VIII
Adèles

1. Valeurs absolues normalisées

Soit K un corps de nombres. Notons $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. On a vu ce que sont les valeurs absolues non archimédiennes de K.

Proposition 1. — *Les valeurs absolues archimédiennes de K sont de la forme $x \mapsto |\sigma(x)|_\infty^k$, où $|.|_\infty$ est la valeur absolue usuelle de $\mathbf{C}$, où σ est un plongement de K dans $\mathbf{C}$ et où k est un nombre réel ≤ 1.*
Démonstration. — Une valeur absolue non archimédienne v de K induit une valeur absolue non archimédienne de $\mathbf{Q}$. Elle est donc de la forme cherchée sur $\mathbf{Q}$. Le complété de K pour v est donc une extension finie de $\mathbf{R}$ qui ne peut être que $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (puisque $\mathbf{C}$ est de degré 2 sur $\mathbf{R}$ et que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos). La valeur absolue v se prolonge donc en une valeur absolue de $\mathbf{C}$ qui est de la forme cherchée sur $\mathbf{R}$. Grâce au lemme V-8, on voit qu'une valeur absolue de $\mathbf{R}$ se prolonge de manière unique à $\mathbf{C}$. Notre valeur absolue est donc de la forme cherchée sur $\mathbf{C}$. Par conséquent le plongement de K dans son complété K_v définit un plongement de K dans $\mathbf{C}$ compatible aux valeurs absolues par continuité de v.

Puisque les valeurs absolues de la proposition 1 définissent la même topologie lorsqu'on change la valeur de k, il n'est pas utile de toutes les considérer.

On les normalise en posant $k = 1$ si le plongement σ est réel et $k = 2$ sinon (on peut condenser cela en posant $k = [\sigma(K)\mathbf{R} : \mathbf{R}]$, cette formule est à comparer avec le corollaire 3 de la proposition 1). Autrement dit, pour toute valeur absolue normalisée $|.|_w$ de K au dessus d'une valeur absolue normalisée $|.|_v$ de $\mathbf{Q}$, on a

$$|x|_w = |x|_v^{[K_w:\mathbf{Q}_v]},$$

où K_w et $\mathbf{Q}$ désigne les complétés de K et $\mathbf{Q}$ pour les valeurs absolues w et v. L'ensemble Ω_K des places de K coïncide avec l'ensemble des valeurs absolues normalisées de K. Rappelons qu'il est constitué d'un nombre fini de places archimédiennes et d'un nombre infini de places non-archimédiennes. Notons $\Omega_{K,\infty}$ l'ensemble des places archimédiennes. On a $|\Omega_{K,\infty}| = r_1 + r_2$, où r_1 désigne le nombre de plongements réels de K dans $\mathbf{C}$ et $2r_2$ désigne le nombre de plongements non réels de K dans $\mathbf{C}$.

Notons K_v le complété de K en la valeur absolue associée à la place v. Lorsque v est non-archimédienne, notons $\mathcal{O}_v = \{x \in K_v / v(x) \geq 0\}$, $\mathcal{P}_v$ l'idéal premier non nul de $\mathcal{O}_v$ et

v valuation discrète associée. L'anneau $\prod_{v\in\Omega_K} K_v$ est énorme. Cette constatation amène à considérer l'anneau des adèles ci-dessous.

2. Produit restreint d'espaces topologiques

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts des X_i. Le *produit topologique restreint* X de la famille des $(X_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des éléments $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ tels que $x_i \in Y_i$ pour tout $i \in I$ excepté un nombre fini.

On munit X d'une topologie en considérant comme base de voisinages d'un point $(x_i)_{i\in I}$ les ensembles $\prod_{i\in I} O_i$ où O_i est un ouvert de X_i qui est égal à Y_i pour tout $i \in I$ excepté un nombre fini et où $x_i \in O_i$ $(i \in I)$. En particulier, pour J sous-ensemble fini de I, l'ensemble $X_J = \prod_{i\in J} X_i \times \prod_{i\in I-J} Y_i$ est un ouvert de X. On a donc

$$X = \cup_J X_J.$$

Cela permet de voir X comme une limite injective. Lorsque l'ensemble des $i \in I$ tels que $X_i \neq Y_i$ est infini, l'ensemble X n'est pas compact. Si chacun des X_i est localement compact, l'espace X est localement compact (en effet les ensembles X_J sont alors localement compacts, lorsque J est fini).

