Université de Sciences et Technologie de Chine — Algèbre
Classe sino-française — Année 2024-25

EXAMEN du 4 juin 2025

Durée : 3h

Les notes de cours sont autorisées. Les parties ne sont pas indépendantes.

I

Soit K un corps algébriquement clos.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_2(K)$ peut être muni d'une structure de variété algébrique.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_2(K)$ est une variété algébrique affine.
3. Considérer $f : \mathrm{GL}_2(K) \to \mathbf{P}^1(K)$ donné par $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a/c$. Montrer que c'est un morphisme de variétés algébriques.
4. Pour $x \in \mathbf{P}^1(K)$, $f^{-1}(x)$ s'appelle la *fibre en* x. Montrer que c'est une varété algébrique.
5. Montrer que pour x, $y \in \mathbf{P}^1(K)$, les fibres en x et en y sont isomorphes.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{P}^1(K)$, $f^{-1}(x)$ (la *fibre en* x) est une variété algébrique affine.
7. La droite projective $\mathbf{P}^1(K)$ est une variété algébrique. Mais est-elle une variété algébrique affine ?
8. L'image d'une variété algébrique affine par un morphisme de variété algébrique est-elle une variété algébrique affine ?

II

Soit A un anneau commutatif. Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & M_4 & \to & M_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ N_1 & \to & N_2 & \to & N_3 & \to & N_4 & \to & N_5 \end{array}$$

un diagramme commutatif de morphismes de A-modules. On suppose que les lignes sont des suites exactes.

1. Si f_1 est surjective et f_2 et f_4 sont injectives montrer que f_3 est injective.
2. Si f_5 est injective et f_2 et f_4 sont surjectives montrer que f_3 est surjective.
3. Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, montrer que f_3 est un isomorphisme.
4. Cela est-il encore vrai si le diagramme est un diagramme de groupes (non-nécessairement abéliens) ?

III

Posons $H = \{\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Z})\}$. C'est le *groupe d'Heisenberg entier*. On pose $[u, v] = uvu^{-1}v^{-1}$. On pose $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$.

Posons $A = \mathbf{Z}[T]$.

1. Calculer $[X, Y]$, $[X, Z]$ et $[Y, Z]$.
2. Pour i, $j \in \mathbf{Z}$, déterminer $[X^i, Y^j]$ en fonction de i, j et Z.
3. Soit F_3 le groupe libre sur trois générateurs. Montrer que H est un quotient de F_3.
4. Déterminer le groupe $[H, H]$ engendré par $\{[u, v]/u, v \in H\}$ et l'abélianisé de $H^{\mathrm{ab}} = H/[H, H]$.
5. Montrer que l'application $T^i[h] = [hz^i]$ fait de $\mathbf{Z}[H]$ un A-module.
6. Le A-module $\mathbf{Z}[H]$ est-il projectif ? Libre ?
7. Déterminer le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(H, \mathbf{Z})$.
8. Déterminer le groupe d'homologie $\mathrm{H}_1(H, \mathbf{Z})$.
9. Déterminer le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathbf{Z})$.