# XIX
# Formes modulaires (de poids un)

### 1. Sous-groupes de congruences du groupe modulaire

Le *groupe modulaire* est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Soit $N$ un entier $\geq 1$. On pose

$$\Gamma(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N\}.$$

C'est le *sous-groupe de congruence principal de niveau* $N$. Soit $\Gamma$ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Il est dit de *congruence* s'il contient un sous-groupe de congruence principal. Il est alors d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

*Remarque* . — Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ contient des sous-groupes d'indices finis qui ne sont pas de congruence.

On pose de plus

$$\Gamma_1(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N\}.$$

et

$$\Gamma_9(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod N\}.$$

On a des isomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-ensembles :

$$\Gamma(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}),$$

$$\Gamma_1(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \simeq (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{2'},$$

où $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{2'}$ est l'ensemble des éléments d'ordre $N$ de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ et l'isomorphisme est donné par $\Gamma_1(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (c,d) \pmod N$, et enfin

$$\Gamma_0(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$$

où l'isomorphisme est donné par $\Gamma_1(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (c,d) \pmod N$ (en coordonnées homogènes).

Le groupe modulaire admet une description combinatoire. Posons $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Elles sont d'ordre 4 et 6 respectivement. La paire $\{S, U\}$ engendre $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Ces matrices vérifient $S^2 = U^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ce sont les "seules" relations entre $S$ et $U$. Tout cela est résumé dans le théorème suivant.

Théorème 1. — *Le groupe modulaire est ainsi isomorphe au produit libre amalgamé d'un groupe cyclique d'ordre* 4 *et d'un groupe cyclique d'ordre* 6 *au dessus d'un groupe cyclique d'ordre* 2.

On peut en déduire une description combinatoire des sous-groupes de congruence $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$ et $\Gamma_1(N)$. De plus cette description permet de calculer la cohomologie du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

## 2. Formes modulaires

Posons $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} | \Im(z) > 0\}$ le *demi-plan supérieur* (on dit souvent *demi-plan de Poincaré* en France). Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ (formé des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ de déterminant $> 0$) opère sur $\mathcal{H}$ par homographies.

Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ un sous-groupe de congruence. Soit $f : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$. Soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$. Soit $k$ un entier $\geq 1$. On pose pour $z \in \mathcal{H}$

$$f_{|_k g}(z) = (ad - bc)^{k/2}(cz + d)^{-k} f(\frac{az + b}{cz + d}).$$

Comme nous sommes spécialement intéressés par le cas $k = 1$, on pose de plus $f_{|g} = f_{|_1 g}$. On a ainsi une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ sur les fonctions $\mathcal{H} \to \mathbf{C}$.

On dit que $f$ est une *forme modulaire holomorphe de poids $k$ pour* $\Gamma$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

($\iota$) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $f_{|_k \gamma} = f$.

($\iota\iota$) Pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ et tous $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}_+$, $f_{|_k g}(x + iy)$ tend vers une limite indépendante de $x$ lorsque $y$ tend vers $+\infty$.

($\iota\iota\iota$) La fonction $f$ est holomorphe sur $\mathcal{H}$.

L'ensemble de telles fonctions constitue un $\mathbf{C}$-espace vectoriel noté $M_k(\Gamma)$, qui est nul si $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $k$ est impair. Si on a $\Gamma(N) \subset \Gamma$, on a $M_k(\Gamma) \subset M_k(\Gamma(N))$.

Posons, pour $N$ entier $\geq 1$, $\delta_N = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $f \in M_k(\Gamma(N))$, on a $f_{|_k \delta_N} \in \Gamma \in M_k(\Gamma_1(N^2))$, et même $f_{|_k \delta_N} \in \Gamma \in M_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(N^2))$. En effet, cela résulte immédiatement de l'identité matricielle :

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & bN \\ c/N & d \end{pmatrix}.$$

Ainsi le groupe $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(N^2)$ est conjugué du groupe $\Gamma(N)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$. C'est pourquoi l'étude des formes modulaires se ramène à l'étude des formes modulaires pour $\Gamma_1(N)$. On pose $M_k(N) = M_k(\Gamma_1(N))$. Si $f \in M_k(N)$, on dit que le *niveau* de $f$ divise $N$.

