XVI
Fonctions L d'Artin

1. Applications globales de la théorie de la ramification

Soit K un corps de nombres. Soit $L|K$ une extension galoisienne finie. Soit $\mathcal{Q}$ un premier de $\mathcal{O}_K$. Soit $\mathcal{P}$ un premier de L au dessus de K. Notons $D_{\mathcal{P}}$ le groupe de décomposition en $\mathcal{P}$ de $\mathrm{Gal}(L/K)$. Il est muni d'une filtration

$$D_{\mathcal{P}} = G_{-1,\mathcal{Q}} \supset G_{0,\mathcal{Q}} \supset G_{1,\mathcal{Q}} \supset ... \supset G_{n,\mathcal{Q}} = \{1\}.$$

Le groupe $G_{i,\mathcal{Q}}$ ne dépend que de $\mathcal{Q}$ à conjugaison près. On a $G_{0,\mathcal{Q}} = 1$ pour presque tout $\mathcal{Q}$.

Soit $\rho : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{GL}(V)$ une motif d'Artin. On s'intéresse à la filtration

$$\rho(G_{-1,\mathcal{Q}}) \supset \rho(G_{0,\mathcal{Q}}) \supset \rho(G_{1,\mathcal{Q}}) \supset ... \supset \rho(G_{n,\mathcal{Q}}) = \{1\}$$

comme mesure de la complexité de ρ en $\mathcal{Q}$.

Corollaire 1. — *On a*

$$\mathcal{D}_{L/K} = \prod_{\mathcal{Q}\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{Q}^{\sum_{i=0}^{\infty}(|G_{i,\mathcal{Q}}|-1)}$$

Démonstration. — On utilise la formule

$$\mathcal{D}_{L/K} = \prod_{\mathcal{Q}} \mathcal{D}_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}} \cap \mathcal{O}_K$$

et on applique la formule du discriminant local.

Il en résulte un théorème de finitude global qui complète la théorie de Minkowski.

Corollaire 2. — *Soit S un ensemble fini de places de K. Soit d un entier ≥ 1. Il n'existe qu'un nombre fini (à isomorphisme près) d'extensions de K de degré d qui sont non ramifiées en dehors de S.*

Démonstration. — Comme toute extension de degré d est contenue dans une extension galoisienne de degré $\leq d!$, on peut se limiter aux extensions galoisiennes. D'après la théorie de Minkowski, il n'existe qu'un nombre fini d'extensions de K de discriminant donné. Il reste à montrer que pour tout $\mathcal{Q} \in S$, la valuation $v_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}_{L/K})$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs lorsque $[L : K]$ est borné.

Pour i entier ≥ 1, le i-ème groupe de ramification G_i d'un groupe de décomposition en $\mathcal{Q}$ est trivial pour $i > v_{\mathcal{P}}(i)/(p-1)$, et donc pour $i > [L:K]/(p-1)$ et donc pour $i > [L:K]$. Comme $|G_i| \leq [L:K]$, on a

$$v_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}) = \sum_{i=0}^{[L:K]} (|G_i|-1) \leq [L:K] \times [K:\mathbf{Q}].$$

On a donc

$$\prod_{\mathcal{Q}\in S} \mathcal{Q}^{[L:K]\times[K:\mathbf{Q}]} \subset \mathcal{D}_{L/K}.$$

On en déduit la finitude cherchée.

2. Application à la théorie du corps de classe local

La première application est le théorème de Hasse–Arf (sans démonstration). Soit $K_{\mathcal{Q}}$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

Théorème 1 (Hasse–Arf). — *Soit $L_{\mathcal{P}}|K_{\mathcal{Q}}$ une extension abélienne finie. Les sauts dans la filtration $(G_i)_{i\geq -1}$ de $\mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}})$ sont concentrés en les nombres entiers (i.e. si $G_{i+1} \neq G_i$, on a $\rho_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}(i) \in \mathbf{Z}$).*

La deuxième application concerne une forme plus précise de la théorie du corps de classe local.

