VII
Topologie sur les corps

1. Complétion d'un corps

Rappelons brièvement comment on construit le complété d'un corps muni d'une valeur absolue. Cette construction suit le modèle de la construction de $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$.

Soit K un corps muni d'une valeur absolue $|.|$. L'application $(x, y) \mapsto |x - y|$ est une distance sur K. Considérons l'ensemble A formé par les suites de Cauchy à valeurs dans K. Rappelons qu'une suite de Cauchy $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie que pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ il existe un entier $k > 0$ tel que $|u_n - u_m| < \epsilon$ pour tous $n > k$, $m > k$. En particulier, une suite de Cauchy est de valeur absolue bornée.

Lemme 1. — *L'ensemble des suites de Cauchy est un sous-anneau de l'anneau des suites à valeurs dans K.*

Démonstration. — Il faut vérifier que le produit et la somme de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de Cauchy majorées respectivement en valeur absolue par les nombres réels positifs U et V. Vérifions que le produit de ces deux suites est une suite de Cauchy. Cela résulte de l'inégalité triangulaire et de la multiplicativité de la valeur absolue :

$$|u_n v_n - u_m v_m| = |(u_n - u_m)v_n - u_m(v_n - v_m)| \leq V|(u_n - u_m)| + U|(v_n - v_m)|.$$

Le fait que la somme de deux suites de Cauchy est de Cauchy est laissé au lecteur.

Lemme 2. — *Le sous-groupe I de A formé par les suites qui convergent vers* 0 *est un idéal de A.*

Démonstration. — C'est un sous-groupe de A. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite de Cauchy (donc bornée) converge vers 0.

Lemme 3. — *L'anneau A/I est un corps.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que toute suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0 est inversible dans A/I. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une telle suite.

Considérons la suite $(v_n)_{n\geq 0}$, définie par $v_n = u_n$ si $u_n \neq 0$ et $v_n = 1$ sinon. La suite $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ appartient à I. La suite v_n est minorée en valeur absolue par un nombre réel $t > 0$ en valeur absolue car c'est une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0. La suite v_n est inversible dans A. Son inverse est une suite de Cauchy ; cela se voit grâce à l'inégalité

$$|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_m}| = |v_n - v_m||\frac{1}{v_n v_m}| \leq \frac{1}{t^2}|v_n - v_m|.$$

La suite $(u_n v_n - 1)_{n\geq 1}$ appartient à I puisqu'elle est nulle à partir d'un certain rang. La suite $(1/v_n)_{n\geq 0}$ est donc l'inverse de de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans A/I.

Le corps $\hat{K} = A/I$ est le *complété* de K pour la valeur absolue $|.|$. L'application qui à un élément x de K associe la suite constante égale à x définit un plongement (c'est-à-dire un homomorphisme de corps) $K \longrightarrow \hat{K}$. En particulier, c'est une place de K dans $\hat{K}$.

Lemme 4. — La valeur absolue $|.|$ se prolonge en une valeur absolue sur $\hat{K}$. De plus, $\hat{K}$ est complet pour la topologie définie par cette valeur absolue.

Démonstration. — Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy à valeurs dans K. L'application $K \longrightarrow \mathbf{R}$ qui à x associe $|x|$ est continue. La suite $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est donc une suite de Cauchy. Puisque $\mathbf{R}$ est complet, elle converge vers une limite $l \in \mathbf{R}$. Posons $|u| = l$. Cette notation est compatible avec le plongement $K \longrightarrow \hat{K}$. On vérifie sans peine que $x \mapsto |x|$ définit bien une valeur absolue sur $\hat{K}$.

Pour voir que $\hat{K}$ est complet, considérons une suite de Cauchy $(u_k)_{k\geq 0}$ à valeurs dans $\hat{K}$. On peut représenter u_k dans A par une suite de Cauchy $(u_{k,n})_{n\geq 0}$ à valeurs dans K telle que $|u_{k,n} - u_k| < \min(\frac{1}{k}, \frac{1}{n})$ pout tout couple (n, k). La suite $(u_{n,n})_{n\geq 0}$ à valeurs dans K est une suite de Cauchy ; Cela se vérifie grâce à l'inégalité

$$|u_{k,k} - u_{q,q}| \leq |u_{k,k} - u_k| + |u_k - u_q| + |u_q - u_{q,q}|,$$

et au fait que $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite de Cauchy. La suite $(u_{n,n})_{n\geq 0}$ converge donc dans $\hat{K}$. Sa limite est aussi la limite de $(u_k)_{k\geq 0}$ puisqu'on a $|u_{k,k} - u_k| < \frac{1}{k}$.