Soit $M$ un entier $\geq 1$ divisible par $N$. Soit $d$ un diviseur de $M/N$. Soit $f \in M_k(N)$. On suppose $N < M$. On a alors une application $\mathbf{C}$-linéaire $\delta_{d*} : M_k(N) \to M_k(M)$ donnée par

$$f \mapsto \delta_{d*}(f) = f_{|_k \delta_d}.$$

Soit $\Gamma'$ un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma$. On a une application *trace de* $\Gamma'$ *à* $\Gamma$ : $M_k(\Gamma') \to M_k(\Gamma)$ donnée par $f \mapsto \mathrm{Tr}_{\Gamma'/\Gamma} f = \sum_{\gamma \in \Gamma' \backslash \Gamma} f_{|_k \gamma}$. Lorsque $f \in M_k(\Gamma)$, on a la formule $\mathrm{Tr}_{\Gamma'/\Gamma} f = |\Gamma/\Gamma'| f$.

Cela permet de définir une application duale de $\delta_{d*}$ ainsi. On a $\delta_d \Gamma_1(M) \delta_d^{-1} \subset \Gamma_1(N)$. On a donc, pour $f \in M_k(\Gamma_1(M))$, $f_{|_k \delta_d^{-1}} \in M_k(\delta_d \Gamma_1(M) \delta_d^{-1})$ et donc

$$\delta_d^*(f) = \mathrm{Tr}_{\delta_d \Gamma_1(M) \delta_d^{-1}/\Gamma_1(N)}(f_{|_k \delta_d^{-1}}) \in M_k(\Gamma_1(N)).$$

On a donc défini $\delta_d^* : M_k(M) \to M_k(N)$ qui est la trace $\mathrm{Tr}_{\Gamma_1(M)/\Gamma_1(N)}$ si $d = 1$.

Alors on a $\delta_d^* \circ \delta_{d*}$ est la multiplication par $|\Gamma_1(N)/\Gamma_1(M)|$.

Alors le sous-espace de $M_k(M)$ engendré par les images des applications $\delta_{d*}$ lorsque $N$ parcourt les diviseurs stricts de $M$ et $d$ parcourt les diviseurs de $M/N$ est la *partie ancienne*. L'intersection des noyaux des $\delta_d^*$ lorsque $N$ parcourt les diviseurs stricts de $M$ et $d$ parcourt les diviseurs de $M/N$ est la *partie nouvelle* de $M_k(M)$. Le théorème suivant n'est pas particulièrement profond, mais très utile.

THÉORÈME 1. — *L'espace vectoriel complexe* $M_k(N)$ *est la somme directe de ses parties nouvelles et anciennes.*

Soit $f \in M_k(N)$. Si $f$ appartient à la partie nouvelle de $M_k(N)$, elle est dite de *niveau* $N$.

### 3. Développement aux pointes

Revenons aux conditions qui définissent les formes modulaires. Posons $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. Il est muni d'une topologie qui prolonge la topologie de $\mathcal{H}$. Une base de voisinages de $x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ est donnée, si $x \neq \infty$ par les disques de $\mathcal{H}$ tangents à la droite réelle en $x$, et, si $x = \infty$, par un demi-plan bordé par une droite horizontale de $\mathcal{H}$. Alors $\bar{\mathcal{H}}$ est muni d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ qui prolonge l'action par homographie.

Soit $f \in M_k(N)$. La condition sur la limite $l$ de $f_{|g}(x+iy)$ lorsque $y \to \infty$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ nécessite seulement d'être vérifiée pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. En effet, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ opère transitivement sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. Le stabilisateur de $\infty \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est $<T>= \{\pm \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. On a donc $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/<T>$. Ainsi la limite $l$ ne dépend que de la classe de $g$ dans $\Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/<T>$. L'ensemble $\Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/<T>= \Gamma_1(N)\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ est l'ensemble des *pointes* pour $\Gamma_1(N)$.