Théorème 2. — *L'isomorphisme de la théorie du corps de classe local*

$$K_{\mathcal{Q}}^{\times}/N_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}(L_{\mathcal{P}}^{\times}) \simeq \mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}})$$

induit un isomorphisme de groupes

$$U_{K_{\mathcal{Q}}}^{(n)}/N_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}(L_{\mathcal{P}}^{\times}) \cap U_{K_{\mathcal{Q}}}^{(n)} \simeq G^n \subset \mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}),$$

where G^n est le n-ème groupe de ramification de $\mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}})$ en numérotation supérieure.

Le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $U_{K_{\mathcal{Q}}}^{(n)} \subset N_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}(L_{\mathcal{P}}^{\times})$ est le *conducteur d'Artin* (local) de $L_{\mathcal{P}}|K_{\mathcal{Q}}$. C'est aussi le plus petit entier n tel que $G^n = \{1\}$. On l'écrit aussi $\mathcal{Q}^n$ (notation multiplicative) comme un idéal de $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$. Il est nul si et seulement $L_{\mathcal{P}}|K_{\mathcal{Q}}$ est non ramifiée.

Lorsqu'on a une extension abélienne de corps de nombres $L|K$, on lui associe un conducteur d'Artin global qui est le produit des conducteur locaux $\mathcal{Q}^{n_{\mathcal{Q}}}$ pour $\mathcal{Q}$ parcourant les places finies. On a $n_{\mathcal{Q}} = 1$ pour presque tout $\mathcal{Q}$. Le conducteur global est la partie finie du cycle arithmétique associé à l'extension $L|K$.

3. Le conducteur d'un motif d'Artin

Soit K un corps de nombres. Soit $L|K$ une extension galoisienne finie. Soit ρ : $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{GL}(V)$ un motif d'Artin. Notons d la dimension de V. Supposons ρ injective.

Pour H sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/K)$, on pose $V^H = \{v \in V/\sigma.v = v(\sigma \in H)\}$. C'est le *sous-espace de V formé par les invariants sous H*. Pour $\mathcal{Q}$ premier de K, et $\mathcal{P}$ premier de L au dessus de $\mathcal{Q}$, on note G_i le groupe de ramification en notation inférieure du groupe de décomposition en $\mathcal{P}$ de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

On pose

$$n_{\mathcal{Q}} = n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|G_i|}{|G_0|}(\dim(V) - \dim(V^{G_i})).$$

C'est le *conducteur d'Artin* (local en $\mathcal{Q}$) de ρ. C'est *a priori* un nombre rationnel, ce que Artin a précisé dans le théorème suivant.

Théorème 3 (Artin). — *On a $n_{\mathcal{Q}} \in \mathbf{Z}$.*

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de Hasse–Arf et sur la représentation d'Artin de $\mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}})$. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}})$, on pose, si $\sigma \neq 1$,

$$a_G(\sigma) = -f_{\mathcal{P}} i_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}(\sigma)$$

et

$$a_G(1) = f_{\mathcal{P}} \sum_{\sigma \in G, \sigma \neq 1} i_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}(\sigma),$$

où $f_{\mathcal{P}}$ est le degré résiduel de l'extension $L_{\mathcal{P}}|K_{\mathcal{Q}}$. La fonction a_G est une fonction centrale (*i.e.* invariante par conjugaison) sur G. C'est donc une combinaison linéaire de caractère de représentations. Mais on a mieux que cela.

Théorème 4 (Artin). — *La fonction a_G est le caractère d'une représentation de G.*

La représentation en question s'appelle la *représentation d'Artin*.

Tout cela permet de voir le conducteur d'Artin comme un idéal de $K_{\mathcal{Q}}$. C'est-à-dire $\mathcal{Q}^n$ (notation multiplicative).

Le conducteur d'Artin global de ρ est l'idéal de $\mathcal{O}_K$ donné par la formule

$$N = N_\rho = \prod_{\mathcal{Q} \in \Omega_K - \Omega_{K,\infty}} \mathcal{Q}^{n_{\mathcal{Q}}}.$$

Il provient seulement des places finies de K. En les places infinies, la seule donnée concerne places réelles v et est contenue dans la dimension des sous-espaces invariants par la conjugaison complexe en v.

