Université de Sciences et Technologie de Chine — Algèbre
Classe sino-française — Année 2024-25

EXAMEN du 9 mai 2025

Durée : 3h

Les notes de cours sont autorisées. Les parties ne sont pas indépendantes.

I

Soit K un corps (commutatif). Soit A une K-algèbre commutative unitaire. Soit M un A-module. Une K-*dérivation* de A dans M est une application K-linéaire $\delta : A \to M$ telle que, pour tous a, $b \in A$, on a $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$.

1. Montrer que $A \otimes_K A$, muni de la multiplication $(x \otimes_K y).(x' \otimes_K y') = (xx') \otimes_K (yy')$, est une K-algèbre commutative unitaire.
2. Montrer que $m_A : A \otimes_K A \to A$ qui à $x \otimes_K y$ associe xy est un morphisme surjectif de K-algèbres. Notons $\mathcal{I}$ son noyau.
3. Montrer que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un A-module. On pose $\Omega^1_{A/K} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.
4. Montrer que cette structure de A-module se déduit de l'une quelconque des structures de A-module de $A \otimes_K A$ donnée par $a.(b \otimes_K c) = (ab) \otimes_K c$ et par $a.(b \otimes_K c) = b \otimes_K (ac)$.
5. Montrer que $\mathcal{I}$ est engendré comme A-module par $\{1 \otimes_K x - x \otimes_K 1 | x \in A\}$.
6. Notons $d : A \to \Omega^1_{A/K}$ qui à x associe la classe de $1 \otimes_K x - x \otimes_K 1$. On pose $dx = d(x)$. Montrer qu'on a $d(xy) = y\,dx + x\,dy$.
7. Soit $S \in A$ un ensemble multiplicatif. Montrer que les $S^{-1}A$-modules $S^{-1}\Omega^1_{A/K}$ et $\Omega^1_{S^{-1}A/K}$ sont isomorphes (où S^{-1} est la localisation). Pour $x \in A$ et $s \in S$, quelle est l'image de $d(x/s)$ dans $S^{-1}\Omega^1_{A/K}$?
8. Montrer que les K-dérivations de A dans M sont en bijection avec $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/K}, M)$.
9. En quel sens Ω^1 est-il un foncteur ?

II

Soit M un A-module. Pour i entier ≥ 0, rappelons que $\wedge^i M = \mathrm{H}_0(\mathcal{S}_\mathrm{i}, \mathrm{M}^{\otimes_\mathrm{A} \mathrm{i}})$ où le groupe symétrique $\mathcal{S}_i$ agit sur le A-module $M^{\otimes_A i}$ par $\sigma(x_1 \otimes_A ... \otimes_A x_i) = \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes_A ... \otimes_A x_{\sigma(i)}$ (où $\sigma \in \mathcal{S}_i$ et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ). On note $x_1 \wedge ... \wedge x_i$ l'image de $x_1 \otimes_A ... \otimes_A x_i$ dans $\wedge^i M$. On pose $\wedge^\cdot M = \oplus_{i \in \mathbf{N}} \wedge^i M$. C'est l'*algèbre extérieure* de M.

Rappelons qu'une *antidérivation* $\delta = \oplus_i d^i : \wedge^\cdot M \to \wedge^\cdot M$ est une application K-linéaire telle que $d^i : \wedge^i M \to \wedge^{i+1} M$ vérifie, pour tout $x \in \wedge^k M$ et tout $y \in \wedge^{i-k} M$, la relation $d^i(x \wedge y) = d^k x \wedge y + (-1)^k x \wedge d^{i-k} y$.

Posons $M = \Omega^1_{A/K}$ et, pour $i \geq 0$, $\Omega^i_{A/K} = \wedge^i \Omega^1_{A/K}$ et $\Omega_{A/K} = \wedge \Omega^1_{A/K}$. Soit $d : A \to \Omega^1_{A/K}$ (construit dans la partie **I**). On dit que l'antidérivation *prolonge* d si $d^0 = d$. On dit δ est *carré nul* si $\delta \circ \delta = 0$. Si on a un prolongement de carré nul, le complexe obtenu est le *complexe de De Rham* :

$$A = \Omega^0_{A/K} \to \Omega^1_{A/K} \to \Omega^2_{A/K} \to ...$$

1. Montrer que si deux antidérivations de carré nul prolongent d, elles sont égales.
2. Soit $u : A \otimes_K A \to \Omega^2_{A/K}$ défini par $u(x \otimes_K y) = dy \wedge dx$. Montrer que $u(\mathcal{I}^2) = 0$.
3. En déduire qu'il existe $d^1 : \Omega^1_{A/K} \to \Omega^2_{A/K}$ tel que $d^1 \circ d = 0$, et, pour tout $a \in A$, $\omega \in \Omega^1_{A/K}$ on a la relation $d^1(a\omega) = da \wedge \omega + ad^1\omega$.
4. En déduire qu'il existe une unique antidérivation sur $\Omega_{A/K}$ de carré nul qui prolonge d.
5. Montrer que le complexe de De Rham est de longueur finie lorsque A est une algèbre de type fini sur K.

III

Soit n un entier ≥ 1. Posons $A = K[X_1, ..., X_n]$. Pour $I = \{i_1, ...i_k\} \subset \{1, ..., n\}$ (avec $i_1 < ... < i_k$), posons $dX_I = dX_{i_1} \wedge ... \wedge dX_{i_k}$. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, posons $n(I, i) = |\{j \in I/j < i\}|$.

1. Montrer que $A \otimes_K A$ est une K-algèbre isomorphe à $K[Y_1, ..., Y_n, Z_1, ..., Z_n]$. Quelle est l'image de $\mathcal{I}$ dans $K[Y_1, ..., Y_n, Z_1, ..., Z_n]$?
2. En déduire que $\Omega_{A/K}$ est un A-module libre de base $(dX_I)_{I \subset \{1,...,n\}}$.
3. Le complexe de De Rham est-il de longueur finie ?
4. Pour $P \in A$, posons $dP = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_i$. Pour i entier ≥ 0, montrer qu'on a $d(PdX_I) = \sum_{i \in I} (-1)^{n(I,i)} \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_{I \cup \{i\}}$
5. Si $K = \mathbf{C}$ et $n = 2$, montrer que l'homologie du complexe de De Rham est nulle.
6. L'homologie du complexe de De Rham est-elle nulle pour K et n quelconques ?

IV

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété algébrique sur le corps K. Comment construire un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules Ω^1_X tel que, pour tout ouvert affine U, on a $\Omega^1_X(U) = \Omega^1(\mathcal{O}_X(U))$. Est-il unique ?