_m} = \overline{\chi(m)}a_m$.*

COROLLAIRE 3. — *Si a_m est une valeur propre réelle pour T_m dans l'espace $M_k(N,\chi)$, pour m entier premier à N, on a $\chi(m) = 1$ ou $a_m = 0$. En particulier, si f est propre pour tous les opérateurs de Hecke T_m, avec m entier premier à m, avec des valeurs propres réelles, on a $\chi = 1$, ce qui est impossible en poids 1.*

COROLLAIRE 4. — *Si $\chi = 1$, en particulier si $N = 1$, les valeurs propres de T_m dans l'espace $M_k(N,\chi)$, pour m entier premier à N, sont réelles.*

COROLLAIRE 5. — *Soit m un entier ≥ 1. Soient f et $g \in S_k(N)$ propres pour T_m dans l'espace $M_k(N,\chi)$ avec des valeurs propres distinctes. On a $\langle f,g\rangle_{\Gamma_1(N)} = 0$.*
Démonstration. — Posons $T_m(f) = a_m f$ et $T_m(g) = b_m g$, avec a_m, $b_m \in \mathbf{C}$. On a

$$a_m\langle f,g\rangle_{\Gamma_1(N)} = \langle T_m(f),g\rangle_{\Gamma_1(N)} = \langle f,\langle m\rangle^{-1}T_m g\rangle_{\Gamma_1(N)} = \chi(m)\overline{b_m}\langle f,\langle m\rangle^{-1}g\rangle_{\Gamma_1(N)}.$$

Il reste à utiliser l'identité $\chi(m)\overline{b_m} = b_m$, pour obtenir $a_m\langle f,g\rangle_{\Gamma_1(N)} = b_m\langle f,g\rangle_{\Gamma_1(N)}$.

PROPOSITION 3. — *L'opérateur W_N est adjoint de $\langle -1\rangle W_N$ pour $\langle .,.\rangle_{\Gamma_1(N)}$.*
Démonstration. — C'est similaire aux propriétés d'adjonction des opérateurs de Hecke.

3. Formes primitives

Soit $f \in M_k(N)$. Posons $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$. Elle est dite *primitive* si elle est nouvelle, propre pour tous les opérateurs de Hecke T_m, avec m entier ≥ 1, et normalisée, c'est-à-dire $a_1 = 1$. On a alors $T_m(f) = a_m f$ et on dit que $(a_m)_{m\geq 1}$ est un *système de valeurs propres* pour $\mathbf{T}$. Le q-développement de f est alors donné par $\sum_{n\geq 0} a_n q^n$, en raison de la formule $a_n(f) = a_1(T_n(f)) = a_1(f)a_n = a_n$.

On a alors un morphisme d'anneau $\mathbf{T} \to \mathbf{C}$ qui à T_m associe a_m et qui à $T_{m,m}$ associe $\chi(m)$, où χ est un caractère de Dirichlet modulo N. On a $f \in M_k(N,\chi)$.

On a alors les propriétés $a_{mm'} = a_m a_{m'}$ si m et m' sont premiers entre eux, et $a_{p^{r+1}} = a_p a_{p^r} + a_{p^{r-1}}\chi(p)p^{k-1}$, si p est un nombre premier et r est un entier ≥ 1. On a alors $\chi(p) = 0$ si $p|N$.

En raison de ces propriétés, la connaissance de $(a_m)_{m\geq 1}$ se déduit de la connaissance des a_p pour p premier, qui suffisent donc pour caractériser le système de valeurs propres.

Il est vrai, mais pas évident, qu'il existe alors un corps de nombres K_f qui contient tout le système de valeurs propres, qui sont même des entiers algébriques de K_f.

Si f est nouvelle et propre pour T_m pour tout entier $m \geq 1$, sans être nécessairement normalisée, on a $a_1 \neq 0$. On peut toujours diviser par a_1 pour normaliser f.

On a, pour d entier ≥ 1, $\delta_{d,*}(f) \in M_k(M)$ pour tout M multiple de dN. On a alors $\delta_{d,*}(f)$ propre pour T_m avec la valeur propre a_m.

Ainsi les systèmes de valeurs propres (au moins pour les T_m avec m premier à d) sont essentiellement répétés de multiples fois dans les sous-espaces anciens des espaces de formes modulaires.

