XIII
Fonctions L abéliennes

1. Notations

Soit K un corps de nombres. On note :
$\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K,
$\mathcal{O}_K^\times$ le groupe des unités de $\mathcal{O}_K$,
$\mathcal{D}_K$ le discriminant absolu de K,
μ_K le groupe (fini) des racines de l'unité de $K^\times$,
ω_K l'ordre du groupe μ_K,
$\mathcal{I}(K)$ le groupe des idéaux fractionnaires de K,
$\mathcal{P}(K)$ le groupe des idéaux fractionnaires principaux de K,
$\mathcal{C}\ell(K) = \mathcal{I}(K)/\mathcal{P}(K)$ le groupe des classes d'idéaux (ou groupe des classes) de K,
$h_K = |\mathcal{C}\ell(K)|$ le nombre de classe de K,
$\mathbf{A}_K$ l'anneau des adèles de K,
$\mathbf{A}_K^\times$ le groupe des idèles de K,
$C_K = \mathbf{A}_K^\times/K^\times$ le groupe des classes d'idèles de K,
Reg_K le régulateur de $\mathcal{O}_K^\times$,
Ω_K l'ensemble des places de K,
$\Omega_{K,\infty}$ l'ensemble des places infinies (ou archimédiennes) de K,
$r_1 = r_1(K)$ le nombre de places réelles de K,
$r_2 = r_2(K)$ le nombre de places complexes non réelles de K,
ζ_K la fonction ζ de Dedekind de K.

Soit v une placede K. On note :
K_v le complété de K en v,
$|.|_v$ la valeur absolue normalisée associée à v.

Si, de plus, v est finie, on note :
$\mathcal{P}_v$ le premier de K associé à v,
$\mathcal{O}_{K,v}$ ou $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v (le complété $\mathcal{P}_v$-adique de $\mathcal{O}_K$),
$\mathcal{P}_v$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$ (abus de notation),
π_v une uniformisante de $\mathcal{P}_v$ dans K_v,
k_v le corps résiduel $\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_v$.

On note $||.||$ l'application $\mathbf{A}_K^\times \to \mathbf{R}^\times$ qui à l'idèle $x = (x_v)_{v\in\Omega_K}$ associe

$$||x|| = \prod_{v\in\Omega_K} |x_v|_v.$$

On note $\mathbf{A}_K^{\times,0} = \{x \in \mathbf{A}_K^\times \,|\, ||x|| = 1\}$.

2. Cycles arithmétiques

Un *cycle arithmétique* (attention le terme n'est pas standard et varie suivant les auteurs) de K est une application presque nulle $\Omega_K \to \mathbf{N}$ qui à v associe n_v et telle que $n_v = 0$ si v est une place complexe non réelle, $n_v \in \{0,1\}$ si v est une place réelle. On le note de façon multiplicative

$$\mathcal{M} = \prod_v \mathcal{P}_v^{n_v},$$

où $\mathcal{P}_v$ est une notation sans signification si v est une place infinie. Ainsi la notion de cycle arithmétique généralise (légèrement) la notion d'idéal de $\mathcal{O}_K$. On peut associer à $\mathcal{M}$ l'idéal

$$\prod_{v \notin \Omega_{K,\infty}} \mathcal{P}_v^{n_v}.$$

On associe à $\mathcal{M}$ les généralisations $\mathcal{O}_{K,\mathcal{M}}$, $\mathcal{O}_{K,\mathcal{M}}^\times$, $\mu_{K,\mathcal{M}} = \mu_K^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{I}(K)^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{P}(K)^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{C}\ell(K)^{\mathcal{M}}$, $h_K^{\mathcal{M}}$, $\mathrm{Reg}_K^{\mathcal{M}}$, $\mathbf{A}_{K,\mathcal{M}}^\times$, $C_K^{\mathcal{M}}$ des objets ci-dessus.

3. Fonctions L de caractères galoisiens

Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. L'arithmétique a pour thème majeur la compréhension du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, en particulier pour $K = \mathbf{Q}$. Cela revient à comprendre la collection des groupes $\mathrm{Gal}(L/K)$, pour $L|K$ extension galoisienne finie. Notre premier but est de comprendre les caractères de tels groupes (représentations complexes de dimension 1).