En utilisant la continuité de la valeur absolue, on vérifie que si la valuation $|.|$ est non archimédienne sur K, il en est de même pour le prolongement de $|.|$ à $\hat{K}$.

2. Le cas des anneaux de valuation discrète

Soit A un anneau de valuation discrète. Notons K son corps des fractions et v la valuation associée. Notons $\mathcal{P}$ l'idéal maximal de A.

Soit a un nombre réel > 1. Rappelons que la valuation définit une valeur absolue, dont la classe d'équivalence ne dépend pas de a, sur K par la formule

$$|x|_a = a^{-v(x)}.$$

Lorsque $A/\mathcal{P}$ est fini on dispose d'une valeur privilégiée pour a. C'est $a = |A/\mathcal{P}|$. On dit que la valeur absolue correspondante est la *valeur absolue normalisée* de K.

Notons $\mathcal{P}$ l'idéal maximal de A. Le *complété $\mathcal{P}$-adique* de A est par définition l'ensemble $A_\mathcal{P}$ formé par les éléments $(a_1, ..., a_n, ...) \in A/\mathcal{P} \times A/\mathcal{P}^2 \times ... \times A/\mathcal{P}^n \times ...$, vérifiant pour tout $n \geq 1$ l'égalité $a_{n+1} + \mathcal{P}^n = a_n$. C'est la *limite projective*

$$A_\mathcal{P} = \varprojlim A/\mathcal{P}^n.$$

C'est un sous-anneau de $A/\mathcal{P} \times A/\mathcal{P}^2 \times ... \times A/\mathcal{P}^n \times ...$

Lemme 5. — L'anneau $A_\mathcal{P}$ est intègre.

Démonstration. — Soient $a = (\alpha_1 + \mathcal{P}, ..., \alpha_n + \mathcal{P}^n, ...)$ et $b = (\beta_1 + \mathcal{P}, ..., \beta_n + \mathcal{P}^n, ...)$ deux éléments de $A_\mathcal{P}$ tels que $ab = 0$. On a $\alpha_n\beta_n \in \mathcal{P}^n$ pour tout n. On a donc $\alpha_{2n} \in \mathcal{P}^n$ ou

$\beta_{2n} \in \mathcal{P}^n$, et donc $\alpha_n \in \mathcal{P}^n$ ou $\beta_n \in \mathcal{P}^n$ pour tout n. Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\alpha_n \notin \mathcal{P}^n$. Alors pour tout $m \geq n$ on a $\alpha_m \notin \mathcal{P}^m$. On donc $\beta_m \in \mathcal{P}^m$ pour tout $m \geq 1$.

On a un homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow A_{\mathcal{P}}$ déduit diagonalement des homomorphismes canoniques $A \longrightarrow A/\mathcal{P}^n$: Cet homomorphisme est donné par

$$a \mapsto (a + \mathcal{P}, a + \mathcal{P}^2, ..., a + \mathcal{P}^n, ...).$$

Lemme 6. — *Cet homomorphisme $A \longrightarrow A_{\mathcal{P}}$ est injectif.*
Démonstration. — Cela résulte immédaitement du fait que $\cap_{n\geq 1}\mathcal{P}^n = \{0\}$.

Le lemme 6 permet donc d'identifier A à un sous-anneau de $A_{\mathcal{P}}$. Notons $K_{\mathcal{P}}$ le corps des fractions de $A_{\mathcal{P}}$. Le corps K s'identifie donc à un sous-corps de $K_{\mathcal{P}}$. Soit $a = (\alpha_1 + \mathcal{P}, ..., \alpha_n + \mathcal{P}^n, ...)$ un élément non nul de $A_{\mathcal{P}}$. La suite d'entiers $(v(\alpha_n))_{n\geq 1}$ est stationnaire (puisque $a \neq 0$ on a $\alpha_n \notin \mathcal{P}^n$ pour n assez grand). Notons sa valeur d'adhérence $v(a)$. La fonction $a \mapsto v(a)$ coïncide avec la valuation v sur A, via le plongement $A \longrightarrow A_{\mathcal{P}}$.

Lemme 7. — *Soient a et b deux éléments non nuls de $A_{\mathcal{P}}$. On a $v(ab) = v(a) + v(b)$ et $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$.*
Démonstration. — Posons $a = (\alpha_1 + \mathcal{P}, ..., \alpha_n + \mathcal{P}^n, ...)$ et $b = (\beta_1 + \mathcal{P}, ..., \beta_n + \mathcal{P}^n, ...)$. Il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $v(\alpha_n) = v(a)$ et $v(\beta_n) = v(b)$. On a donc pour tout entier $n \geq n_0$ les relations $v(\alpha_n\beta_n) = v(\alpha_n)v(\beta_n) = v(a)v(b)$ et $v(\alpha + \beta) = v(\alpha_n + \beta_n) \geq \min(v(\alpha_n, \beta_n))$. On a donc $v(ab) = v(a) + v(b)$ et $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$.