La *formule du conducteur-discriminant* (Führerdiskriminantenproduktformel) due à Hasse et Artin est la suivante.

THÉORÈME 5 (Hasse, Artin). — *Notons $\mathcal{D}_{L|K}$ le discriminant relatif de l'extension $L|K$. On a*

$$\mathcal{D}_{L|K} = \prod_{\rho} N_{\rho}^{d_\rho},$$

où ρ parcourt les représentations irréductibles (à isomorphisme près) de G et d_ρ désigne la dimension de ρ.

Lorsque l'extension $L|K$ est abélienne, le produit porte sur les caractères de dimension 1 de l'extension abélienne $L|K$ et les exposants sont tous égaux à 1.

4. Fonction L et induction de représentations

PROPOSITION 6. — *Soient $L|K$ une extension galoisienne finie de groupe de Galois G. Soit M un sous-corps de L contenant K. Notons H le groupe de Galois de l'extension $L|M$. Soit τ une représentation de H. Notons ρ la représentation de G induite de τ. On a*

$$L(\rho, s) = L(\tau, s).$$

Démonstration. — Notons F l'espace sous-jacent à τ. Posons $E = F \otimes_{\mathbf{C}[H]} \mathbf{C}[G] \simeq \oplus_\beta \beta F$, où β parcourt un système de représentants de G/H, l'espace sous-jacent à ρ.

La formule se démontre facteur par facteur.

Soit $\mathcal{Q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$. Pour $\mathcal{R}$ idéal premier de $\mathcal{O}_M$ au-dessus de $\mathcal{Q}$, on choisit un idéal premier $\mathcal{P}_R$ de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathcal{R}$. Notons $D_\mathcal{P}$ (resp. $I_\mathcal{P}$) le groupe de décomposition en $\mathcal{P}$ de G et $E_\mathcal{P} = D_\mathcal{P} \cap H$ (resp. $J_\mathcal{P} = I_\mathcal{P} \cap H$) le groupe de décomposition (resp. d'inertie) en $\mathcal{P}$ de H. Notons $f_\mathcal{R}$ le degré résiduel en $\mathcal{R}$ de l'extension $M|K$. La substitution de Frobenius dans $D_\mathcal{P} \cap H$ est la puissance $f_\mathcal{R}$-ème de la substitution de Frobenius $\mathrm{Frob}_\mathcal{P}$ de $D_\mathcal{P}/I_\mathcal{P}$. Ainsi, c'est $\mathrm{Frob}_\mathcal{P}^{f_\mathcal{P}}$.

On choisit l'un des idéaux $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{O}_L$ au dessus de $\mathcal{Q}$. Pour chaque idéal $\mathcal{P}_\mathcal{R}$, on choisit $\nu_\mathcal{R} \in G$ tel que $\mathcal{P}_\mathcal{R} = \nu_\mathcal{R}(\mathcal{P}_0)$. On a alors $\nu_\mathcal{R}^{-1} D_\mathcal{P} \nu_\mathcal{R} = D_{\mathcal{P}_0}$.

On montre l'identité annoncée dans la proposition facteur par facteur. Il faut montrer dans $\mathbf{C}[X]$:

$$\det(1 - X\rho(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_0}); E^{I_{\mathcal{P}_0}}) = \prod_{\mathcal{R}|\mathcal{Q}} \det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_\mathcal{R}}^{f_\mathcal{R}}); F^{J_{\mathcal{P}_\mathcal{R}}}),$$

où $\mathcal{R}$ parcourt les idéaux premiers de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathcal{Q}$ (*i.e.* $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ parcourt les conjugués de $\mathcal{P}$ au dessus de $\mathcal{Q}$).