Soit $\chi : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathbf{C}^\times$ d'image finie. Dire que χ est d'image finie revient à dire que χ est continu si on munit $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ de la topologie profinie. Alors χ se factorise par $\mathrm{Gal}(L/K)$, avec $L|K$ extension abélienne finie. On pose alors

$$L(\chi, s) = \prod_v \frac{1}{1 - \chi(\mathrm{Frob}_v)|\mathcal{P}_v|^{-s}},$$

où v parcourt les places finies de K non ramifiées dans L et $s \in \mathbf{C}$. Ici Frob_v est défini à conjugaison près dans $\mathrm{Gal}(L/K)$ et modulo un groupe d'inertie en v, qui est trivial si v est non ramifié dans L. Ainsi, $\chi(\mathrm{Frob}_v)$ est bien défini puisque $L|K$ est abélienne. On peut développer le produit eulérien pour obtenir une série de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_I \frac{a_I}{|I|^s},$$

où I parcourt les idéaux de $\mathcal{O}_K$. Cette série converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, puisque χ prend des valeurs de module 1, si bien que a_I est nul ou un nombre complexe de module 1.

Remarque . — 1) Soit $M|K$ une extension galoisienne intermédiaire à $L|K$. Supposons que χ se factorise par $\chi' : \mathrm{Gal}(M/K) \to \mathbf{C}^\times$. On a alors

$$L(\chi, s) = L(\chi', s) \prod_v (1 - \chi(\mathrm{Frob}_v)|\mathcal{P}_v|^{-s}),$$

où v parcourt les places finies ramifiées dans L mais pas dans M. Si M est minimal pour la factorisation de χ, on dit que χ est *primitif*. L'information contenue dans $L(\chi, s)$ est maximale si on choisit χ primitif.

2) Pour $\mathcal{Q}$ premier de K non ramifié dans L, attaché à une place finie v, on pose

$$L_v(\chi, s) = L_{\mathcal{Q}}(\chi, s) = \frac{1}{1 - \chi(\mathrm{Frob}_{\mathcal{Q}})|\mathcal{Q}|^{-s}}.$$

C'est le *facteur local* ou *facteur d'Euler* en $\mathcal{Q}$ ou v.

3) Soit $\mathcal{Q}$ premier de K non ramifié dans L. Soit $\mathcal{P}$ un premier de L au dessus de K. Le groupe de décomposition $D_{\mathcal{P}}$ en $\mathcal{P}$ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ s'identifie à $\mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}})$, qui est cyclique et engendré par une substitution de Frobenius $\mathrm{Frob}_{\mathcal{Q}}$. Ainsi la restriction de χ à $D_{\mathcal{P}}$ est déterminée par $L_{\mathcal{Q}}(\chi, s)$. Donc $L_{\mathcal{Q}}(\chi, s)$ sait "tout" sur $\chi_{|D_{\mathcal{P}}}$.

4) Le théorème de densité de Chebotarev nous dit que l'extension L de K est déterminée par l'ensemble des premiers de K non ramifiés dans L qui sont totalement décomposés dans L, c'est-à-dire par l'ensemble des premiers $\mathcal{Q}$ tels que $\chi(\mathrm{Frob}_{\mathcal{Q}}) = 1$, et que tout élément de $\mathrm{Gal}(L/K)$ est une substitution de Frobenius. Ainsi, la connaissance de $L(\chi, s)$ détermine χ, mais de façon très indirecte.

5) Si $\mathcal{Q}$ est ramifié dans $L|K$, $L_{\mathcal{Q}}(\chi, s)$ est par définition trivial. Mais le groupe de décomposition $D_{\mathcal{P}}$ en $\mathcal{P}|\mathcal{Q}$ n'est pas trivial, ni même cyclique en général. Donc $L_{\mathcal{Q}}(\chi, s)$ ne sait, a priori, rien sur $\chi_{|D_{\mathcal{P}}}$. Comment intégrer l'information manquante à $L(\chi, s)$?

6) Le produit eulérien qui définit $L(\chi, s)$ ne fait intervenir que les places finies. Qu'en est-il des places infinies ?

4. Fonctions L de caractères de classes d'idèles, et de classes d'idéaux

Soit

$$\mathcal{M} = \prod_v \mathcal{P}_v^{n_v}$$

un cycle arithmétique.

Rappelons qu'on a un isomorphisme canonique de groupes finis : $C_K/C^{\mathcal{M}} \to \mathcal{C}\ell(K)^{\mathcal{M}}$ caractérisé par le fait que pour tout premier $\mathcal{Q}$ de K ne dividant pas $\mathcal{M}$, l'image d'une uniformisante $\pi_{\mathcal{Q}}$ de l'idéal premier de $K_{\mathcal{Q}}$ vu comme un sous-anneau de $\mathbf{A}_K$ a pour image la classe de l'idéal $\mathcal{Q}$.