Proposition 4. — *Soit $f \in M_k(N)$ de q-développement $\sum_{n\geq 0} a_n q^n$. Soit f^* la fonction donnée par $f^*(z) = \sum_{n\geq 0} \overline{a_n} q^n$. Si f est primitive, alors f^* est primitive.*

Démonstration. — Considérons l'involution $\iota : z \mapsto -\bar{z}$ de $\mathcal{H}$. Elle transforme l'action homographique de $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ en l'action de g conjugué par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La conjugaison par $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ laisse stable le groupe $\Gamma_1(N)$. On a $\overline{f(\iota(z))} = f^*(z)$, si bien que f^* est une forme modulaire.

L'involution ι commute à δ_d, si bien que $f \mapsto f^*$ laisse stable les parties anciennes et nouvelles. Donc f^* est nouvelle et normalisée.

Montrons que $T_m(f^*) = \overline{a_m} f^*$, pour tout $m \geq 1$. Pour cela vérifions que le n-ème coefficient des q-développements coïncident. Remarquons d'abord qu'on a

$$a_1(T_m(f^*)) = a_m(f^*) = \overline{a}_m = \overline{a_m} a_1(f) = \overline{a_1(T_m f)}.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbf{T}$, on a

$$a_1(t(f^*)) = \overline{a_1(t(f))}.$$

On a donc

$$a_n(T_m(f^*)) = a_1(T_m T_n(f^*)) = a_1(T_n T_m(f^*)).$$

En utilisant $a_1(t(f^*)) = \overline{a_1(t(f))}$, pour $t = T_n T_m$, on obtient

$$a_n(T_m(f^*)) = \overline{a_1(T_n T_m(f))} = \overline{a_n(T_m(f))} = \overline{a_m}\overline{a_n(f)} = \overline{a_m} a_n(f^*).$$

Cela prouve que $T_m(f^*) = \overline{a_m} f^*$. Donc f^* est primitive.

Corollaire . — *Si $f \in M_k(N, \chi)$ est primitive et $\chi = 1$ (ce qui entraîne que k est pair), on a $f = f^*$, et les valeurs propres de W_N sont égales à 1 ou -1.*

Démonstration. — Alors les opérateurs de Hecke sont auto-adjoints pour le produit de Petersson. Ainsi leurs valeurs propres sont des nombres réels, si bien que les coefficients de f sont réels.

Remarque . — Soit σ un automorphisme de $\mathbf{C}$, non nécessairement la conjugaison complexe. On peut considérer la forme f_σ de q-développement $\sum_{n\geq 0} \sigma(a_n) q^n$. C'est aussi une forme primitive, appelée *compagne* de f. En effet, les formes primitives coïncident avec les morphismes d'anneaux $\mathbf{T} \to \mathbf{C}$. Il suffit de composer le morphisme associé à f avec σ.

Comme les coefficients de f vivent dans une extension finie de $\mathbf{Q}$ (ce que nous n'avons pas démontré), il n'y a qu'un nombre fini de compagnes de f.

Lorsque D est un diviseur de N tel que D et N/D sont premier entre eux, on peut considérer $W_D(f)$. C'est encore une forme primitive, qui n'est pas en général f ou f^*. On verra grâce aux opérateurs de torsion ce qu'est cette forme primitive.

4. Le théorème de multiplicité un

C'est l'énoncé suivant.

THÉORÈME 4. — *Soit $f \in \cup_{N\geq 1} M_k(N)$ propre pour les opérateurs de Hecke T_p pour presque tout nombre premier p (c'est-à-dire qu'il existe $S \subset \Omega_{\mathbf{Q}}$ fini tel que $T_p(f) = a_p(f)$ pour tout nombre premier $p \notin S$). Alors il existe un unique N_0 entier ≥ 1 et une unique forme primitive $f_0 \in M_k(N_0)$ qui complète ce système de valeurs propres, c'est-à-dire $T_p(f_0) = a_p f_0$ pour tout $p \notin S$.*

La démonstration se formule et se comprend mieux dans le langage des adèles, plus exactement dans le langage des représentations du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ où $\mathbf{A}$ est l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$.