La fonction v se prolonge en une fonction encore notée $v : K^*_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathbf{Z}$ par la formule $v(a/b) = v(a) - v(b)$ pour $(a, b) \in (A_{\mathcal{P}} - \{0\})^2$. Ce prolongement est bien défini car on a $v(ac/bc) = v(ac) - v(bc) = v(a) + v(c) - v(b) - v(c) = v(a/b)$ pour $(a, b, c) \in (A_{\mathcal{P}} - \{0\})^3$. La fonction v sur $K_{\mathcal{P}}$ coïncide avec la valuation v sur K identifié à un sous-corps de $K_{\mathcal{P}}$. Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans la définition.

Proposition 1. — *La fonction v défini une valuation discrète sur $K_{\mathcal{P}}$. L'anneau $A_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$.*
Démonstration. — Il suffit de vérifier que $v : K^*_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathbf{Z}$ est un homomorphisme surjectif de groupes et qu'on a l'inégalité $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$. La surjectivité résulte du fait que v est surjective sur K^*. On a, en utilisant le lemme 7 et la définition de v sur $K_{\mathcal{P}}$,

$$v((a/b)(a'/b')) = v(aa'/bb') = v(aa') - v(bb') = v(a) + v(a') - v(b) - v(b') = v(a/b) + v(a'/b').$$

Cela prouve que v est un homomorphisme de groupes.

Soient $a = (\alpha_1 + \mathcal{P}, ..., \alpha_n + \mathcal{P}^n, ...)$ et $b = (\beta_1 + \mathcal{P}, ..., \beta_n + \mathcal{P}^n, ...)$ deux éléments de $K_{\mathcal{P}} - \{0\}$. Soit $c \in (A_{\mathcal{P}} - \{0\})$ tel que ac et bc soient éléments de $A_{\mathcal{P}}$. On a, en utilisant le lemme 7,

$$v(a + b) = v(ac + bc) - v(c) \geq \min(v(ac), v(bc)) - v(c)$$
$$= \min(v(a), v(b)) + v(c) - v(c) = \min(v(a), v(b)).$$

La fonction v est bien une valuation sur $K_{\mathcal{P}}$.

L'ensemble $\{x \in K_{\mathcal{P}}/v(x) \geq 0\}$ coïncide avec $A_{\mathcal{P}}$ qui est donc un sous-anneau de valuation discrète de $K_{\mathcal{P}}$. L'idéal maximal de $A_{\mathcal{P}}$ est $\{x \in K_{\mathcal{P}}/v(x) \geq 1\}$ qui n'est autre que $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$. Cela achève de démontrer la proposition.

Notons $\hat{K}$ le complété de K pour la valeur absolue $|.|$ associée à l'idéal $\mathcal{P}$. Soit $a = (\alpha_1 + \mathcal{P}, ..., \alpha_n + \mathcal{P}^n, ...) \in A_{\mathcal{P}}$. La suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de K (cela résulte immédiatement des propriétés de compatibilité vérifiées par les α_n). On a donc une application $A_{\mathcal{P}} \longrightarrow \hat{K}$ qui à a associe la classe de $(\alpha_n)_{n\geq 1}$. C'est un homomorphisme d'anneaux. Cet homomorphisme est injectif ; en effet son noyau est constitué par les éléments $a = (\alpha_1 + \mathcal{P}, ..., \alpha_n + \mathcal{P}^n, ...) \in A_{\mathcal{P}}$ tels que pour tout $k \geq$ on ait $\alpha_n \in \mathcal{P}^k$ pour n assez grand et donc $\alpha_n \in \mathcal{P}^k$ pour tout n. Puisque $\hat{K}$ est un corps, cela entraîne que l'homomorphisme $\phi : A_{\mathcal{P}} \longrightarrow \hat{K}$ se prolonge de façon unique en un homomorphisme de corps encore noté $\phi : K_{\mathcal{P}} \longrightarrow \hat{K}$ grâce à la formule $\phi(a/b) = \phi(a)/\phi(b)$.

Proposition 2. — *Toute suite de Cauchy (pour la valeur absolue $\mathcal{P}$-adique) à valeurs dans K converge dans $K_{\mathcal{P}}$. Les corps $\hat{K}$ et $K_{\mathcal{P}}$ sont donc isomorphes.*

Démonstration. — Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de K. Supposons quelle ne converge pas vers 0. Puisque c'est une suite de Cauchy, on a $u_n - u_m \in A$ pour presque n et m assez grands. Il existe donc $v_0 \in K$ tel que $u_n \in v_0 + A$ pour presque tout n. Soit $c \in A - \{0\}$ tel que $cv_0 \in A$. La suite $(cu_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy. Quitte à remplacer un nombre fini de termes par 0, on peut supposer qu'elle est à valeurs dans A. On s'est donc ramené au cas où la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans A.