Soit χ un caractère du groupe abélien fini $C_K/C^{\mathcal{M}}$ des classes d'idèles de rayon $\mathcal{M}$. On pose

$$L(\chi, s) = \prod_{v, \mathcal{P}_v \nmid \mathcal{M}} \frac{1}{1 - \chi(\pi_v)|\mathcal{P}_v|^{-s}},$$

ou encore en identifiant $C_K/C^{\mathcal{M}}$ au groupe $\mathcal{C}\ell(K)^{\mathcal{M}}$ des classes de rayon $\mathcal{M}$, et en notant encore $\chi : \mathcal{C}\ell(K)^{\mathcal{M}} \to \mathbf{C}^\times$ le caractère obtenu,

$$L(\chi, s) = \prod_{v, \mathcal{P}_v \nmid \mathcal{M}} \frac{1}{1 - \chi(\mathcal{P}_v)|\mathcal{P}_v|^{-s}}.$$

Remarque . — Soit $\mathcal{M}'$ un cycle arithmétique de K tel que $\mathcal{M}$ divise $\mathcal{M}'$. Le groupe des classes d'idèles de rayon $\mathcal{M}$ est un quotient du groupe des classes d'idèles de rayon $\mathcal{M}'$. Soit χ' un caractère de $C_K/C^{\mathcal{M}'}$ qui se factorise par $C_K/C^{\mathcal{M}}$. On a alors

$$L(\chi', s) = L(\chi, s) \prod_{v, \mathcal{P}_v | \mathcal{M}', \mathcal{P}_v \nmid \mathcal{M}} \frac{1}{1 - \chi(\pi_v)|\mathcal{P}_v|^{-s}}.$$

Si χ ne se factorise par aucun groupe de classe de rayon divisant strictement $\mathcal{M}$, on dit que χ est *primitif.*

On peut étendre la définition des fonctions L aux morphismes continus de groupes $\chi : \mathbf{A}_K^\times / K^\times \to \mathbf{C}^\times$ (les *pseudo-caractères*). Il s'agit des *caractères de Hecke.*

Alors, comme $\mathbf{A}_K^{\times,0}/K^\times$ est compact, son image par χ est compacte et donc contenue dans $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} | \, |z| = 1\}$. Il existe χ^0 un caractère de $\mathbf{A}_K^\times/K^\times$ et $t \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{A}_K^\times$ tels qu'on ait

$$\chi(x) = ||x||^t \chi^0(x).$$

On a alors

$$L(\chi, s) = L(\chi^0, s - t).$$

Ainsi la variable complexe s peut être incorporée dans la variable que constitue le caractère, si on autorise les pseudo-caractères. Noter que χ^0 n'est pas nécessairement d'image finie.

Le dictionnaire entre classe d'idéaux et classes d'idèles peut-être prolongé. Les caractères de Hecke peuvent être traduits en termes de pseudo-caractères des groupes d'idéaux vérifiant certaines propriétés vis-à-vis des idéaux principaux. Dans ce langage, on les appelle *Grössencharakter.*

5. Lien par la théorie du corps de classe

Soit $L|K$ une extension abélienne finie. La loi de réciprocité d'Artin affirme qu'on a un isomorphisme de groupes

$$\mathbf{A}_K^\times / K^\times N_{L/K}(\mathbf{A}_L^\times) \simeq \mathrm{Gal}(L/K),$$

caractérisé par le fait que pour tout premier de K non ramifié dans L, l'image de $\pi_{\mathcal{Q}} \in K_{\mathcal{Q}} \subset \mathbf{A}_K^\times$ est la substition de Frobenius en $\mathcal{Q}$ de $\mathrm{Gal}(L/K)$. Ainsi les fonctions L considérées dans les deux sections précédentes coïncident.

On peut être un peu plus précis. Il existe un cycle arithmétique minimal $\mathcal{M}$ tel que $\mathbf{A}_{K,\mathcal{M}}^{\times} \subset N_{L/K}(\mathbf{A}_L^{\times})$.