On peut décrire l'ensemble des pointes pour $\Gamma_1(N)$ par la bijection

$$\Gamma_1(N)\backslash\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \simeq \sqcup_{t|N}(\mathbf{Z}/t\mathbf{Z})^\times/\{\pm 1\}$$

qui à $\Gamma_1(N)u/v$ associe $\pm u \pmod{(N, v)}$.

*Remarque .* — Lorsque $\Gamma$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, l'espace-quotient $\Gamma\backslash\bar{\mathcal{H}}$ est une surface de Riemann compacte et connexe obtenue en ajoutant à la surface de Riemann $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ les points $\Gamma\backslash\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, qui sont en nombre fini et qu'on appelle les *pointes.* Lorsque $\Gamma = \Gamma_1(N)$, on la note $Y_1(N)$ la surface $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}$ et $X_1(N)$ la surface obtenue en ajoutant les pointes. Alors $X_1(N)$ est une courbe algébrique définie sur $\mathbf{Q}$, dite *courbe modulaire.* Il est avantageux de voir la courbe $Y_1(N)$ comme paramètrant les courbes elliptiques sur $\mathbf{C}$ munies d'un point d'ordre $N$, ce point de vue se prolonge à d'autres corps que $\mathbf{C}$.

Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Si $m \in \mathbf{N}$ est tel que $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \in g^{-1}\Gamma_1(N)g$, la forme modulaire $f_{|_k g}$ est $m$-périodique. On peut alors poser, par la théorie de Fourier,

$$f_{|_k g}(z) = a_{0,u} + \sum_{n\geq 1} a_{n,u} e^{2i\pi z/m}.$$

C'est le *développement de Fourier* de $f$ en la pointe $u = \Gamma_1(N)g\infty$.

Pour $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$. On pose alors $q = e^{2i\pi z}$ et

$$f(z) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n q^n = a_0(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f) q^n.$$

C'est le *q-développement* de $f$ en la pointe $\infty$.

Par la théorie de Fourier, on a

$$a_{n,u} = \frac{1}{m}\int_{z_0}^{z_0+m} f_{|_k g}(z) e^{-2i\pi z/m} dz,$$

pour $z_0 \in \mathcal{H}$ quelconque.

Si pour toute pointe $u$, on a $a_{0,u} = 0$, on dit que $f$ est *parabolique* (*Spitzenform* en allemand, *cusp form*, en anglais).

On note $S_k(N)$ le sous-espace vectoriel de $M_k(N)$ formé par les formes modulaires paraboliques. Comme c'est l'intersection des noyaux d'un nombre fini de formes linéaires, c'est un sous-espace de codimension finie.

Un supplémentaire à $S_k(N)$ dans $M_k(N)$ est fourni par les séries d'Eisenstein.

Il n'est pas clair *a priori* que $M_k(N)$ soit de dimension finie. C'est pourtant le cas.

*Remarque .* — Il existe des formules pour la dimension de cet espace vectoriel lorsque $k \geq 2$. Elles reposent, par exemple, sur la *cohomologie d'Eichler–Shimura.* Le groupe

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ opère sur $\mathbf{C}[X,Y]_{k-2}$, qui est l'espace formé par les polynômes homogènes de degré $k-2$ à coefficients complexes. L'action provient de l'action linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ sur l'espace vectoriel de base $(X,Y)$. On a alors un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes

$$M_k(N) \oplus S_k(N) \simeq \mathrm{H}^1(\Gamma_1(N), \mathbf{C}[X,Y]_{k-2}).$$

Le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(\Gamma_1(N), \mathbf{C}[X,Y]_{k-2})$ peut être déterminé en utilisant le lemme de Shapiro, qui permet de se ramener au calcul de la cohomologie de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, laquelle a son tour peut être explicitée grace à la description de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ avec les matrices $S$ et $U$. Une explicitation concrète de cette approche réside dans la *théorie des périodes des formes modulaires.*

Lorsque $k=1$, il n'existe pas de formule fermée pour la dimension de $M_1(N)$. C'est le premier signe de la nature particulière des formes modulaires de poids 1. Toutefois, on a un plongement $M_1(N) \to S_{13}(N)$ donné par $f \mapsto f\Delta$, où $\Delta \in S_{12}(1)$ est donné par $\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ (forme modulaire de Ramanujan). Le produit $f\Delta$ est parabolique car Ainsi, la finitude de la dimension de $S_{13}(N)$ entraîne la finitude de la dimension de $M_1(N)$.