Écrivons explicitement E. Pour chaque $\mathcal{R}$, soit $(\alpha_{\mathcal{R},j})_j$ un système de représentants de $D_{\mathcal{P}_0}/(D_{\mathcal{P}_0} \cap \nu_\mathcal{R}^{-1} H \nu_\mathcal{R})$. Les $\alpha_{\mathcal{R},j}\nu_\mathcal{R}$ forment un système de représentants de G/H lorsque $\mathcal{R}$ et j varient. L'écriture concrète de E donne

$$E = \oplus_{j,\mathcal{R}} \alpha_{\mathcal{R},j} \nu_\mathcal{R} F.$$

On pose $E_{\mathcal{R}} = \oplus_j \alpha_{\mathcal{R},j}\nu_{\mathcal{R}}F$. On obtient une décomposition $E = \oplus_{\mathcal{R}} E_{\mathcal{R}}$. On a donc

$$\det(1 - X\rho(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_0}); E^{I_{\mathcal{P}_0}}) = \prod_{\mathcal{R}|\mathcal{Q}} \det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}^{f_{\mathcal{R}}}); E_{\mathcal{R}}^{I_{\mathcal{P}_0}}).$$

Ainsi, il suffit de prouver qu'on a

$$\det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}^{f_{\mathcal{R}}}); F^{J_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}}) = \det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}^{f_{\mathcal{R}}}); E_{\mathcal{R}}^{I_{\mathcal{P}_0}}).$$

En conjuguant par $\nu_{\mathcal{P}}$, on obtient

$$\det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}^{f_{\mathcal{R}}}); F^{J_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}}) = \det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}^{f_{\mathcal{R}}}); (\nu_{\mathcal{R}}F)^{I_{\mathcal{P}_0} \cap \nu_{\mathcal{R}} H \nu_{\mathcal{R}}^{-1}}).$$

Il faut donc montrer

$$\det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}^{f_{\mathcal{R}}}); E_{\mathcal{R}}^{I_{\mathcal{P}_0}}) = \det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}^{f_{\mathcal{R}}}); (\nu_{\mathcal{R}}F)^{I_{\mathcal{P}_0} \cap \nu_{\mathcal{R}} H \nu_{\mathcal{R}}^{-1}}).$$

Comme on a $\mathrm{Ind}_{D_{\mathcal{P}_0 \cap \nu_{\mathcal{R}} H \nu_{\mathcal{R}}^{-1}}}^{D_{\mathcal{P}_0}} \nu_{\mathcal{R}}F = E_{\mathcal{R}}$, on s'est ramené au cas où $G = D_{\mathcal{P}_0}$ et au cas où il n'y a qu'un seul idéal premier de $\mathcal{O}_M$ au dessus de $\mathcal{Q}$. C'est ce que l'on suppose désormais.

On a de plus $\mathrm{Ind}_{D_{\mathcal{P}_0 \cap \nu_{\mathcal{R}} H \nu_{\mathcal{R}}^{-1}}}^{D_{\mathcal{P}_0}} (\nu_{\mathcal{R}}F)^{I_{\mathcal{P}_0} \cap \nu_{\mathcal{R}} H \nu_{\mathcal{R}}^{-1}} = E_{\mathcal{R}}^{I_{\mathcal{P}_0}}$, ce qui nous permet de nous ramener au cas où $I_{\mathcal{P}_0} = \{1\}$, ce que nous supposerons désormais.

Il reste à montrer l'identité suivante

$$\det(1 - X\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}}); E) = \det(1 - X^{f_{\mathcal{P}}}\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}})^{f_{\mathcal{P}}}; F).$$

Comme $\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}}{}^{f_{\mathcal{P}}})$ agissant sur F est diagonalisable, quitte à découper F en sous-espaces propres, on peut supposer que F est de dimension 1 et donc que $\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}}{}^{f_{\mathcal{P}}})$ est la multiplication par λ. Quitte à changer X en X/λ, on peut supposer que $\tau(\mathrm{Frob}_{\mathcal{P}}{}^{f_{\mathcal{P}}})$ est l'identité. On s'est alors ramené à la situation de la séance précédente.

On peut généraliser la proposition 6 pour tenir compte des places infinies. On obtient alors la formule

$$\Lambda^{\mathrm{nr}}(\rho, s) = \Lambda^{\mathrm{nr}}(\tau, s).$$

5. Le théorème de Brauer et ses conséquences

Le théorème suivant, dû à Brauer, relève purement de la théorie des représentations de groupes finis. La démonstration en est élémentaire mais est trop longue pour figurer dans ces notes.