Soit k un entier ≥ 1. On a $u_n - u_m \in \mathcal{P}^k$ pour m et n assez grands. Il existe donc $v_k \in A$ tel que $u_n \in v_k + \mathcal{P}^k$ pour presque tout n. Posons $v = (v_1 + \mathcal{P}, ..., v_k + \mathcal{P}^k, ...)$. C'est un élément de $A_{\mathcal{P}}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers v.

Par construction un élément de $\hat{K}$ est la limite d'une suite de Cauchy à valeurs dans K. Le plongement $K_{\mathcal{P}} \longrightarrow \hat{K}$ est donc un isomorphisme.

Exemple 1. — Soit p un nombre premier. Lorsque $A = \mathbf{Z}_{(p)}$, l'anneau $A_{\mathcal{P}}$ est noté $\mathbf{Z}_p$. C'est *l'anneau des entiers p-adiques*. Son corps des fractions est le corps $\mathbf{Q}_p$ des *nombres p-adiques.*

Exemple 2. — Soit k un corps. Lorsque $A = k[T]_{(T)}$, l'anneau $A_{\mathcal{P}}$ est noté $k[[T]]$, c'est l'*anneau des séries formelles.*

Les boules ouvertes de centre de $x \in K_{\mathcal{P}}$ pour la distance définie par la valeur absolue coïncident avec les ensembles de la forme $x + \mathcal{P}^n A_{\mathcal{P}}$, avec n entier ≥ 0. Elle sont donc fermées. Tout élément d'une boule ouverte de $K_{\mathcal{P}}$ en est un centre. Le singleton $\{x\}$ est une boule fermée non ouverte de $K_{\mathcal{P}}$.

Soit π une uniformisante de $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire un élément de A tel que $v(\pi) = 1$). C'est aussi une uniformisante de $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de A. La suite $(a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + ... + a_n\pi^n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément noté

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n \in A_{\mathcal{P}}.$$

PROPOSITION 3. — *Soit R un système de représentants de $A/\mathcal{P}$. Tout élément non nul de $K_{\mathcal{P}}$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \pi^n,$$

où les a_n sont éléments de R et $k \in \mathbf{Z}$ avec $a_k \neq 0$.
Démonstration. — Quitte à multiplier par une puissance de π il suffit de d'étudier la proposition pour les éléments de $A_{\mathcal{P}}$.

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(a'_n)_{n\geq 0}$ deux suites de R telles que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\pi^n = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n\pi^n$. On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\pi^n + \mathcal{P}^k = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n\pi^n + \mathcal{P}^k$ pour tout $k \geq 0$. Pour $k = 1$ cela donne $a_0 + \mathcal{P} = a'_0 + \mathcal{P}$ et donc $a_0 = a'_0$. On démontre par une récurrence facile $a_n = a'_n$ pour tout $n \geq 0$. Cela donne l'unicité de l'écriture.

Soit $x = (\alpha_1+\mathcal{P}, ..., \alpha_n+\mathcal{P}^n, ...) \in A_{\mathcal{P}}$. Construisons les a_n par récurrence. Définissons a_0 comme le représentant de $\alpha_0 + \mathcal{P}$ dans R. Définissons a_{n+1} comme le représentant de $(\alpha_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k\pi^k)/\pi^n$ dans R. On vérifie qu'on a $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\pi^n$.

Cela prouve qu'un élément de $A_{\mathcal{P}}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\pi^n$. Le résutat s'ensuit facilement.

Lorsque $A = \mathbf{Z}_p$, on peut choisir pour système de représentants de $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ l'ensemble $\{0, ..., p-1\}$, ou mieux encore l'ensemble constitué de 0 et des racines $(p-1)$-ièmes de l'unité de $\mathbf{Z}_p$. L'anneau $\mathbf{Z}_p$ possède $(p-1)$ racines $(p-1)$-ièmes de l'unité puisque, au moins si $p \neq 2$, les groupes $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \simeq (\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ possèdent tous $(p-1)$ racines $(p-1)$-ièmes de l'unité.