3. Adèles d'un corps de nombres

L'anneau $\mathbf{A}_K$ des *adèles* de K est par définition le sous-anneau de $\prod_{v\in\Omega_K} K_v$ formé par les éléments de la forme $(x_v)_{v\in\Omega_K}$ avec $x_v \in \mathcal{O}_v$ pour toute place v de K excepté un nombre fini d'entre elles. C'est donc le produit restreint relativement aux sous-groupes $\mathcal{O}_v$ des corps K_v lorsque v parcourt les places de K.

Soit x un élément de K. Considérons les plongements de K dans ses complétés. On a $x \in \mathcal{O}_v$ pour presque toute place non archimédienne v de K. On a donc une application injective (le plongement diagonal)

$$K \longrightarrow \mathbf{A}_K$$

qui à $x \in K$ associe l'élément qui a pour coordonnée x dans K_v pour chaque place v. Il s'agit d'un homomorphisme d'anneaux.

Ajoutons que tout complété K_v de K est un facteur, et donc un sous-anneau, de $\mathbf{A}_K$. Par ailleurs, $\mathbf{A}_K$ est le sous-anneau de $\prod_{v\in\Omega_K} K_v$ engendré par par K (plongé diagonalement), tous les $\mathcal{O}_v$ (v valuation de $\mathcal{O}_K$) et les complétés archimédiens.

On munit donc $\mathbf{A}_K$ de la topologie de produit restreint pour laquelle l'*anneau des S-adèles* $\mathbf{A}_{K,S} = \prod_{v\in S} K_v \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v$ est ouvert lorsque S est un ensemble fini de places de K contenant les places archimédiennes et pour laquelle $\mathbf{A}_{K,S}$ est muni de la topologie produit.

On a

$$\mathbf{A}_K = \cup_S \mathbf{A}_{K,S}$$

(Cela permet de voir $\mathbf{A}_K$ comme une limite injective). L'anneau $\mathbf{A}_K$ muni de la topologie de produit restreint est un anneau topologique. En effet l'addition et la multiplication sont continues sur $\mathbf{A}$, puisqu'elles sont continues sur les ouverts $\mathbf{A}_{K,S}$ et que les $\mathbf{A}_{K,S}$ recouvrent $\mathbf{A}_K$.

PROPOSITION 2. — *Les homomorphismes injectifs de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels $K \longrightarrow A_K$ et $A_{\mathbf{Q}} \longrightarrow A_K$ définissent un isomorphisme continu de K-espaces vectoriels*

$$K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{A}_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{A}_K,$$

où la topologie de $K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ est la topologie définie par le produit tensoriel (voir la définition ci-dessous).

Démonstration. — Soit p un nombre premier. Il se décompose $p\mathcal{O}_K = \prod_{\mathcal{P}|p} \mathcal{P}^{e_{\mathcal{P}}}$ dans $\mathcal{O}_K$. Rappelons que, pour M groupe abélien et n entier, le groupe $M \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ s'identifie à M/nM. Ainsi, on a, pour n entier ≥ 0,

$$\mathcal{O}_K \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \simeq \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \simeq \prod_{\mathcal{P}|p} \mathcal{O}_K/\mathcal{P}^{e_{\mathcal{P}}n}.$$

Par passage à la limite sur n, on obtient l'isomorphisme de groupes

$$\mathcal{O}_K \otimes \mathbf{Z}_p \simeq \prod_{\mathcal{P}|p} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}.$$

On munit $\mathcal{O}_K$ de la topologie discrète, si bien que cet isomorphisme est bicontinu car l'image d'un ouvert contenant 0 est un ouvert contenant 0 (et réciproquement). Par ailleurs, on a les isomorphismes de $\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{O}_K \otimes \mathbf{Q} \simeq K$, et de $\mathbf{Z}_p$-module $\mathbf{Z}_p \otimes \mathbf{Q} \simeq \mathbf{Q}_p$. Ainsi on a les isomorphismes continus de K-espaces vectoriels.

$$\mathcal{O}_K \otimes \mathbf{Z}_p \otimes \mathbf{Q} \simeq K \otimes \mathbf{Z}_p \simeq \mathcal{O}_K \otimes \mathbf{Q}_p \simeq K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p.$$