*Remarque* . — On a une algèbre graduée $\oplus_{k=1}^{\infty} M_k(N)$, puisque le produit $ff'$ de deux formes $f \in M_k(N)$ et $f' \in M_{k'}(N)$ est dans $M_{k+k'}(N)$ (et même dans $S_{k+k'}(N)$ si $f$ ou $f'$ est parabolique).

## 4. Opérateurs de Hecke

Le groupe $\Gamma_1(N)$ est normal dans $\Gamma_0(N)$, car c'est le noyau de $\Gamma_0(N) \to (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ donné par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto d \pmod N$.

Pour $\delta \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$, on a un opérateur $M_k(N) \mapsto M_k(N)$ qui à $f$ associe $f_{|_k\gamma}$ où $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ vérifie $d \equiv \delta \pmod N$. Cet opérateur est souvent noté $\langle\delta\rangle$ et appelé *opérateur diamant.* On en déduit une action de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ sur $M_k(N)$. Soit $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ un caractère de Dirichlet. Soit $f \in M_k(N)$ telle que pour tout $\delta \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$, on a $\langle\delta\rangle = \chi(\delta)f$. On dit alors que $f$ est de *caractère* ou *Nebentypus* $\chi$. On note $M_k(N,\chi)$ le sous-espace de $M_k(N)$ formé par les éléments de caractère $\chi$. Si $\chi(-1) = -(-1)^k$, cet espace est nul, car l'action de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donne $\chi(-1)f = (-1)^k f$.

On a alors $M_k(N) = \oplus_\chi M_k(N,\chi)$.

Si $m \in \mathbf{Z}$, on pose $T_{m,m} = \langle m\rangle$ si $(m,N)=1$ et $T_{m,m}=0$ si $(m,N) \neq 1$.

Soit $m$ un entier $\geq 1$. Posons

$$\Delta_m(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})/ad-bc=m, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod N\},$$

qui est un ensemble de double classes, et donc muni d'actions à gauche et à droite de $\Gamma_1(N)$. Le nombre d'orbites pour cette action est $\sum_{d|m,(d,N)=1} d$, c'est-à-dire la somme des diviseur de $m$ si $m$ est premier à $N$. On peut vérifier que

$$\Delta_m(N) = \Gamma_1(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \Gamma_1(N).$$

Soit $f \in M_k(N)$. On pose

$$T_m(f) = m^{k/2-1} \sum_{\gamma \in \Gamma_1(N) \backslash \Delta_m(N)} f_{|_k \gamma}.$$

En raison de la propriété de double classe, cette formule fait sens et on a $T_m(f) \in M_k(N)$.

L'opérateur $T_m$ est linéaire et appelé *$m$-ème opérateur de Hecke.* Les propriétés élémentaires de ces opérateurs sont résumées comme suit.

THÉORÈME 2. — *On a les propriétés suivantes.*
*1) Soit $m$ et $m'$ des entiers premiers entre eux. On a*

$$T_m T_{m'} = T_{mm'}.$$

*2) Soit $m$ et $m'$ des entiers quelconques. On a*

$$T_m T_{m',m'} = T_{m',m'} T_m$$

*et*

$$T_m T_{m'} = T_{m'} T_m.$$

*3) Soient $p$ un nombre premier et $r$ un entier $\geq 1$. On a*

$$T_{p^r} T_p = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}} T_{p,p}.$$