PROPOSITION 4. — *Supposons que le corps résiduel $A/\mathcal{P}$ est fini. Le corps $K_{\mathcal{P}}$ est localement compact pour la topologie définie par la valeur absolue $\mathcal{P}$-adique. L'anneau $A_{\mathcal{P}}$ est un sous-ensemble compact de $K_{\mathcal{P}}$.*
Démonstration. — La deuxième assertion entraîne la première puisque $A_{\mathcal{P}}$ est une boule ouverte. En effet soit $x \in K_{\mathcal{P}}$. La boule ouverte $x + A_{\mathcal{P}}$ est un voisinage de x ; elle est compacte lorsque $A_{\mathcal{P}}$ est compact.

Démontrons que $A_{\mathcal{P}}$ est compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $A_{\mathcal{P}}$ par des ouverts. Supposons qu'on ne puisse pas extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement formé par les U_i. Soit $R = \{r_1, r_2, ..., r_k\}$ un système de représentants de $A/\mathcal{P}$. Chacun des ensembles $r_j + \mathcal{P}$ est recouvert par les ouverts U_i. Il existe donc $a_0 \in R$ tel qu'on ne puisse extraire un sous-recouvrement fini de $a_0 + \mathcal{P}$. Soit π une uniformisante de $A_{\mathcal{P}}$. Les $a_0 + r_j\pi$ forment un sytème de représentants de $(a_0 + \mathcal{P})/\mathcal{P}^2$. Il existe donc $a_1 \in R$ tel qu'on ne puisse extraire un sous-recouvrement fini de $a_0 + a_1\pi + \mathcal{P}^2$. En itérant cette construction, on établit l'existence d'une suite $(a_i)_{i\geq 0}$ d'éléments de R telle que pour tout n la boule ouverte $B_n = a_0 + a_1\pi + A_2\pi^2 + ... + a_n\pi^n + \mathcal{P}^{n+1}$ n'est pas recouverte par un nombre fini de U_i. Considérons l'élément $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\pi^n$ de $A_{\mathcal{P}}$. C'est un centre de toutes les boules B_n. Il appartient à l'un des ouverts U_{i_0}. Il existe donc une boule ouverte contenant α et qui est contenue dans U_{i_0}. Il existe donc $n \geq 0$ tel que la boule B_n soit contenue dans U_{i_0}. Cela contredit notre hypothèse.

3. Extensions de corps complets

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K complet pour la topologie définie par la valuation discrète v. Soit $L|K$ une extension finie et séparable. Notons B la clôture intégrale de A dans L. Notons $\mathcal{Q}$ l'idéal premier non nul de A.

Nous allons voir que la structure topologique de L est imposée par ces données. Cela repose de façon essentielle sur le fait que K est complet.

Proposition 5. — *L'anneau B est un anneau de valuation discrète et L est complet pour la topologie définie par cette valuation.*

Démonstration. — On sait que B est un anneau de Dedekind puisque A est un anneau de Dedekind. Ainsi B n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers, qui sont tous au dessus de $\mathcal{Q}$. C'est donc un anneau principal.

Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de B. Notons w la valuation correspondante. Le couple (L, w) est un K-espace vectoriel qui est aussi un espace topologique. L'anneau de valuation discrète associé à w coïncide avec l'ensemble des éléments x de L tels que x^{-k} ne tende pas vers 0 lorsque $k \to \infty$. Il est donc déterminé par la structure d'espace topologique de L.

Rappelons qu'un *espace vectoriel topologique sur* K est un espace vectoriel E sur K, muni d'une topologie telle que l'addition $E \times E \longrightarrow E$ soit continue et telle que l'application $K \times E \longrightarrow E$ qui à (λ, e) associe λe soit continue (les produits sont munis ici de la topologie produit).

Lemme 8. — Soit E un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie n sur un corps complet K non discret. Soit $(e_i)_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}$ une base de E sur K. La bijection linéaire $K^n \longrightarrow E$ qui à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ associe $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ est un isomorphisme d'espaces topologiques.

En particulier E est isomorphe à K^n comme espace vectoriel topologique.