On en déduit l'isomorphisme continu de K-espaces vectoriels

$$K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p \simeq \prod_{\mathcal{P}|p} K_{\mathcal{P}}.$$

Un tel isomorphisme est encore valable pour les places archimédiennes :

$$K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2}.$$

Ainsi, pour S sous-ensemble fini de $\Omega_{\mathbf{Q}}$ contenant $\Omega_{\mathbf{Q},\infty}$, notons S' l'ensemble des éléments de Ω_K au dessus de S. Comme $\mathcal{O}_K$ est un groupe discret isomorphe à $\mathbf{Z}^{[K:\mathbf{Q}]}$, on a un isomorphisme bicontinu de $\mathcal{O}_K$-modules

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Q},S} \otimes \mathcal{O}_K \simeq \mathbf{A}_{K,S'}.$$

Les $\mathbf{A}_{K,S'}$ décrivent une base de voisinages de 0. Ainsi le dernier isomorphisme est continu en 0, et donc partout par translation. Ainsi, par passage à la limite sur S on trouve l'isomorphisme bicontinu de $\mathcal{O}_K$-modules :

$$\mathcal{O}_K \otimes \mathbf{A}_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{A}_K.$$

Comme $\mathbf{A_Q}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, on a un isomorphisme

$$\mathcal{O}_K \otimes \mathbf{A_Q} \simeq (\mathcal{O}_K \otimes \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{A_Q} \simeq K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{A_Q}.$$

La proposition 2 permet de ramener l'étude de la topologie de $\mathbf{A}_K$ à $\mathbf{A_Q}$ dans la démonstration de la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — *a) L'espace topologique $\mathbf{A}_K$ est localement compact.*

b) Le corps K est discret dans $\mathbf{A}_K$.

c) Le quotient $\mathbf{A}_K/K$, muni de la topologie quotient, est compact.

Démonstration. — Soit $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de K comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel. C'est aussi une base de $\mathbf{A}_K$ comme $\mathbf{A_Q}$-module (proposition 2). On a donc $\mathbf{A}_K \simeq \mathbf{A_Q}^n$ et $K \simeq \mathbf{Q}^n$, avec $n = [K : \mathbf{Q}]$. Il suffit donc de prouver les assertions de la proposition 3 dans le cas $K = \mathbf{Q}$.

Vérifions que $\mathbf{A_Q}$ est localement compact. L'ouvert $\mathbf{R} \times \prod_p \mathbf{Z}_p$ est localement compact (car c'est le produit d'espaces localement compacts) et est un voisinage de 0. On en déduit par translation que tout point admet un voisinage contenu dans un compact.

Pour voir que sous-groupe $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{A_Q}$ est discret il suffit d'établir que tout point de $\mathbf{Q}$ est isolé. Par translation il suffit de prouver que 0 est isolé. C'est le cas puisque l'ouvert $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \prod_p \mathbf{Z}_p$ (en effet c'est un ouvert de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q},\Omega_{\mathbf{Q},\infty}}\Omega_\emptyset$) ne contient que 0 comme nombre rationnel.

Vérifions la troisième assertion de la proposition 3. Tout élément de $\mathbf{A_Q}/\mathbf{Q}$ admet un représentant dans $\mathbf{R} \times \prod_p \mathbf{Z}_p \subset [0,1] \times \prod_p \mathbf{Z}_p$. En effet cela se voit en ajoutant des éléments de $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$ (ce qui respecte l'intégralité en toutes les places sauf p) et en remarquant qu'on a $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}] + \mathbf{Z}_p = \mathbf{Q}_p$ de sorte qu'on peut détruire les dénominateurs un à un. En translatant par des entiers on voit ensuite que tout élément de $\mathbf{A_Q}/\mathbf{Q}$ admet un représentant dans $[0,1[\times \prod_p \mathbf{Z}_p \subset [0,1] \times \prod_p \mathbf{Z}_p$. Comme ce dernier ensemble est compact, $\mathbf{A_Q}/\mathbf{Q}$ est compact.