*4) Soit $M$ un multiple de $N$. Soient $m$ un entier premier à $M$ et $d$ un diviseur $> 0$ de $M/N$. On a*

$$T_m \circ \delta_{d*} = \delta_{d*} \circ T_m$$

*et*

$$T_{m,m} \circ \delta_{d*} = \delta_{d*} \circ T_{m,m}.$$

Pour démontrer ces propriétés (ce que nous ne ferons pas ici) il est commode de voir les formes modulaires de la façon suivante. Supposons que $N = 1$ pour simplifier. Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbf{C}$ (c'est-à-dire des sous-groupes discrets cocompacts, qui sont donc de la forme $\mathbf{Z}z_1 + \mathbf{Z}z_2$, avec $z_1$, $z_2 \in \mathbf{C}$ non $\mathbf{R}$-colinéaires). Soit $f \in M_k(1)$. L'application $F : \mathcal{L} \to \mathbf{C}$ qui à $L = \mathbf{Z}z_1 + \mathbf{Z}z_2$ associe $z_1^{-k} f(z_2/z_1)$ est bien définie et homogène de degré $-k$ en $L$, c'est-à-dire $F(\lambda L) = \lambda^{-k} F(L)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^\times$ et tout $L \in \mathcal{L}$. Réciproquement, une application $F : \mathcal{L} \to \mathbf{C}$ homogène de degré $k$ et telle que $z \mapsto F(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}z)$ est holomorphe et une condition de croissance à l'infini définit une forme modulaire de poids $k$ par $z \mapsto F(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}z)$. La notion d'opérateur de Hecke $T_m$ se transpose sur les fonctions $\mathcal{L} \to \mathbf{C}$ par

$$T_m(F)(L) = \sum_{L' \in L} F(L'),$$

où $L'$ parcourt les sous-réseaux de $L$ d'indice $m$.

*Remarque* . — Soit $\mathbf{T}$ le sous-anneau de $\mathrm{End}(M_k(N))$ engendré par tous les opérateurs $T_m$ et $T_{m,m}$. C'est un anneau commutatif. On a, au moins formellement,

$$\sum_{m \geq 1} \frac{T_m}{m^s} = \prod_p (\sum_{r=0}^{\infty} \frac{T_{p^r}}{p^{rs}}) = \prod_p \frac{1}{1 - T_p p^{-s} + T_{p,p} p^{k-1-2s}},$$

où $p$ parcourt les nombres premiers. Pour $k = 1$, on retrouve la forme des produits eulériens issus de certaines fonctions $L$ d'Artin en dimension 2.

Proposition 3. — *On a, pour $m$ entier $\geq 1$ et $f \in M_k(N)$*

$$a_m(f) = a_1(T_m(f)).$$

*Démonstration.* — On a

$$a_1(T_m(f)) = \int_{z_0}^{z_0+1} T_m(f) e^{-2i\pi z} dz = m^{k/2-1} \int_{z_0}^{z_0+1} \sum_\gamma f_{|_k \gamma} e^{-2i\pi z} dz.$$

Un système de représentants de $\Gamma_1(N) \backslash \Delta_m(N)$ est donné par

$$\{ \begin{pmatrix} d & j \\ 0 & m/d \end{pmatrix} | 0 \leq j \leq m/d - 1, d|m, d \equiv 1 \pmod N \}.$$

Pour $\gamma = \begin{pmatrix} d & j \\ 0 & m/d \end{pmatrix}$, on a

$$f_{|_k \gamma} = \frac{d^k}{m^{k/2}} f((d^2 z + dj)/m).$$

On a donc

$$a_1(T_m(f)) = m^{k/2-1} \int_{z_0}^{z_0+1} \sum_{j,d} d^k f((d^2 z + dj)/m) e^{-2i\pi z} dz.$$

Remplaçons $f$ par son $q$-développement. On obtient

$$a_1(T_m(f)) = \sum_{j,d} \frac{d^k}{m} \int_{z_0}^{z_0+1} \sum_{n \geq 0} a_n e^{2i\pi(nd^2 z + ndj)/m - z)} dz = \sum_{j,d} a_{m/d^2} e^{2i\pi j/d}.$$

En effet, $\int_{z_0}^{z_0+1} e^{2i\pi(nd^2z/m-z)}dz = 0$ si $nd^2/m \neq 1$. On ne retient que les termes pour $n = m/d^2$. Or on a $\sum_j e^{2i\pi j/d} = 0$ si $d \neq 1$ et $\sum_j e^{2i\pi j/d} = m$ si $d = 1$. Finalement on obtient

$$a_1(T_m(f)) = a_m.$$

Considérons l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \mathbf{C})$ des morphismes de groupes $\mathbf{T} \to \mathbf{C}$.