Démonstration. — Démontrons-le d'abord dans le cas où $n = 1$. L'application $\phi_1 : K \longrightarrow E$ qui à λ associe λe_1 est bijective et continue par hypothèse. Il reste à prouver que sa réciproque est continue c'est-à-dire que l'image d'un ouvert par ϕ_1 est un ouvert. Il suffit pour cela de prouver que l'image de toute boule ouverte de centre 0 est un voisinage de 0 (on utilise l'additivité de ϕ_1). Soit B la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\alpha > 0$ de K. Soit $\lambda_0 \in K$ tel que $|\lambda_0| < \alpha$. Un tel scalaire existe car K n'est pas discret. Soit U un ouvert de E contenant 0 mais pas $\lambda_0 e_1$ (il en existe puisque E est séparé). Considérons l'application $\phi : K \times E \longrightarrow E$ qui à (λ, e) associe λe. Elle est continue par hypothèse. L'image réciproque de U par ϕ est un ouvert contenant $(0,0)$. Elle contient donc un ouvert de la forme $B' \times W$, où B' est une boule ouverte de K de centre 0 et où W est un ouvert de E contenant 0. L'ensemble $V = \phi(B' \times W)$ est un ouvert de E puisque c'est une réunion d'ouverts. Il contient 0 mais pas $\lambda_0 e_1$. De plus B' et donc aussi V sont stables par multiplication par les scalaires de valeur absolue ≤ 1. Vérifions qu'on a $V \subset \phi_1(B)$ c'est-à-dire $\phi_1^{-1}(V) \subset B$, ce qui achèvera la démonstration. Soit un élément de V s'écrit sous la forme λe_1, avec $\lambda \in K$. Comme V est stable par multiplication par les scalaires de valeur absolue ≤ 1 et ne contient pas $\lambda_0 e_1 = (\lambda_0/\lambda)\lambda e_1$, on a $|\lambda_0/\lambda| > 1$ et donc $|\lambda| < \alpha$ si bien qu'on a $\lambda = \phi_1^{-1}(\lambda e_1) \in B$.

Démontrons maintenant le lemme par récurrence sur n. On vient de voir le cas où $n = 1$. Considérons l'hyperplan H de E engendré par les $(n-1)$ premiers vecteurs de la base. Par hypothèse de récurrence, il est isomorphe à K^{n-1} comme espace topologique. Comme K est complet, on en déduit que K^{n-1} et donc H sont complets. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans H qui converge vers $x \in E$. La suite de terme général

$$\frac{|x_n|^{1/2}}{(1+|x_n|)}x_n = \frac{|x_n|^{1/2}}{(1+|x_n|)}x + \frac{|x_n|^{1/2}}{(1+|x_n|)}(x_n - x)$$

converge vers 0, puisque les deux termes du membre de droite convergent vers 0. Il s'ensuit que la suite de terme général $|x_n|$ est bornée. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc à valeurs dans un compact, si bien qu'elle admet une valeur d'adhérence dans H qui ne peut être que x. On a donc $x \in H$. Cela prouve que H est fermé dans E et donc que E/H est un espace séparé. La surjection canonique $E \longrightarrow E/H$ est donc continue. Notons D la droite de E engendrée par e_n. C'est un espace séparé puisque $\{0\}$, qui est l'intersection des fermés H et D, est fermé dans E. La droite D est donc isomorphe à K comme espace topologique d'après l'étude du cas $n = 1$. Pour prouver que l'isomorphisme d'espaces vectoriels $E \simeq H \times D$ (déduit de la somme directe), est un isomorphisme d'espaces topologiques il suffit de vérifier que c'est une application continue (la continuité de l'inverse est claire). Comme H est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel topologique, à un produit de $n-1$ espaces de dimension 1 (tous isomorphes à K, et donc séparés), l'espace E est linéairement isomorphe à un produit de n espaces séparés de dimension 1. Pour prouver que cet isomorphisme est continu il suffit de vérifier que la projection sur chacun des facteurs de dimension 1 est continue. Cela résulte de l'étude du cas $n = 1$ en tenant compte du fait que chacun de ces facteurs est séparé. Cela achève de prouver le lemme.

Revenons à la démonstration de la proposition. Le K-espace vectoriel L muni de sa topologie est un espace vectoriel topologique, puisque l'addition et la multiplication sont continues dans L. Le corps K étant complet, il n'est pas discret puisque 0 n'est pas isolé dans K. Par application du lemme 8, L muni de la topologie métrique (et donc séparée) définie par la distance associée à w est isomorphe à K^n comme espace topologique. La topologie de L ainsi considérée est donc indépendante de w.

Il n'y a donc qu'une seule valuation discrète sur L à équivalence près qui prolonge v (plus précisément dont la topologie associée prolonge la topologie associée à v) et donc un seul idéal premier de B divisant $\mathcal{Q}$.

Remarques. — L'hypothèse de complétude est nécessaire dans l'énoncé du lemme 8, comme le montre le cas où $K = \mathbf{Q}$ et où $E = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\sqrt{2} \subset \mathbf{R}$ (la topologie de E est induite par celle de $\mathbf{R}$). En effet, dans ce cas $\mathbf{Q}$ est partout dense dans E mais $\mathbf{Q}$ n'est pas partout dense dans $\mathbf{Q}^2$ pour la topologie produit. On n'a donc pas d'isomorphisme topologique entre E et $\mathbf{Q}^2$.

L'énoncé du lemme 8 est encore valable si $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Il en résulte qu'il n'existe qu'une seule extension à $\mathbf{C}$ d'une valeur absolue de $\mathbf{R}$.

