Université de Sciences et Technologie de Chine — Algèbre
Classe sino-française — Année 2024-25

Corrigé de l'EXAMEN du 9 mai 2025

I

Soit K un corps (commutatif). Soit A une K-algèbre commutative unitaire. Soit M un A-module. Une K-*dérivation* de A dans M est une application K-linéaire $\delta : A \to M$ telle que, pour tous a, $b \in A$, on a $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$.

1. Montrer que $A \otimes_K A$, muni de la multiplication $(x \otimes_K y).(x' \otimes_K y') = (xx') \otimes_K (yy')$, est une K-algèbre commutative unitaire.

C'est évidemment un K-espace espace vectoriel. La multiplication ainsi définie est associative et admet $1 \otimes_K 1$ comme élément unité.

2. Montrer que $m_A : A \otimes_K A \to A$ qui à $x \otimes_K y$ associe xy est un morphisme surjectif de K-algèbres. Notons $\mathcal{I}$ son noyau.

Cette application est bien définie et K-linéaire, puisque $(x, y) \mapsto xy$ est K-bilinéaire et se factorise donc par le produit tensoriel, par propriété universelle de $\otimes_K$. La surjectivité est immédiate puisque l'image de $x \otimes_K 1$ est x. Il est immédiat que l'image d'un produit est le produit des images et que l'image de $1 \otimes_K 1$ est 1.

3. Montrer que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un A-module. On pose $\Omega^1_{A/K} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

D'après 2., on a un isomorphisme de K-algèbres : $A \otimes_K A \to A \otimes_K A/\mathcal{I} \simeq A$. Comme $\mathcal{I}$ est un $A \otimes_K A$-module, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un $A \otimes_K A/\mathcal{I} \to A$-module.

4. Montrer que cette structure de A-module se déduit de l'une quelconque des structures de A-module de $A \otimes_K A$ donnée par $a.(b \otimes_K c) = (ab) \otimes_K c$ et par $a.(b \otimes_K c) = b \otimes_K (ac)$.

Cela résulte du fait que $a \otimes_K x - ax \otimes_K 1 + x \otimes_K a - 1 \otimes_K ax = (1 \otimes_K x - x \otimes_K 1)(1 \otimes_K a - a \otimes_K 1) \in \mathcal{I}^2$.

5. Montrer que $\mathcal{I}$ est engendré comme A-module par $\{1 \otimes_K x - x \otimes_K 1 | x \in A\}$.

Les élément de la forme $1 \otimes_K x - x \otimes_K 1$ sont dans le noyau de m. Notons $\mathcal{J}$ le A-module qu'ils engendrent. Montrons $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

Soit $\sum_{x,y} \lambda_{x,y} x \otimes y \in \mathcal{I}$. On a alors $\sum_{x,y} \lambda_{x,y} xy = 0$. On a donc $\sum_{x,y} \lambda_{x,y} x \otimes y = \sum_{x,y} \lambda_{x,y}(x \otimes y - xy \otimes 1) = \sum_{x,y} \lambda_{x,y} x.(1 \otimes y - y \otimes 1) \in \mathcal{I}$.

6. Notons $d : A \to \Omega^1_{A/K}$ qui à x associe la classe de $1 \otimes_K x - x \otimes_K 1$. On pose $dx = d(x)$. Montrer qu'on a $d(xy) = y\,dx + x\,dy$.

On a $(xy) \otimes 1 - 1 \otimes (xy) = y.(x \otimes 1 - 1 \otimes x) + x.(y \otimes 1 - 1 \otimes y)$, d'où le résultat.

7. Soit $S \in A$ un ensemble multiplicatif. Montrer que les $S^{-1}A$-modules $S^{-1}\Omega^1_{A/K}$ et $\Omega^1_{S^{-1}A/K}$ sont isomorphes (où S^{-1} est la localisation). Pour $x \in A$ et $s \in S$, quelle est l'image de $d(x/s)$ dans $S^{-1}\Omega^1_{A/K}$?