Exercice . — Vérifier que $\prod_{v\in\Omega_{K,\infty}} K_v$ s'identifie à $\mathbf{R} \otimes K$. Soit $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de $\mathcal{O}_K$ comme $\mathbf{Z}$-module. Notons P_∞ l'image dans $\prod_{v\in\Omega_{K,\infty}} K_v$ du sous-ensemble de $\mathbf{R} \otimes K$ formé par les éléments de la forme $\sum_i t_i \otimes e_i$ avec t_i nombre réel vérifiant $0 \le t_i < 1$. Démontrer que

$$\prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v \times P_\infty$$

est un système de représentants de $\mathbf{A}_K/K$ (on dit que le produit

$$\prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v \times \bar{P}_\infty,$$

où $\bar{P}_\infty$ est l'adhérence de P_∞ dans $\mathbf{R} \otimes K$, est un *domaine fondamental* de $\mathbf{A}_K/K$ pour l'action de K).

Remarques. — Un groupe localement compact est muni d'une mesure de Haar. Cette mesure est obtenue comme produit des mesures de Haar sur les composantes locales. Comme K est discret, l'espace quotient $\mathbf{A}_K/K$ hérite de la mesure de Haar de $\mathbf{A}_K$. Comme il est compact, sa mesure de Haar est bien définie : elle coïncide avec le volume d'un domaine fondamental.

Pour saisir la topologie des adèles, il est commode d'avoir à l'esprit que la situation de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ est analogue à la situation de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}$ (*i.e.* $\mathbf{R}$ est localement compact, $\mathbf{Z}$ est discret dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est compact).

Cette phiilosophie est un guide particulièrement utile pour l'analyse de Fourier sur les adèles.

4. Idèles d'un corps de nombres

Reprenons les notations de la section précédente. Les groupe des *idèles* de K est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{A}_K$. Notons-le, comme il se doit, $\mathbf{A}_K^\times$. Il coïncide avec l'ensemble des éléments $(x_v)_{v\in\Omega_K}$ de $\prod_{v\in\Omega_K} K_v^\times$ tels que $x_v \in \mathcal{O}_v^\times$ pour presque tout $v \in \Omega_K$. C'est donc un produit restreint.

Il est muni de la topologie (de produit restreint) pour laquelle les les ensembles $\Lambda_S = \prod_{v\in\Omega} K_v^\times \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v^\times$, pour S sous-ensemble fini de Ω_K contenant $\Omega_{K,\infty}$, eux-mêmes munis de la topologie produit sont ouverts. C'est un groupe topologique (*i.e.* la multiplication et le passage à l'inverse sont des applications continues).

Attention : la topologie de $\mathbf{A}_K^\times$ n'est pas induite par la topologie de $\mathbf{A}_K$ (phénomène général : le groupe des éléments inversibles d'un anneau topologique n'est pas forcément un groupe topologique pour la topologie induite car l'application $x \mapsto x^{-1}$ n'est pas forcément continue). Elle est plus fine que la topologie induite par $\mathbf{A}_K$: tout voisinage pour la topologie des adèles d'un point contient un voisinage du même point pour la topologie des idèles. Elle définit donc strictement moins de compacts et strictement plus d'ensembles discrets.

L'ensemble Λ_S est un sous-groupe de $\mathbf{A}_K^\times$ que l'on appelle *groupe des S-idèles.* On a un homomorphisme injectif de groupes $K^\times \longrightarrow \mathbf{A}_K^\times$ induit par le plongement $K \longrightarrow \mathbf{A}_K$. Cela permet d'identifier $K^\times$ à un sous-groupe de $\mathbf{A}_K^\times$. Le groupe Λ_S contient l'image par cet homomorphisme du *groupe des S-unités*, qui est l'image réciproque dans $K^\times$ de Λ_S.

De plus $K^\times$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{A}_K^\times$, puisque c'est un sous-ensemble discret de $\mathbf{A}_K$. C'est le sous-groupe des *idèles principales* de K. Le groupe quotient $\mathbf{A}_K^\times/K^\times$ est le groupe des *classes d'idèles* de K.

On a une application *norme* (on dit aussi *valeur absolue* ; c'est d'ailleurs préférable pour éviter toute ambiguïté) $\mathbf{A}_K^\times \longrightarrow \mathbf{R}_+^\times$ qui à $x = (x_v)_{v\in S}$ associe

$$||x|| = \prod_v |x_v|_v,$$

où $|x|_v$ est la valeur absolue normalisée associée à la place v. Cette formule est bien définie car pour presque tout $v \in S$ on a $|x|_v = 1$.