COROLLAIRE 1. — *Soit $f \in M_k(N)$ nouvelle, normalisée et propre pour T_p pour presque tout nombre premier p. Alors f est primitive.*

COROLLAIRE 2. — *Soit $f \in M_k(N)$. Alors il existe un entier $j \geq 1$, des entiers M_1, ..., M_j qui divisent N, des entiers d_1,..., d_j avec d_i divisant N/M_i pour tout i, et des formes primitives f_1,..., f_j avec $f_i \in M_k(M_i)$ pour tout i, des scalaires λ_1,..., λ_j et tels que*

$$f = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \delta_{d_i *} f_i.$$

Démonstration. — Les opérateurs T_m sont simultanément diagonalisables lorsque m est premier à N. Alors f est combinaison linéaire de forme simultanément propres pour ces opérateurs de Hecke. Chacun de ces vecteurs propres provient d'une unique forme primitive d'après le théorème 4.

COROLLAIRE 3. — *Soit f une forme primitive de niveau N. Alors on a $W_N(f) = w_N f^*$, avec w_N nombre complexe de module* 1. *On a de plus $W_N(f^*) = (-1)^k w_N f$.*
Démonstration. — On a vu que $W_N(f)$ est propre pour l'opérateur T_m avec la valeur propre $\overline{\chi(m)} a_m$ si m et N sont premiers entre eux. Donc $W_N(f)$ est propre pour T_p pour presque tout p. De plus $W_N(f)$ est nouvelle mais pas nécessairement normalisée. Donc $W_N(f)$ a les mêmes valeurs propres que f^*. D'après le théorème de multiplicité un, $W_N(f)$ et f^* sont proportionnelles. On a donc $W_N(f) = w_N(f)f$ avec $w_N(f) \in \mathbf{C}$.

On a alors

$$f = (-1)^k W_N^2(f) = (-1)^k w_N(f) w_N(f^*) f.$$

On a donc $w_N(f)w_N(f^*) = (-1)^k$. Par ailleurs, on a $w_N(f^*) = (-1)^k\overline{w_N(f)}$. Donc on a $|w_N(f)| = 1$.

On dit que $w_N(f)$ est une *pseudo-valeur propre.* Les valeurs propres de W_N ne sont pas *a priori* intéressantes, excepté lorsque $\chi = 1$. Dans ce dernier cas, elles sont égales à 1 ou -1, et on a $f^* = f$.

COROLLAIRE 4. — *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N. Soit $f \in M_k(N,\chi)$. On a $f^* \in M_k(N,\bar{\chi})$.*
Démonstration. — Cela résulte du corollaire de la proposition 1, et du corollaire 3 du théorème 4.

5. Fonctions L

Soit $f \in S_k(N)$. Posons $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$. Pour $s \in \mathbf{C}$, posons

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Remarque . — Cette définition est encore valable si $f \in M_k(N)$. On oublie le terme constant a_0. Mais la proposition 4 ci-dessous ne tient pas. La proposition 5, son corollaire et le théorème 6 sont encore valables.

PROPOSITION 4. — *La série de Dirichlet $L(f,s)$ converge absolument sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} | \Re(s) > (k+1)/2\}$.*
Démonstration. — Montrons que $a_m = O(m^{k/2})$ quand $m \to \infty$. On utilise pour cela la formule de Cauchy :

$$a_m = \frac{1}{2i\pi}\int_{|q|=r} f(q)q^{-m}\frac{dq}{q} = \int_0^1 f(x+iy)e^{-2i\pi m(x+iy)}dx = e^{2\pi}\int_0^1 f(x+i/m)e^{-2i\pi mx}dz,$$

où $y = 1/m$. Le membre de droite de la dernière égalité est dominé par $m^{k/2}$ quand m tend vers l'infini. En effet, la fonction $z \mapsto \Im(z)^{k/2}|f(z)|$ est $\Gamma_1(N)$-invariante et donc bornée sur $\mathcal{H}$ (en tenant compte du fait que $f_{|_k g}(x+iy)$ tend vers 0 uniformément en x pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ puisque f est parabolique). C'est pourquoi on a $\Im(x+i/m)^{k/2}|f(x+i/m)| = O(1)$ et donc $f(x+i/m) = O(m^{k/2})$ (uniformément en x).