Le noyau de l'application $S^{-1}A \otimes_K S^{-1}A \to S^{-1}A$ qui à $x \otimes_K y$ associe xy est $S^{-1}\mathcal{I}$. (En effet on peut multiplier un élément du noyau par un multiple commun dans S aux dénominateurs de tous ses termes, et on obtient un élément de $\mathcal{I}$.) On a alors $S^{-1}\Omega^1_{A/K} = S^{-1}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \simeq S^{-1}\mathcal{I}/S^{-1}\mathcal{I}^2 = \Omega^1_{S^{-1}A/K}$. L'image de $d(x/s)$ est $(dx)/s - xds/s^2$.

8. Montrer que les K-dérivations de A dans M sont en bijection avec $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/K}, M)$.

Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/K}, M)$. Alors $\phi \circ d$ est une K-dérivation. Réciproquement, soit δ une K-dérivation de A dans M. Considérons l'application $\mathcal{I} \to M$ qui à $1 \otimes_K x - x \otimes_K 1$ associe $\delta(x)$. Elle est nulle sur $\mathcal{I}^2$. On obtient alors un morphisme $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to M$ qui est A-linéaire. Ces constructions sont réciproques l'une de l'autre, si bien qu'on une bijection.

9. En quel sens Ω^1 est-il un foncteur ?

C'est un foncteur de la catégorie des K-algèbres vers la catégorie des K-espaces vectoriels. En effet, soit f un morphisme de K-algèbres $A \to B$. On en déduit $f \otimes_K f$ un morphisme de K-algèbres $A \otimes_K A \to B \otimes_K B$. On a alors $m_B \circ (f \otimes_K f)(\mathcal{I})) = 0$. Ainsi on obtient une application K-linéaire $\Omega^1_{A/K} \to \Omega^1_{B/K}$.

Mais, c'est mieux. Considérons la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les couples (A, M), où A est une K-algèbre et M est un A-module et les morphismes sont de la forme (f, ϕ) : $(A, M) \to (B, N)$ où f est un morphisme de K-algèbres $A \to B$ (si bien que N est un A-module) et ϕ est un morphisme de A-modules. Alors Ω^1 est un foncteur de la catégorie des K-algèbres vers $\mathcal{C}$.

II

Soit M un A-module. Pour i entier ≥ 0, rappelons que $\wedge^i M = \mathrm{H}_0(\mathcal{S}_\mathrm{i}, \mathrm{M}^{\otimes_\mathrm{A} \mathrm{i}})$ où le groupe symétrique $\mathcal{S}_i$ agit sur le A-module $M^{\otimes_A i}$ par $\sigma(x_1 \otimes_A ... \otimes_A x_i) = \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes_A ... \otimes_A x_{\sigma(i)}$ (où $\sigma \in \mathcal{S}_i$ et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ). On note $x_1 \wedge ... \wedge x_i$ l'image de $x_1 \otimes_A ... \otimes_A x_i$ dans $\wedge^i M$. On pose $\wedge^{\cdot} M = \oplus_{i \in \mathbf{N}} \wedge^i M$. C'est l'*algèbre extérieure* de M.

Rappelons qu'une *antidérivation* $\delta = \oplus_i d^i : \wedge^{\cdot} M \to \wedge^{\cdot} M$ est une application K-linéaire telle que $d^i : \wedge^i M \to \wedge^{i+1} M$ vérifie, pour tout $x \in \wedge^k M$ et tout $y \in \wedge^{i-k} M$, la relation $d^i(x \wedge y) = d^k x \wedge y + (-1)^k x \wedge d^{i-k} y$.

Posons $M = \Omega^1_{A/K}$ et, pour $i \geq 0$, $\Omega^i_{A/K} = \wedge^i \Omega^1_{A/K}$ et $\Omega_{A/K} = \wedge \Omega^1_{A/K}$. Soit d : $A \to \Omega^1_{A/K}$ (construit dans la partie **I**). On dit que l'antidérivation *prolonge* d si $d^0 = d$. On dit δ est *carré nul* si $\delta \circ \delta = 0$. Si on a un prolongement de carré nul, le complexe obtenu est le *complexe de De Rham* :

$$A = \Omega^0_{A/K} \to \Omega^1_{A/K} \to \Omega^2_{A/K} \to ...$$

1. Montrer que si deux antidérivations de carré nul prolongent d, elles sont égales.

Montrons que δ est uniquement déterminé par d. On a, pour y, x_1, ..., $x_k \in A$, $\delta(y\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_k) = dy \wedge\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_k$. Comme $\Omega^k_{A/K}$ est engendré par les éléments de la forme $dx_1 \wedge ... \wedge dx_k$, δ est uniquement déterminée.