Proposition 6. — *La valeur absolue est un homomorphisme surjectif et continu de groupes. Soit $x \in K^\times$. On a la* formule du produit *:*

$$||x|| = 1.$$

Démonstration. — La multiplicativité de la norme se vérifie composante par composante. La surjectivité résulte de du plongement canonique de $\mathbf{R}^\times$ dans $\mathbf{A}_K^\times$.

La formule du produit résulte de la formule

$$||x|| = ||\mathrm{N}_{K/\mathbf{Q}}(x)||,$$

que l'on vérifie composante par composante (corollaire 3 de la proposition V-5 et corollaire 2 de la proposition V-6), et de la formule du produit pour $\mathbf{Q}$ (qui résulte du théorème d'Ostrowski).

On a remarqué au passage l'existence d'une application norme (pour $L|K$ extension finie de corps de nombres)

$$\mathrm{N}_{L/K} \quad : \quad \mathbf{A}_L \longrightarrow \mathbf{A}_K,$$

définie en prolongeant la norme coordonnée par coordonnée. Nous reviendrons sur cette application.

Le groupe $\mathbf{A}_K^\times/K^\times$, muni de la topologie quotient, n'est pas compact puisque la norme est surjective sur $\mathbf{R}^\times$ et continue. Notons $\mathbf{A}_K^{\times 0}$ le sous-groupe de $\mathbf{A}_K^\times$ formé par les éléments de valeur absolue 1.

Posons $\mathbf{I}_\infty = \prod_{v \in \Omega_{K,\infty}} K_v^\times$ et $\mathbf{I}_\infty^0 = \mathbf{I}_\infty \cap \mathbf{A}_K^{\times 0}$. Ce dernier groupe est l'ensemble des éléments de $(x_v)_{v\in\Omega_{K,\infty}} \in \mathbf{I}_\infty$ tels que $\prod_v |x_v|_v = 1$. Considérons l'application $\phi : \mathbf{I}_\infty^0 \longrightarrow \mathbf{R}^{r_1+r_2}$ qui à $(x_v)_{v\in\Omega_{K,\infty}}$ associe $(\log(|x_v|_v))_{v\in\Omega_{K,\infty}}$. C'est une application continue.

Considérons les deux énoncés suivants, qui seront démontrés par la suite et qui sont connus comme le théorème de finitude du groupe des classes et le théorème des unités respectivement.

(ι) *Le groupe des classes de K est fini.*

($\iota\iota$) *Le groupe $\phi(\mathcal{O}_K^\times)$ est un réseau de l'hyperplan image de ϕ.*

Théorème 1. — *Le groupe $\mathbf{A}_K^{\times 0}/K^\times$ est compact si et seulement si (ι) et ($\iota\iota$) sont vrais.*

Démonstration. — Le sous-groupe $\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times$ est ouvert dans $\mathbf{A}_K^{\times 0}$, puisque $\mathbf{I}_\infty \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times$ est un produit d'ouverts. Pour démontrer le théorème il (faut et il) suffit de démontrer que d'une part l'ensemble $\mathbf{A}_K^{\times 0}/K^\times(\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)$ est fini et que d'autre part l'espace $K^\times(\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)/K^\times$ est compact.

L'injection $\mathbf{A}_K^{\times 0} \longrightarrow \mathbf{A}_K^\times$ définit un isomorphisme de groupes

$$\mathbf{A}_K^{\times 0}/\mathbf{I}_\infty^0 \longrightarrow \mathbf{A}_K^\times/\mathbf{I}_\infty.$$

La finitude de $\mathbf{A}_K^{\times 0}/K^\times(\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)$ équivaut donc à la finitude $\mathbf{A}_K^\times/K^\times(\mathbf{I}_\infty \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)$. Cela équivaut à la finitude du groupe des classes de K en raison du lemme suivant.