Corollaire . — *On a un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes*

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \mathbf{C}) \simeq M_k(N)$$

*qui à $\psi$ associe la forme modulaire de $q$-développement $\sum_{n\geq 0} q^n$.*
*Démonstration.* — On a défini un accouplement $\mathbf{T} \times M_k(N) \to \mathbf{C}$ donné par $(t, f) \mapsto a_1(tf)$. Montrons qu'il est non dégénéré. Soit $t \in \mathbf{T}$ tel que $a_1(t(f)) = 0$ pour tout $f \in M_k(N)$. On a alors $a_1(tT_m(f)) = 0$ pour tout $m \geq 1$ et donc $a_1(T_m t(f)) = 0$ pour tout $m \geq 1$. On a donc $a_m(t(f)) = 0$ pour tout $m \geq 1$ et donc $t(f) = 0$ pour tout $f$. Donc $t = 0$.

Réciproquement, si $f \in M_k(N)$ est telle que $a_1(t(f)) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{T}$, on a $0 = a_1(T_m(f)) = a_m(f)$ pour tout $m \geq 1$ et donc $f = 0$.

*Remarque* . — L'identification $\mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \mathbf{C}) \simeq M_k(N)$ ouvre la possibilité de considérer $\mathrm{Hom}(\mathbf{T}, A)$ pour $A$ anneau quelconque. Cela pointe vers une définition algébrique des formes modulaires. On peut par exemple considérer le cas où $A$ est un corps fini. Tout cela suggère que la nature analytique complexe des formes modulaires est un leurre. Les objets essentiels sont les systèmes de valeurs propres pour les opérateurs de Hecke. Ils correspondent essentiellement aux morphismes d'anneaux $\mathbf{T} \to \mathbf{C}$. Il est possible de définir l'anneau $\mathbf{T}$ sans utiliser les formes modulaires, ni aucun objet de nature analytique. Il y a deux voies pour cela : utiliser la structure algébrique des courbes modulaires $X_1(N)$ ou (en poids $\geq 2$) utiliser la cohomologie d'Eichler–Shimura.

L'anneau $\mathbf{T}$ laisse stable $S_k(N)$ ainsi que les parties anciennes et nouvelles de $M_k(N)$.

Soient $M$ un multiple de $N$ et $d$ un diviseur de $M/N$. Soit $f$ une forme propre pour l'opérateur de Hecke $T_m$, avec $m$ premier à $M$, alors $\delta_{1*}(f)$ et $\delta_{d*}(f)$ sont propres pour $T_m$ avec la même valeur propre que $f$. Ainsi un système de valeurs propres pour les opérateurs de Hecke en niveau $N$ se réalise avec plusieurs copies dans la partie ancienne de niveau $M$.

Les valeurs propres de $T_m$ sont des entiers algébriques. La preuve repose sur l'existence d'une structure entière stable par les opérateurs de Hecke dans $M_k(N)$. On peut le démontrer en poids $k \geq 2$ par la théorie d'Eichler–Shimura. C'est plus difficile en poids 1.

On a la conjecture de Ramanujan (démontrée par Eichler, Shimura en poids 2, par Deligne en poids $\geq 2$, par Deligne–Serre en poids 1). Si $\lambda_p$ est une valeur propre de $T_p$ opérant sur $S_k(N)$ avec $p$ premier, on a

$$|\lambda_p| \leq 2p^{k-1}.$$

En poids 2, on a $|\lambda_p| \leq 2\sqrt{p}$ c'est analogue au théorème de Hasse pour les courbes elliptiques sur les corps finis.

En particulier, pour $k = 1$, on a

$$|\lambda_p| \leq 2.$$