2. Soit $u : A \otimes_K A \to \Omega^2_{A/K}$ défini par $u(x \otimes_K y) = dy \wedge dx$. Montrer que $u(\mathcal{I}^2) = 0$.

On a, pour x, y, $a \in A$, la formule $u(ax \otimes_K y - x \otimes_K ay) = dy \wedge d(ax) - d(ay) \wedge dx = d(xy) \wedge da$. On en déduit que, pour tout $\beta \in A \otimes_K A$, on a $((a \otimes_K 1 - 1 \otimes_K a)\beta) = d(m(\beta)) \wedge da$. Cette quantité est donc nulle si $\beta \in \mathcal{I}$. Comme $\mathcal{I}^2$ est engendré par $\{1 \otimes_K a - a \otimes_K 1 | x \in A\}$, u est nulle sur $\mathcal{I}^2$.

3. En déduire qu'il existe $d^1 : \Omega^1_{A/K} \to \Omega^2_{A/K}$ tel que $d^1 \circ d = 0$, et, pour tout $a \in A$, $\omega \in \Omega^1_{A/K}$ on a la relation $d^1(a\omega) = da \wedge \omega + a d^1 \omega$.

Comme $\Omega^1_{A/K} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ et que $u(\mathcal{I}^2) = 0$. On a défini d^1 par passage au quotient. On a alors $u(a \otimes_K 1 - 1 \otimes_K a)(b \otimes_K 1)) = db \wedge da$. On a donc $d^1 \circ d^0 = 0$. Montrons maintenant l'autre formule. Il suffit de la vérfier pour les éléments de la forme $\omega = b\,da$ (générateurs de $\Omega^1_{A/K}$). Pour $c \in A$, on obtient $d^1(c\omega) = dc \wedge \omega + cd^1\omega$.

4. En déduire qu'il existe une unique antidérivation sur $\Omega_{A/K}$ de carré nul qui prolonge d.

On a déjà vu l'unicité. Pour $k \geq 1$ et x_1,..., $x_k \in \Omega^1_{A/K}$, on pose $d^k(\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1}\omega_1 \wedge ... \wedge d\omega_i \wedge ... \wedge \omega_k$.

On vérife que cette quantité est nulle si $\omega_i = \omega_j$ si $i \neq j$. On a de plus, pour $a \in A$, $d^k(\omega_1 \wedge ... \wedge a\omega_i \wedge ... \wedge \omega_k)$ est indépendant de i. On peut vérifier la relation $d^i(x \wedge y) = d^k x \wedge y + (-1)^k x \wedge d^{i-k} y$ directement.

5. Montrer que le complexe de De Rham est de longueur finie lorsque A est une algèbre de type fini sur K.

Supposons qu'il existe $x_1, ..., x_n \in A$ tels que $A = K[x_1, ..., x_n]$. Par itération de la relation $d(xy) = xdy + ydx$, tout élément de $\Omega^1_{A/K}$ est de la forme $a_1dx_1 + ... + a_ndx_n$ avec $a_1, ..., a_n \in A$. Donc on a $\Omega^i_{A/K} = 0$ pour $i > n$. Donc le complexe est de longueur finie.

III

Soit n un entier ≥ 1. Posons $A = K[X_1, ..., X_n]$. Pour $I = \{i_1, ...i_k\} \subset \{1, ..., n\}$ (avec $i_1 < ... < i_k$), posons $dX_I = dX_{i_1} \wedge ... \wedge dX_{i_k}$. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, posons $n(I, i) = |\{j \in I/j < i\}|$.

1. Montrer que $A \otimes_K A$ est une K-algèbre isomorphe à $K[Y_1, ..., Y_n, Z_1, ..., Z_n]$. Quelle est l'image de $\mathcal{I}$ dans $K[Y_1, ..., Y_n, Z_1, ..., Z_n]$?

L'isomorphisme est donné par $P \otimes_K Q \mapsto P(Y_1, ..., Y_n)Q(Z_1, ..., Z_n)$. L'image de $1 \otimes_K P - P \otimes_K 1$ est $P(Z_1, ..., Z_n) - P(Y_1, ..., Y_n)$. L'image de l'idéal $\mathcal{I}$ est l'idéal J engendré par $\{Y_1 - Z_1, ..., Y_n - Z_n\}$.