Lemme 1. — *L'homomorphisme de groupes $\mathbf{A}_K^\times \longrightarrow \mathcal{I}(K)$ qui à $x = (x_v)_{v\in S}$ associe l'idéal fractionnaire $\prod_{v\in S-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{P}_v^{v(x_v)}$ définit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes*

$$\mathbf{A}_K^\times/K^\times(\mathbf{I}_\infty \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times) \simeq \mathcal{C}l(K).$$

Démonstration. — Notons ψ cette application $\mathbf{A}_K^\times \longrightarrow \mathcal{I}(K)$. C'est un homomorphisme surjectif de groupes puisque tout idéal fractionnaire se décompose en produit d'idéaux premiers. Son noyau est l'ensemble des $x = (x_v)_{v\in S}$ tels que $x_v \in \mathcal{O}_v^\times$ pour tout $v \notin \Omega_{K,\infty}$. C'est donc $\mathbf{I}_\infty \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times$. L'ensemble des idéaux principaux coïncide avec $\psi(K^\times)$. L'image réciproque par ψ du sous-groupe de $\mathcal{I}(K)$ formé par les idéaux principaux est donc égale à $K^\times(\mathbf{I}_\infty \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)$. Cela prouve le lemme 1.

On remarque au passage que la topologie de $\mathbf{A}_K^{\times 0}/K^\times(\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)$ est discrète si bien que la finitude équivaut à la compacité.

Revenons à la preuve du théorème 1. Le groupe $K^\times(\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)/K^\times$ s'identifie à

$$(\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)/(K^\times \cap \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times) = (\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)/\mathcal{O}_K^\times.$$

Comme $\mathcal{O}_v^\times$ est compact, $(\mathbf{I}_\infty^0 \times \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} \mathcal{O}_v^\times)/\mathcal{O}_K^\times$ est compact si et seulement si $\mathbf{I}_\infty^0/\mathcal{O}_K^\times$ est compact.

Notons N le noyau de ψ. D'après le théorème des unités, $\psi(\mathcal{O}_K^\times)$ est un réseau de l'hyperplan image de ψ et le groupe $N \cap \mathcal{O}_K^\times$, qui est constitué par les racines de l'unité de K, est fini. (En effet, soit $u \in \mathcal{O}_K^\times$ dont tous les plongements a_1, a_2, ..., a_n dans $\mathbf{C}$ sont de module 1. Le polynôme minimal P de u sur $\mathbf{Q}$ est unitaire à coefficients entiers. Ses coefficients s'expriment comme valeurs des n premiers polynômes symétriques élémentaires en a_1, a_2, ..., a_n. Comme a_1, a_2, ..., a_n sont de module 1, les coefficients sont bornés en fonction de n seulement. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers dans un ensemble born, il n'y a qu'un nombre fini dépendant de n seulement de possibilités pour P. Donc les puissances de u vivent dans un l'ensemble fini des zéros de toutes les possibilités pour P, si bien que u est une racine de l'unité.)

Cela prouve que $\mathbf{I}_\infty^0/\mathcal{O}_K^\times$ est compact.

Remarque . — On verra un énoncé plus général que le lemme 1 dans la prochaine leçon. Ce type d'énoncé faisant le lien entre classes d'idèles et classes d'idéaux permet de formuler la théorie du corps de classe de différentes façons.

Par ailleurs, le théorème des unités entraîne que le groupe $\mathcal{O}_K^\times$ est de rang $r_1 + r_2 - 1$.

5. Théorèmes d'approximations

Il existe deux types de théorèmes d'approximation. Il sont dits *faible* et *fort*. Le théorème d'approximation faible suivant est très proche du lemme d'approximation (*i.e.* le théorème chinois).

THÉORÈME 2. — *Soit K un corps. Soit $|.|_1$, $|.|_2$, ..., $|.|_n$ des valeurs absolues non triviales et deux à deux non équivalentes de K. Notons K_1, ..., K_n les complétés de K pour ces valeurs absolues. Alors l'application diagonale*

$$K \longrightarrow \prod_i K_i$$

est d'image dense (pour la topologie produit).

Démonstration. — Le théorème revient à vérifier la chose suivante : Soit $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$; Pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe $\beta \in K$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on ait $|\beta - \alpha_i|_i < \epsilon$. C'est ce que nous allons démontrer.

Il suffit de trouver pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ un élément $\theta_i \in K$ tel que $|\theta_i|_i > 1$ et $|\theta_i|_j < 1$ pour $i \neq j$. En effet, la suite $\theta_i^r/(1 + \theta_i^r)$ tend vers 1 (resp. 0) lorsque r tend vers l'infini pour $|.|_i$ (resp. $|.|_j$, $i \neq j$) ; Si bien que la suite

$$\beta_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i^r}{(1 + \theta_i^r)} \alpha_i$$

tend vers α_i pour $|.|_i$ lorsque r tend vers l'infini. Cela autorise à prendre $\beta = \beta_r$ pour r assez grand.

