

INTERROGATION du 12 décembre 2024

Durée : 45 minutes. Tout appareil électronique et tout document est interdit.

1. Indiquer un groupe non-abélien d'ordre 2024.
2. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_5$ possède-t-il un sous-groupe normal d'ordre 2 ?
3. Indiquer un 3-sous-groupe de Sylow du groupe symétrique $\mathcal{S}_5$.
4. Donner un exemple de groupe possédant un sous-groupe de Sylow non-cyclique.
5. Combien le groupe alterné $\mathcal{A}_4$ possède-t-il de 3-sous-groupes de Sylow ?
6. Le groupe des isométries de $\mathbf{Z}$ vu comme un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ est-il fini ?
7. Soit G un groupe abélien. Soit p un nombre premier divisant l'ordre de G . Le groupe G agit-il fidèlement par conjugaison sur l'ensemble de ses p -sous-groupes de Sylow ?
8. Soit X un ensemble de 5 points non alignés dans le plan euclidien. Peut-il y avoir une isométrie d'ordre 4 de X ?
9. Y a-t-il un élément d'ordre 5 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$?
10. Les groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ et $\mathcal{S}_4$ sont-ils isomorphes ?