La démonstration du lemme 8 serait légèrement plus simple si on avait tenu compte du fait que la topologie de E est donnée par une distance dans l'application qui nous intéresse (*i.e.* $E = L$).

Corollaire 1. — *On a, en notant respectivement e et f l'indice de ramification et le degré résiduel en l'idéal premier $\mathcal{P}$ de B qui divise $\mathcal{Q}$,*

$$[L:K] = ef.$$

Démonstration. — C'est un cas particulier de la formule générale pour les anneaux de Dedekind reliant degré de l'extension d'une part au degré résiduel et à l'indice de ramification d'autre part (voir la leçon sur les études locales des extensions de corps), en tenant compte du fait qu'il n'existe qu'un seul idéal premier de B qui divise $\mathcal{Q}$.

Corollaire 2. — *Deux éléments de L conjugués sur K ont même valuation.*
Démonstration. — On peut supposer, quitte à agrandir L, que l'extension $L|K$ est galoisienne. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Notons w l'unique valuation de L qui prolonge v. On obtient une autre valuation w' de L qui prolonge v en posant $w' = w \circ \sigma$ (en effet w' vérifie les conditions additives et multiplicatives demandées au valuations). Cette dernière n'est autre que w en raison de l'unicité de la valuation de L qui prolonge v (proposition 5). Soit $x \in L$. Les conjugués de x sont de la forme $\sigma(x)$ pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Ils sont donc tous de même valuation.

Corollaire 3. — *L'unique valuation w de L qui prolonge v est donnée par la formule*

$$w(x) = \frac{1}{f} v(\mathrm{N}_{L/K}(x)).$$

Démonstration. — On peut se ramener au cas où l'extension $L|K$ est galoisienne. En effet, soit une extension finie $M|L$ telle que $M|K$ soit galoisienne. La formule du corollaire 3 se déduit des formules relatives aux extensions galoisiennes $M|K$ et $M|L$.

Supposons donc que $L|K$ soit galoisienne. D'après le corollaire 2, on a, pour tout $x \in L$,

$$w(x) = \frac{1}{[L:K]} w(\mathrm{N}_{L/K}(x)) = \frac{1}{fe} w(\mathrm{N}_{L/K}(x)).$$

Soit π une uniformisante de $\mathcal{Q}$. On a $v(\pi) = 1$, $w(\pi) = e$ (puisque $(\pi)B = \mathcal{Q}B = \mathcal{P}^e$) et $v(\mathrm{N}_{L/K}(\pi)) = [L:K] = ef$. On en déduit la formule cherchée pour $x = \pi$. La formule générale s'en déduit facilement en écrivant $\mathrm{N}_{L/K}(x)$ comme une puissance de π multipliée par une unité de A.

4. Extensions de complétions d'anneaux de valuation discrète

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K. Soit L/K une extension finie et séparable de degré n. Notons $\mathcal{Q}$ l'idéal premier non nul de A et B la clôture intégrale de A dans L. Pour chaque idéal premier $\mathcal{P}$ de B divisant $\mathcal{Q}$ notons $K_{\mathcal{Q}}$ et $L_{\mathcal{P}}$ les complétés de K et L pour les valeurs absolues associées à $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$.

Proposition 6. — *L'extension $L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}$ est de degré $e_{\mathcal{P}}f_{\mathcal{P}}$. Il existe une unique valuation de $L_{\mathcal{P}}$ qui prolonge la valuation de $K_{\mathcal{Q}}$.*

On a un isomorphisme continu de $K_{\mathcal{Q}}$-espaces vectoriels ϕ :

$$L \otimes_K K_{\mathcal{Q}} \simeq \prod_{\mathcal{P}|\mathcal{Q}} L_{\mathcal{P}},$$

déduit des injections canoniques diagonales $L \longrightarrow \prod_{\mathcal{P}} L_{\mathcal{P}}$ et $K_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \prod_{\mathcal{P}|\mathcal{Q}} L_{\mathcal{P}}$.

Démonstration. — Les deux premières assertions résultent directement de ce qui précède (proposition 5 et ses corollaires).

Pour prouver la dernière assertion, remarquons que l'image diagonale de L dans $\prod_{\mathcal{P}} L_{\mathcal{P}}$ est dense d'après le lemme d'approximation. Par conséquent l'image de ϕ est dense dans $\prod_{\mathcal{P}} L_{\mathcal{P}}$. Comme $L \otimes_K K_{\mathcal{Q}}$ est isomorphe à $K_{\mathcal{Q}}^{[L:K]}$ en tant que $K_{\mathcal{Q}}$-espace vectoriel topologique (lemme 8), c'est un espace complet. Son image par ϕ est un espace complet, donc fermé, car ϕ est une application continue. Elle est donc égale à $\prod_{\mathcal{P}|\mathcal{Q}} L_{\mathcal{P}}$. L'application $K_{\mathcal{Q}}$-linéaire ϕ est surjective car d'image dense. Elle est donc bijective puisque ses espaces de départ et d'arrivée sont tous les deux des $K_{\mathcal{Q}}$-espaces vectoriels de dimension $[L : K]$.