Théorème 7 (Brauer). — *Soit G un groupe fini. Toute fonction centrale $G \to \mathbf{C}$ est combinaison $\mathbf{C}$-linéaire de caractères d'induites de représentations de dimension 1 de sous-groupes de G. De plus, si ρ est une représentation de G, son caractère est une combinaison*

$\mathbf{Z}$*-linéaire de caractères d'induites de représentations de dimension* 1 *de sous-groupes de* G.

Noter que si H_1, H_2,..., H_n sont des sous-groupes de G, et m_1, m_2,...,m_n sont des entiers, $\oplus_i(\mathrm{Ind}_{H_i}^G \tau_i)^{n_i}$ n'est pas une représentation de G. Mais on parle d'une *représentation virtuelle.* Le théorème 2 se traduit par un isomorphisme de représentations

$$\rho \oplus \oplus_{i,n_i<0}(\mathrm{Ind}_{H_i}^G \tau_i)^{-n_i} \simeq \oplus_{i,n_i>0}(\mathrm{Ind}_{H_i}^G \tau_i)^{n_i}.$$

Noter que si ρ est isomorphe à $\oplus_i(\mathrm{Ind}_{H_i}^G \tau_i)^{n_i}$, la représentation $\bar{\rho}$ conjuguée de ρ est isomorphe à $\oplus_i(\mathrm{Ind}_{H_i}^G \bar{\tau}_i)^{n_i}$. C'est en particulier le cas si les τ_i sont de dimension 1.

Corollaire 1. — *Soient $L|K$ une extension galoisienne finie de groupe de Galois G. Soit ρ une représentation galoisienne de G. Il existe des sous-corps M_1, M_2,..., M_n de L contenant K et tels que les extensions $L|M_1$, $L|M_2$,..., $L|M_n$ sont abéliennes, des entiers m_1,...,$m_n \in \mathbf{Z}$, des caractères de Hecke χ_1,..., χ_n pour M_1, M_2,..., M_n respectivement tels que*

$$L(\rho, s) = \prod_{i=1}^{n} L(\chi_i, s)^{m_i}.$$

En particulier, $s \mapsto L(\rho, s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$. *Démonstration.* — Il suffit de combiner le théorème de Brauer avec la formule pour la fonction L des représentations induites.

On peut déjà en déduire une équation fonctionnelle, à quelques facteurs près, grâce aux équations fonctionnelles des fonctions L de Hecke. Mais une équation fonctionnelle précise va être énoncée ci-dessous.

6. Le conducteur d'Artin et l'équation fonctionnelle

Soient $L|K$ une extension galoisienne finie de groupe de Galois G. Soit ρ un motif d'Artin $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{GL}_V$, avec V de dimension n.

Dans notre définition de $\Lambda^{\mathrm{nr}}(\rho, s)$, il manque à ce produit eulérien des facteurs correspondant aux places ramifiées.

L'information en les places ramifiées est précisément contenue dans le conducteur. Rappelons que $\mathcal{D}_K$ désigne le discriminant absolu de K. Ainsi on pose

$$\Lambda(\rho, s) = (|\mathcal{D}_K|^{\dim(V)}|N_\rho|)^{s/2}\Lambda^{\mathrm{nr}}(\rho, s) = (|\mathcal{D}_K|^{\dim(V)}|N_\rho|)^{s/2}(\prod_{v\in\Omega_{K,\infty}} L_v(\rho, s))L(\rho, s),$$

où v parcourt les places infinies de K, pour compléter $L(\rho, s)$ et tenir compte de *toutes* les places de K. C'est la *fonction L complétée* de ρ. C'est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ puisque tous les facteurs sont méromorphes sur $\mathbf{C}$.