Sans nuire à la généralité, pour démontrer le théorème il suffit d'établir l'existence d'un élément $\theta \in K$ tel que $|\theta|_1 > 1$ et tel que $|\theta|_i < 1$ $(i > 1)$. Nous allons le montrer par récurrence sur n.

Etudions d'abord le cas $n = 2$. Comme $|.|_1$ et $|.|_2$ ne sont pas équivalentes, il existe α, $\beta \in K$ tels que $\log(|\alpha|_1)/\log(|\alpha|_2)$ soit distinct de $\log(|\beta|_1)/\log(|\beta|_2)$. Par conséquent, lorsque les entiers n et m varient, les signes des nombres réels $m\log(|\alpha|_1) + n\log(|\beta|_1)$ et $m\log(|\alpha|_2) + n\log(|\beta|_2)$ ne sont pas toujours identiques. En posant μ, $\lambda = \alpha^m\beta^n$, pour des valeurs judicieuses des entiers n et m on obtient qu'il existe λ, $\mu \in K$ tels que $|\lambda|_1 < 1$, $|\lambda|_2 \geq 1$, $|\mu|_1 \geq 1$ et $|\mu|_2 < 1$. On pose alors $\theta = \lambda/\mu$.

Lorsque $n \geq 3$, on il existe, par hypothèse de récurrence, $\theta' \in K$ tel que $|\theta'|_1 > 1$ et tel que $|\theta'|_i < 1$ $(n > i > 1)$. De plus il existe, en raison de l'étude du cas $n = 2$, $\theta'' \in K$ tel que $|\theta''|_1 > 1$ et tel que $|\theta''|_n < 1$. On pose alors $\theta = \theta'$ si $|\theta'|_n < 1$, $\theta = \theta'^r\theta''$ si $|\theta'|_n = 1$ (pour r entier assez grand) et $\theta = \theta'^r\theta''/(1 + \theta'^r)$ si $|\theta'|_n > 1$ (pour r entier assez grand). Cela achève de prouver le théorème.

COROLLAIRE . — *Soient deux valeurs absolues non équivalentes $|.|_1$ et $|.|_2$ de K. Elles ne définissent pas la même topologie sur K.*

Démonstration. — Si ces valeurs absolues définissaient la même topologie, les boules de K définies par $|.|_1$ et $|.|_2$ seraient identiques puisqu'on a $|a| < 1$ si et seulement si la suite a^n

tend vers 0. Dans ce cas nos deux valeurs absolues définiraient les même suites de Cauchy, si bien que les corps K_1 et K_2 seraient égaux. Dans ce cas l'adhérence de K dans $K_1 \times K_2$ serait égale au plongement diagonal de K_1 dans $K_1 \times K_1 = K_1 \times K_2$. Ce plongement étant distinct de $K_1 \times K_2$, cela contredit le théorème 2.

Supposons maintenant que K soit un corps de nombres. Soit S un sous-ensemble (éventuellement infini) de Ω_K distinct de Ω_K. Notons $\mathbf{A}_S$ le sous-anneau de $\prod_{v\in S} K_v$ formé par les éléments de la forme $(x_v)_{v\in S}$ avec $x_v \in \mathcal{O}_v$ pour toute place $v \in S$ excepté un nombre fini d'entre elles. C'est donc le produit restreint relativement aux sous-groupes $\mathcal{O}_v$ des corps K_v lorsque v parcourt S. C'est canoniquement un sous-anneau de $\mathbf{A}_K$ (on complète en les places en dehors de S par des zéros). Il est muni de la topologie de produit restreint, qui coïncide avec la topologie induite par la topologie de $\mathbf{A}_K$. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème d'approximation forte.