Remarque . — L'inégalité de Ramanujan–Petersson n ($|a_p| < 2p^{(k-1)/2}$ pour p nombre premier) entraîne que a_m est dominée par $m^{k/2+\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$. Il s'ensuit que la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ converge absolument pour $\Re(s) > k/2+1$.

Posons

$$\Lambda(f,s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)N^{s/2}L(f,s).$$

C'est la *fonction L complétée de f* . Cette fonction est donc définie et holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} | \Re(s) > k/2+1\}$.

PROPOSITION 5. — *La fonction $s \mapsto \Lambda(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$. De plus on a*

$$\Lambda(W_N(f),s) = i^k \Lambda(f,k-s).$$

Démonstration. — Considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty f(iy) y^s \frac{dy}{y}$$

qui est une transformée de Mellin. Comme on a l'estimation $f(iy) = O(e^{-2\pi y})$ lorsque y tend vers l'infini, on a convergence uniforme sur tout compact de $\mathcal{H}$ de la série qui donne f, car $a_n = O(n^{k/2})$. On peut donc inverser la somme et l'intégrale et la transformée de Mellin est holomorphe en s.

On a alors

$$\int_0^\infty f(iy) y^s \frac{dy}{y} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-2\pi n y} y^s \frac{dy}{y} = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{(2\pi n)^s} \int_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y} = \Gamma(s)(2\pi)^{-s} L(f,s)$$

et donc

$$\int_0^\infty f(iy) y^s \frac{dy}{y} = N^{-s/2} \Lambda(f,s)$$

On a, en posant $z = iy$,

$$W_N(f)(z) = (-1)^k \frac{N^{k/2}}{N^k z^k} f(\frac{-1}{Nz}) = (-1)^k \frac{1}{N^{k/2} z^k} f(\frac{-1}{Nz}) = \frac{i^k}{N^{k/2} y^k} f(\frac{i}{Ny})$$

et donc

$$\int_0^\infty W_N(f)(iy) y^s \frac{dy}{y} = \frac{i^k}{N^{k/2}} \int_0^\infty f(\frac{i}{Ny}) y^{s-k} \frac{dy}{y}.$$

En posant $u = 1/(Ny)$, on a

$$\int_0^\infty W_N(f)(iy) y^s \frac{dy}{y} = \frac{i^k}{N^{k/2}} \int_\infty^0 f(iu)(Nu)^{k-s} - \frac{du}{u}) = i^k N^{k/2-s} \int_0^\infty f(iu) u^{k-s} \frac{du}{u}.$$

En utilisant

$$\Lambda(W_N(f),s) = N^{s/2} \int_0^\infty W_N(f)(iy) y^s \frac{dy}{y},$$

on obtient

$$\Lambda(W_N(f),s) = i^k N^{s/2-k/2} \int_0^\infty f(iu) u^{k-s} \frac{du}{u} = i^k \Lambda(f,k-s),$$

ce qui est la formule annoncée.

Corollaire . — *Supposons f primitive, avec $W_N(f) = w_N f^*$. On a*

$$i^{-k} w_N \Lambda(f^*, s) = \Lambda(f, k-s).$$

Théorème 6. — *Soit $f \in S_k(N,\chi)$ primitive de q-développement $\sum_{n\geq 1} a_n q^n$. On a (*décomposition de $L(f,s)$ en produit eulérien*)*

$$L(f,s) = \prod_{p, p\nmid N} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + \chi(p) p^{k-1-2s}} \prod_{p\mid N} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}},$$

où p parcourt les nombres premiers.
Démonstration. — Cela résulte formellement des relations satisfaites par les coefficients a_m.

La forme de la fonction $\Lambda(f,s)$ pour $k = 1$, en raison du produit eulérien, rappelle les fonctions L complétées des motifs d'Artin de dimension 2 sur le corps $\mathbf{Q}$ qui sont impaires (en raison du facteur à l'infini) et de conducteur N (en raison du facteur en $N^{s/2}$). Contrairement aux fonctions L des motifs d'Artin, on sait établir un prolongement holomorphe et prouver facilement une équation fonctionnelle.