2. En déduire que $\Omega_{A/K}$ est un A-module libre de base $(dX_I)_{I \subset \{1,...,n\}}$.

Il suffit de montrer que le A-module $\Omega^1_{A/K}$ a pour base $(dX_1, ..., dX_n)$. Considérons l'action de A sur $A \otimes_K A$ donnée par $a.(b \otimes_K c) = (ab) \otimes_K c$. Cela revient à dire que $P(X_1, ..., X_n).(Q(Y_1, ..., Y_n)R(Z_1, ..., Z_n) = P(Y_1, ..., Y_n)Q(Y_1, ..., Y_n)R(Z_1, ..., Z_n)$. Le A-module $\Omega^1_{A/K}$ est engendré par $(dX_1, ..., dX_n)$, par itération de la formule $d(xy) = xdy + ydx)$ sur un polynôme en X_1,..., X_n. Vérifions qu'on a une base. Soient $P_1, ..., P_n \in A[X_1, ..., X_n]$ tels que $\sum_i P_i\, dX_i = 0$. On a alors $\sum_i P_i(Y_1, ..., Y_n)(Y_i - Z_i) \in J^2$. Cela entraîne que $P_i = 0$ pour tout i. On a bien une base.

3. Le complexe de De Rham est-il de longueur finie ?

Si $k > n$, le K-espace vectoriel $\Omega^k_{A/K}$ est nul. Ainsi le complexe de De Rham est de longueur finie.

4. Pour $P \in A$, posons $dP = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_i$. Pour i entier ≥ 0, montrer qu'on a $d(PdX_I) = \sum_{i \in I} (-1)^{n(I,i)} \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_{I \cup \{i\}}$

On a $d(PdX_I) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_i \wedge dX_I$.

5. Si $K = \mathbf{C}$ et $n = 2$, montrer que l'homologie du complexe de De Rham est nulle.

Si $K = \mathbf{C}$ et $n = 2$, montrer que l'homologie du complexe de De Rham est nulle.

Il suffit de montrer que l'image de d^0 est le noyau de d^1 et que d^1 est surjective. La surjectivité de d^1 est évidente car $d^1(P_1dX_1) = -\frac{\partial P_1}{\partial X_2} dX_1 \wedge dX_2$. Donc, pour $P \in A$, il existe $Q \in A$ tel que $d^1 Q\, dX_1 = P dX_1 \wedge dX_2$, car tout polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$ admet une primitive.

Soit $P_1\, dX_1 + P_2\, dX_2 \in \mathrm{Ker}(d^1)$. Posons $P_1 = \sum_{i,j} a_{i,j} X_1^i X_2^j$ et $P_2 \sum_{i,j} b_{i,j} X_1^i X_2^j$. On a $ia_{i+1,j} = jb_{i,j+1}$. Pour $i > 0$, posons $j > 0$, $c_{i,j} = a_{i+1,j}/j = b_{i,j+1}/i$ et $P = \sum_{i,j} c_{i,j} X^i Y^j$. On a alors $dP = P_1\, dX_1 + P_2\, dX_2$. Donc $\mathrm{Ker}(d^1) = \mathrm{Im}(d^0)$.

6. L'homologie du complexe de De Rham est-elle nulle pour K et n quelconques ?

Non. pour $n = 1$ et K corps à deux éléments, on a $\Omega^2_{A/K} = 0$, donc $d^1 = 0$ et d^0 n'est pas surjective car $X_1\, dX_1$ n'est pas dans l'image de d^0 (le polynôme X n'a pas de primitive dans $K[X]$ en caractéristique 2).

IV

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété algébrique sur le corps K. Comment construire un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules Ω^1_X tel que, pour tout ouvert affine U, on a $\Omega^1_X(U) = \Omega^1(\mathcal{O}_X(U))$. Est-il unique ?

On peut utiliser le cours et le fait que les ouverts affines forment une base de la topologie de X. Alors un énoncé du cours assure que le faisceau associé existe et est unique si on peut vérifier des propriétés de recollement et de restriction. Ces propriétés se déduisent du fait que Ω^1 est un foncteur, comme vu dans la partie I.8.