On peut vérifier que cette fonction vérifie les propriétés analogues à celles de $L(\rho, s)$: additivité pour les sommes de représentations, invariance par inflation, et surtout formule pour l'induction. Il s'agit de vérifications locales. Ces propriétés sont faciles à établir pour les facteurs aux places archimédiennes. Aux places de K ramifiées dans L, il faut étudier de plus près le conducteur d'Artin et faire intervenir la formule du conducteur-discriminant.

Cela nous amène au théorème qui justifie la définition du conducteur d'Artin.

Théorème 8 (Artin). — *On a l'équation fonctionnelle*

$$\Lambda(\rho, s) = W_\rho \Lambda(\rho^*, 1-s),$$

où W_ρ est un nombre complexe de module 1*.*

Ce théorème se déduit immédiatement de la formule pour l'induction et de l'équation fonctionnelle des fonctions L (complétées) de Hecke. On utilise que le passage à la contragrédiente commute à l'induction, si bien que l'induite du conjugué d'un caractère τ de dimension 1 est la contragrédiente de l'induite de τ.

Prédire W_ρ à partir de la donnée de ρ n'est pas facile. Lorsque ρ est isomorphe à sa contragrédiente, ce qui est le cas lorsque le caractère de ρ est à valeurs réelles, on a $W_\rho \in \{-1, 1\}$.

L'équation fonctionnelle entraîne immédiatement la formule du conducteur discriminant. En effet, il suffit de comparer l'équation fonctionnelle de Λ_L, qui s'écrit comme un produit de fonctions Λ d'Artin, à l'équation fonctionnelle de chacun des facteurs.

L'équation fonctionnelle permet de montrer des théorèmes algébriques. Mentionnons celui-ci. Considérons la *différente absolue* de K, c'est-à-dire l'inverse de l'idéal fractionnaire $\{x \in K | \mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(xy) \in \mathbf{Z}$, pour tout $y \in \mathcal{O}_K\}$. Sa norme via $N_{K/\mathbf{Q}}$ est le discriminant absolu $\mathcal{D}_K$ de K.

Théorème 9 (Hecke). — *La différente absolue de K est un carré dans le groupe des classes $\mathcal{C}\ell(K)$.*

On peut rapprocher cet énoncé des énoncé de parité des caractéristiques d'Euler–Poincaré en topologie. La question la plus importante sur les fonctions L d'Artin est la *conjecture d'Artin*, qui concerne les pôles des fonctions L.

Conjecture (Artin). — *Supposons que $V^G = \{0\}$. La fonction $s \mapsto L(\rho, s)$ admet un prolongement holomorphe au plan complexe.*

C'est une question profonde qui n'est résolue que dans quelques cas très particuliers, notamment le cas où G est abélien, par la théorie de Hecke, Tate, Iwasawa etc et quelques cas où ρ est de dimension 2 par la théorie des formes automorphes, en suivant la philosophie de Langlands. Les méthodes qui permettent de relier une représentation d'Artin à une forme automorphe fournissent une démonstration directe du prolongement analytique et de l'équation fonctionnelle sans utiliser le théorème de Brauer et l'équation fonctionnelle des fonctions L de Hecke.

En raison de la formule pour l'induction, la conjecture d'Artin est vraie si ρ est induite d'une représentation de dimension 1 : on se ramène aux fonctions L abéliennes.

L'hypothèse $V^G = \{0\}$ est nécessaire puisque si V est une droite avec action triviale de G, on a $L(\rho, s) = \zeta_K(s)$, qui a un pôle en $s = 1$. Une formulation équivalente de la conjecture d'Artin, sans faire aucune hypothèse sur V, est que $s \mapsto \Lambda(\rho, s)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec pour seuls pôles $s = 0$ et $s = 1$, qui sont tous deux d'ordre $\dim(V^{\mathrm{Gal}(L/K)})$.

La conjecture d'Artin a démontrée par Weil si on remplace les corps de nombres par des corps de fonctions d'une courbe sur un corps fini.

La conjecture d'Artin entraîne la conjecture de Dedekind (existence d'un prolongement holomorphe sur $\mathbf{C}$ pour le rapport de fonction $\zeta_M(s)/\zeta_K(s)$ même lorsque l'extension finie $M|K$ n'est pas galoisienne).