

EXAMEN du 18 février 2025

Durée : 3h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

Soit $\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{C})$ une représentation d'image finie, irréductible, impaire, de conducteur N . On note P (majuscule de la lettre ρ) l'application $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}(\text{M}_2(\mathbf{C}))$ qui à σ associe $M \mapsto \rho(\sigma)M\rho(\sigma)^{-1}$. C'est la *représentation adjointe* de ρ .

Soit p un nombre premier. Si p est non ramifié pour ρ , on note α_p et β_p les valeurs propres de $\rho(\phi_p)$, où ϕ_p est une substitution de Frobenius en p . Ainsi le polynôme caractéristique de $\rho(\phi_p)$ est $X^2 - a_p X + a_{p,p}$, avec $a_p = \alpha_p + \beta_p$ et $a_{p,p} = \alpha_p \beta_p$.

À partir de la question 6, on suppose qu'en tout nombre premier q divisant N , l'image par ρ d'un sous-groupe d'inertie I_q en q a un vecteur fixe v non nul dans $\mathbf{C}^2$, et que $\rho(I_q)$ est cyclique d'ordre premier à q . Notons a_q la trace de $\rho(\phi_q)$ agissant sur $\mathbf{C}v$.

1. Montrer que P est d'image finie.
2. Supposons ρ non ramifiée en p .
 - 2.a. Montrer que P est non ramifiée en p .
 - 2.b. Montrer que les valeurs propres de $P(\phi_p)$ sont α_p/β_p , β_p/α_p , 1 et 1.
 - 2.c. En déduire le facteur d'Euler $L_p(P, s)$ en p de $L(P, s)$ en termes de a_p et $a_{p,p}$.
- 3.a. Quelles sont les valeurs propres avec multiplicité de $P(\phi_\infty)$, où ϕ_∞ est une conjugaison complexe ?
- 3.b. En déduire le facteur à l'infini $L_\infty(P, s)$.
4. Soit $\psi : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}^\times$ un caractère. Montrer que $\rho \otimes \psi$ et ρ ont même représentation adjointe.
5. Y a-t-il des cas où P est non ramifiée en p et ρ est ramifiée en p ?
6. Montrer que le conducteur de P est N^2 .
7. En déduire $\Lambda(P, s)$ (fonction $L(P, s)$ complétée).
- 8.a. Notons $\text{M}_2^0(\mathbf{C}) = \{M \in \text{M}_2(\mathbf{C})/\text{tr}(M) = 0\}$. Montrer que $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ stabilise $\text{M}_2^0(\mathbf{C})$ et agit trivialement sur un supplémentaire. Notons P^0 la représentation déduite de P par restriction à $\text{M}_2^0(\mathbf{C})$.
- 8.b. En déduire que $L(P, s) = L(P^0, s)\zeta(s)$, où ζ est la fonction zêta de Riemann.
- 8.c. Montrer que P est isomorphe à P^* (sa contragrédiente).
9. Soit K une extension quadratique de $\mathbf{Q}$. Supposons que ρ est induite d'un caractère ξ de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$.
 - 9.a. Montrer que P est isomorphe à $\text{Ind}_{K/\mathbf{Q}} 1 \oplus \text{Ind}_{K/\mathbf{Q}}(\xi/\xi')$, où ξ' est le caractère de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ donné par $\xi'(\sigma) = \xi(\tau\sigma\tau^{-1})$, avec $\tau \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) - \text{Gal}(\bar{K}/K)$.
 - 9.b. Montrer que $L(P, s) = \zeta_K(s)L(\xi/\xi', s)$, où ζ_K est la fonction zêta de Dedekind de K .

- 9.c. En déduire que $\Lambda(P, s)$ a un pôle simple en $s = 1$.
 9.d. Quel est l'ordre d'annulation de $\Lambda(P, s)$ en $s = 0$?

II

Supposons que ρ est attachée à une forme modulaire primitive parabolique f de poids 1 et niveau N . On note $\sum_{n \geq 1} a_n q^n$ le q -développement de f . Soit p un nombre premier ne divisant pas N . On a alors $L(\rho, s) = L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$.

1. Montrer que la série formelle $\sum_{r \geq 0} a_{p^r} X^r$ vaut $1/[(1 - \alpha_p X)(1 - \beta_p X)]$.
2. En déduire qu'on a, pour r entier ≥ 0 , $a_{p^r} = \sum_{i=0}^r \alpha_p^i \beta_p^{r-i}$.
3. Exprimer $\sum_{r \geq 0} |a_{p^r}|^2 X^r$ comme une fraction rationnelle en X .
4. Comparer le facteur d'Euler en p de $L(P, s)$ et $\sum_{r \geq 0} |a_{p^r}|^2 p^{-rs}$.
5. Quel est le lien entre $L(P, s)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-s}$?

Rappels

Rappels sur les invariants des représentations galoisiennes.

Soit $\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation d'image finie. Soit p un nombre premier. Le facteur d'Euler en p est $L_p(\rho, s) = \det(\text{Id}_V - \rho(\phi_p) p^{-s} |V^{I_p})^{-1}$, où ϕ_p est une substitution de Frobenius en p et I_p un sous-groupe d'inertie en p . Le facteur à l'infini de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}(V)$ est $L_{\infty}(\rho, s) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s)^{d^+} \Gamma_{\mathbf{R}}(s+1)^{d^-}$ où $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \Gamma(s/2) \pi^{-s/2}$, où d^+ et d^- sont les dimensions respectives des sous-espaces de V invariants et antiinvariants par une conjugaison complexe. On a $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) \Gamma_{\mathbf{R}}(s+1) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s)$.

Le conducteur N de ρ est $\prod_p p^{n_p}$ où le produit porte sur les nombres premiers et où n_p est donné par la formule $n_p = \sum_{i=0}^{\infty} |G_0/G_i| \dim(V/V^{G_i})$ (G_i est le i -ème groupe de ramification d'un groupe de décomposition en p). On a $L(\rho, s) = \prod_p L_p(\rho, s)$, où le produit porte sur tous les nombres premiers, et $\Lambda(\rho, s) = N^{s/2} L_{\infty}(\rho, s) L(\rho, s)$.