THÉORÈME 3. — *L'image dans $\mathbf{A}_S$ de l'homomorphisme diagonal $K \longrightarrow \mathbf{A}_S$ est dense.*
Démonstration. — Le théorème se ramène à l'assertion suivante : Soient S' un sous-ensemble fini de S, ϵ un nombre réel > 0 et une famille $(a_v)_{v\in S'}$ avec $a_v \in K_v$; il existe $c \in K$ tel que $|c - a_v|_v < \epsilon$ $(v \in S')$ et $|c|_v \leq 1$ $(v \in S - S')$. Cela revient à dire qu'on a l'inclusion

$$\mathbf{A}_K \subset K + \prod_{v\in S'} B(0,\epsilon) \times \prod_{v\in S-S'} B(0,1) \times \prod_{v\in\Omega_K - S} K_v^\times .$$

Utilisons le fait que $\mathbf{A}_K/K$ est compact. Il existe un système de représentants de ce quotient dans $\mathbf{A}_K$ qui est compact. Ce système de représentant R est donc contenu dans un produit compact de boules fermées $\prod_{v\in\Omega_K} B(0,\delta_v)$ avec $\delta_v = 1$ pour presque tout $v \in \Omega_K$ (rappelons qu'on a $B(0,1) = \mathcal{O}_v$).

Lemme 2. — Il existe un nombre réel C_K ne dépendant que de K vérifiant la condition suivante. Soit $x = (x_v)_{v\in\Omega_K} \in \mathbf{A}_K$ tel que $\prod_v |x_v|_v > C_K$. Alors il existe $y \in K^\times$ tel qu'on ait $|y|_v \leq |x_v|_v$ $(v \in \Omega_K)$.
Démonstration. — Considérons la mesure de Haar μ sur $\mathbf{A}_K$ (définie comme mesure produit sur chacune des coordonnées). Elle définit une mesure de Haar encore notée μ par passage au quotient sur $\mathbf{A}_K/K$. Posons $D_7 = \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} B(0,1) \times \prod_{v\in\Omega_{K,\infty}} B(0,1/7)$. Nous allons voir que la constante

$$C_K = \frac{\mu(\mathbf{A}_K/K)}{\mu(D_7)}$$

convient pour le lemme.

Posons

$$T_7 = \prod_{v\in\Omega_K-\Omega_{K,\infty}} B(0,|x_v|_v) \times \prod_{v\in\Omega_{K,\infty}} B(0,|x_v|_v/7).$$

On a

$$\mu(T_7) = \mu(D_7) \prod_{v\in\Omega_K} |x_v|_v > \mu(D_7)C_K = \mu(\mathbf{A}_K/K).$$

Il existe donc deux éléments distincts u et u' de T_7 congrus modulo K. Posons alors $y = u - u' \in K$. Ce nombre vérifie les inégalités demandées : cela se voit en les places non-archimédiennes en utilisant l'inégalité ultramétrique et en les places archimédiennes grâce à l'inégalité triangulaire.

Revenons à la démonstration du théorème. Appliquons le lemme 2 à un élément $x = (x_v)_{v \in \Omega_K} \in \mathbf{A}_K$ tel que

$$|x_v|_v \geq 1/\delta_v \quad (v \notin S'), \quad |x_v|_v > \epsilon/\delta_v \quad (v \in S') \quad \text{et} \quad \prod_{v \in \Omega_K - S} |x_v| > C_K/(\epsilon^{|S'|} \prod_{v \in S} \delta_v)$$

(cela entraîne $\prod_v |x_v|_v > C_K$) ; Un tel élément x existe puisque S est strictement contenu dans Ω_K. Il existe donc $y \in K^\times$ tel que $|y|_v < \epsilon/\delta_v$ $(v \in S')$ et $|y|_v \leq 1$.

Comme R est un système de représentants de $\mathbf{A}_K/K$, on a $\mathbf{A}_K = R + K$. On a donc les égalités d'ensembles

$$\mathbf{A}_K = y\mathbf{A}_K = yR + yK = yR + K.$$

Comme on a, par construction de y,

$$yR \subset \prod_{v \in S'} B(0, \epsilon) \times \prod_{v \in S - S'} B(0, 1) \times \prod_{v \in \Omega_K - S} K_v^\times,$$

l'approximation cherchée s'ensuit.

Remarque . — Le théorème 3 appliqué au cas où S est fini donne le théorème 2 pour les corps de nombres, d'où la terminologie faible/fort. Bien entendu, le théorème 2 ne se réduit pas au théorème 3, puisqu'il s'applique à des corps quelconques.

L'énoncé du théorème 3 est faux lorsque $S = \Omega_K$, puisque K est discret dans $\mathbf{A}_K$. D'où l'intérêt de considérer toutes les places de K.