Pour tout cycle arithmétique $\mathcal{M}$, il existe une extension abélienne $H_{\mathcal{M}}|K$, le *corps de classe de rayon* $\mathcal{M}$, telle que $\mathbf{A}_{K,\mathcal{M}}^{\times} = N_{H_{\mathcal{M}}/K}(\mathbf{A}_{H_{\mathcal{M}}}^{\times})$. On a alors les isomorphismes

$$\mathcal{C}\ell(K)^{\mathcal{M}} \simeq \mathbf{A}_K^{\times}/K^{\times} N_{H_{\mathcal{M}}/K}(\mathbf{A}_{H_{\mathcal{M}}}^{\times}) \simeq \mathrm{Gal}(H_{\mathcal{M}}/K).$$

Revenons à l'extension $L|K$. On a de plus la factorisation de la fonction ζ de Dedekind de L :

$$\zeta_L(s) = \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

où χ parcourt les caractères primitifs de $\mathrm{Gal}(L/K)$. La fonction ζ_L admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ et une équation fonctionnelle. Qu'en est-il de chacun des facteurs $L(\chi, s)$?

La fonction ζ_L admet un pôle simple en $s = 1$, de même que ζ_K. Or la fonction $L(\chi, .)$ qui à s associe $L(\chi, s)$ vaut ζ_K si $\chi = 1$. Si $\chi \neq 1$, elle est holomorphe au voisinage de $s = 1$. Que vaut-elle en $s = 1$? On attend une réponse compatible à la formule du nombre de classe, qui décrit la résidu de ζ_L en $s = 1$.

6. Facteurs aux places infinies

Soit χ un caractère d'image finie de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Il existe une extension abélienne minimale $L|K$ telle que χ se factorise par $\mathrm{Gal}(L/K)$. Notons $\mathcal{M}$ le cycle arithmétique de K associé à l'extension abélienne $L|K$. Posons

$$\mathcal{M} = \prod_{v \in \Omega_K} \mathcal{P}_v^{n_v}.$$

Pour $v \in \Omega_{K,\infty}$, on a :

$n_v = 0$ si $K_v = \mathbf{C}$,

$n_v = 0$ si $K_v = \mathbf{R}$ et l'image par χ de la conjugaison complexe en v est 1,

$n_v = 1$ si $K_v = \mathbf{R}$ et l'image par χ de la conjugaison complexe en v est -1.

Rappelons que la fonction Γ est définie par la formule

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \, \frac{dt}{t},$$

qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle en les entiers ≤ 0, qui sont simples et de résidu en $-n$ égal à $(-1)^n/n!$. Elle vérifie la propriété $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. On a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. On a la *formule de duplication*

$$\Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2) = 2^{1-s}\pi^{1/2}\Gamma(s).$$

Il est commode de poser

$$\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} e^{-\pi t} t^{s/2} \, \frac{dt}{t}$$

et

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t} t^s \, \frac{dt}{t}.$$

Ainsi la formule de duplication devient

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s)\Gamma_{\mathbf{R}}(s+1).$$

On définit le facteur d'Euler en v de $L(\chi, s)$ par les formules suivantes :

Si $n_v = 0$ et $K_v = \mathbf{R}$, on pose

$$L_v(\chi, s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s).$$

Si $n_v = 1$ et $K_v = \mathbf{R}$, on pose

$$L_v(\chi, s) = \pi^{-(1+s)/2}\Gamma((s+1)/2) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s+1).$$

Si $n_v = 0$ et $K_v = \mathbf{C}$, on pose

$$L_v(\chi, s) = \pi^{-1/2-s}\Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s).$$

On peut ainsi modifier la fonction $L(\chi, s)$ par la formule

$$\Lambda^{\mathrm{nr}}(\chi, s) = L(\chi, s) \prod_{v \in \Omega_{K,\infty}} L_v(\chi, s),$$

où nr signifie non ramifiée (il manque encore des facteurs correspondant aux places ramifiées).

7. Prolongement analytique et équation fonctionnelle

Supposons χ primitif. La considération de la fonction $s \mapsto \Lambda^{\mathrm{nr}}(\chi, s)$ est justifiée par la l'incorporation si satisfaisante des places infinies, et davantage encore, par le théorème suivant.

Théorème 1 (Hecke, Tate, Iwasawa). — *La fonction $s \mapsto \Lambda(\chi, s)$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec des pôles seulement si $\chi = 1$. Ces pôles sont simples et situés en $s = 0$ et $s = 1$. Il existe un nombre réel $B_\chi > 0$ et $C_\chi \in \mathbf{C}$ tels qu'on ait la formule (dite* équation fonctionnelle*) :*

$$\Lambda^{\mathrm{nr}}(\chi, 1-s) = C_\chi B_\chi^s \Lambda^{\mathrm{nr}}(\bar{\chi}, s),$$

où $\bar{\chi}$ est le caractère inverse de χ.