Corollaire 1. — *Supposons que l'extension $L|K$ soit galoisienne. Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de L au dessus de $\mathcal{Q}$. Notons $D_{\mathcal{P}}$ le groupe de décomposition en $\mathcal{P}$ de l'extension $L|K$. Alors l'extension $L_{\mathcal{P}}|K_{\mathcal{Q}}$ est galoisienne. Tout élément σ de $D_{\mathcal{P}}$ se prolonge par continuité en un élément $\hat{\sigma}$ de $\mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}})$. L'application $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ est un isomorphisme de groupes*

$$D_{\mathcal{P}} \simeq \mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}).$$

Démonstration. — Montrons d'abord que $L_{\mathcal{P}}|K_{\mathcal{Q}}$ est galoisienne. Montrons que tous les conjugués de $b \in L_{\mathcal{P}}$ sur $K_{\mathcal{Q}}$ sont dans $L_{\mathcal{P}}$. Quite à multiplier b par un élément de $\mathcal{O}_K$, on peut supposer que $b \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. Posons $b = (b_1 + \mathcal{P}, b_2 + \mathcal{P}^2, ...)$ avec $b_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe $P_n \in \mathcal{O}_K[X]$ unitaire, scindé sur L de degré $d = [L : K]$ qui annule b_n. En effet, $L|K$ est galoisienne. Posons $P_n(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_{i,n})$, avec $\alpha_{1,n} = b_n$. La suite $(\alpha_{i,n})_{n\geq 1}$ est à valeur dans $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$, qui est compact. Elle admet une valeur d'adhérence α_i dans $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. Quitte à prendre des suites extraites successives, la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ a pour limite $\prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}[X]$. On a $\alpha_1 = b$. Comme P_n est dans $K[X]$, la limite de la suite est dans $K_{\mathcal{Q}}[X]$. Elle admet b comme racine. Donc tout conjugué de b sur $K_{\mathcal{Q}}$ est dans $L_{\mathcal{P}}$.

Un élément de $D_{\mathcal{P}}$ est une application continue $L \longrightarrow L$ pour la topologie $\mathcal{P}$-adique puisqu'il laisse stable $\mathcal{P}$ et donc toute boule ouverte. L'application $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ est un homomorphisme injectif de groupes puisque L est un sous-corps de son complété. Comme les ordres des groupes $D_{\mathcal{P}}$ et $\mathrm{Gal}(L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}})$ sont égaux, il s'agit bien d'un isomorphisme.

Corollaire 2. — *Soit $x \in L$. Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme du K-espace vectoriel L qui à y associe xy est égal au produit pour $\mathcal{P}$ idéal premier divisant $\mathcal{Q}$*

des polynômes caractéristiques des endomorphismes des $K_{\mathcal{Q}}$-espaces vectoriels $L_{\mathcal{P}}$ qui à y associe xy.

En particulier on a

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \sum_{\mathcal{P}|\mathcal{Q}} \mathrm{Tr}_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}(x)$$

et

$$\mathrm{N}_{L/K}(x) = \prod_{\mathcal{P}|\mathcal{Q}} \mathrm{N}_{L_{\mathcal{P}}/K_{\mathcal{Q}}}(x).$$

Démonstration. — Cela résulte de la comparaison des polynômes caractéristiques de l'application $y \mapsto xy$ sur les $K_{\mathcal{Q}}$-espaces vectoriels figurant dans l'isomorphisme établi par la proposition 6.

Proposition 7. — *L'homomorphisme canonique de $A_{\mathcal{Q}}$-modules*

$$B \otimes_A A_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \prod_{\mathcal{P}|\mathcal{Q}} B_{\mathcal{P}}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. — Ces groupes sont des $A_{\mathcal{Q}}$-modules libres de rang $[L : K]$. Il suffit donc de prouver la surjectivité. Il suffit de prouver cette surjectivité pour la réduction modulo $\mathcal{Q}$ (en effet toute famille d'éléments d'un $A/\mathcal{Q}$-module libre M dont la réduction modulo $\mathcal{Q}$ est une base de $M/\mathcal{Q}$ est elle-même une base de M). Cela résulte de la formule

$$B\mathcal{Q} \simeq \prod_{\mathcal{P}|\mathcal{Q}} \mathcal{P}^{e_{\mathcal{P}}}.$$