La démonstration de ce théorème est due à Hecke, et, par la suite, à Tate et Iwasawa. Elle repose de façon essentielle sur la théorie du corps de classe, en interprétant χ comme un caractère de $\mathcal{C}\ell(K)^{\mathcal{M}}$ (Hecke) ou du groupe des classes d'idèles (Tate, Iwasawa). Dans toutes les approches, l'analyse de Fourier joue un rôle crucial.

L'équation fonctionnelle peut prendre une forme plus précise. On peut poser

$$w_\chi = B_\chi^{1/2} C_\chi \in \mathbf{C}.$$

C'est le *root number*. L'équation fonctionnelle devient :

$$\Lambda^{\mathrm{nr}}(\chi, 1-s) = w_\chi B_\chi^{s-1/2} \Lambda^{\mathrm{nr}}(\bar{\chi}, s)$$

avec $|w_\chi| = 1$. On peut préciser B_χ par la formule

$$B_\chi = |\prod_{v \in \Omega_K - \Omega_{K,\infty}} \mathcal{P}_v^{n_v}||\mathcal{D}_K|.$$

Ainsi B_χ contient des informations sur la restriction de χ aux places de K ramifiées dans L. On peut ainsi poser

$$\Lambda(\chi, s) = \Lambda^{\mathrm{nr}}(\chi, s) B_\chi^{s/2},$$

qui est la *fonction L de Hecke complétée.* L'équation fonctionnelle prend alors la forme

$$\Lambda(\chi, 1-s) = w_\chi \Lambda(\bar{\chi}, s)$$

Les nombres B_χ et w_χ répondent au problème de l'information manquante dans $L(\chi, s)$ en les places ramifiées.

L'invariant w_χ peut s'écire à l'aide de sommes de Gauss.

Exemple 1. — Si $K = \mathbf{Q}$ et χ est associé à un caractère de Dirichlet χ primitif modulo N. On pose

$$G(\chi) = \sum_{a \pmod N} \chi(a) e^{2i\pi a/N}.$$

C'est un nombre complexe de module $\sqrt{N}$. On a alors

$$w_\chi = G(\chi)/|G(\chi)|.$$

Noter l'analogie formelle entre les sommes de Gauss et la fonction Γ : il s'agit d'une somme d'un caractère additif contre un caractère multiplicatif. En général, w_χ est un produit de facteurs locaux en les places ramifiées dans $L|K$.

8. Formule du nombre de classe

Rappelons la formule du nombre de classes. Revenons à la définition de $\Lambda\mathrm{nr}(\chi, s)$ pour $\chi = 1$. Posons

$$\Lambda_L(s) = \Lambda^{\mathrm{nr}}(1, s) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s)^{r_1(L)} \Gamma_{\mathbf{C}}(s)^{r_2(L)} \zeta_L(s).$$

L'équation fonctionnelle vérifie

$$\Lambda_L^{\mathrm{nr}}(1-s) = |\mathcal{D}_L|^{1/2-s}\Lambda_L^{\mathrm{nr}}(s).$$

Rappelons la formule du nombre de classes :

$$\lim_{s\longrightarrow 1^+}(s-1)\zeta_L(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{reg}(L)h_L}{\omega_L|\mathcal{D}_L|^{1/2}}.$$

On en déduit la formule

$$\mathrm{Res}_{s=0}\Lambda_L^{\mathrm{nr}}(s) = \frac{2^{r_1(L)}(2\pi)^{r_2(L)}h_L\mathrm{reg}(L)}{\omega_L}.$$

Revenons à la factorisation

$$\zeta_L(s) = \prod_\chi L(\chi, s)$$

où χ parcourt les caractères primitifs de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Existe-t-il une formule pour $\Lambda(\chi, 1)$ analogue à la formule de nombre de classes ? C'est le cas pour $\chi = 1$, puisque c'est la formule du nombre de classes pour ζ_K. On peut remarquer que les objets qui interviennent dans la formule du nombre de classes pour L sont munis d'une action de $\mathrm{Gal}(L/K)$: c'est le cas du groupe des classes, du groupe des unités, du groupe des racines de l'unité.

Pourquoi se limiter aux extensions abéliennes ?