

EXAMEN du 10 janvier 2025

Durée : 3h. Une feuille manuscrite est autorisée.

I

On dit qu'un groupe G est *simple* s'il admet $\{1\}$ et G comme seuls sous-groupes distingués. Pour H sous-groupe de G , notons $N_H = \{g \in G / gHg^{-1} = H\}$ (c'est le *normalisateur* de H dans G). Pour p nombre premier, notons n_p le nombre de p -sous-groupes de Sylow de G . Soit G un groupe d'ordre 2025.

1. Décomposer 2025 en produit de facteurs premiers.
2. Quels sont les ordres d'un 3 et 5-sous-groupes de Sylow de G ?
3. Montrer que $n_3 \in \{1, 25\}$ et $n_5 \in \{1, 81\}$.
4. Supposons que $n_5 = 1$. Montrer que G admet un sous-groupe distingué non trivial.
5. Supposons que $n_5 = 81$. Supposons que pour tous 5-sous-groupes de Sylow H_1, H_2 avec $H_1 \neq H_2$, on a $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.
- 5.a. Montrer que G admet au moins 1945 éléments d'ordre une puissance de 5.
- 5.b. En déduire qu'il existe un unique 3-sous-groupe de Sylow de G .
6. Soit H un sous-groupe de G . Montrer que N_H est un sous-groupe de G .
7. Montrer que tout sous-groupe L d'ordre 5 est distingué dans un groupe K d'ordre 25.
8. Supposons que $n_5 = 81$. Soient H_1 et H_2 deux 5-sous-groupes de Sylow distincts de G . Posons $H = H_1 \cap H_2$. Supposons $H \neq \{1\}$.
- 8.a. Montrer que H est d'ordre 5.
- 8.b. Montrer que N_H contient H_1 et H_2 .
- 8.c. Montrer que N_H contient 81 5-sous-groupes de Sylow. En déduire que $N_H = G$.
9. Montrer que G n'est pas simple.

II

On pose $\mathbf{F}_7 = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. Notons X l'ensemble des paires de droites distinctes de $\mathbf{F}_7^2$. Notons D_0 et D_∞ les droites dirigées par les vecteurs $(0, 1)$ et $(1, 0)$ respectivement. Posons $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_7) / a \in \mathbf{F}_7^\times \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_7) / a \in \mathbf{F}_7^\times \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$.

1. Combien d'éléments le groupe (multiplicatif) $\mathbf{F}_7^\times$ possède-t-il ?
2. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$ agit sur X par $g \cdot \{D_1, D_2\} = \{g.D_1, g.D_2\}$.
3. Quel est le stabilisateur de $\{D_0, D_\infty\} \in X$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$?
4. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$.
5. Quel est l'ordre de G ?
6. L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$ sur X est-elle transitive ?
7. Quel sont les ordres des éléments de G ?
8. Le groupe G est-il isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_4$? Au groupe $\mathcal{S}_3 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
9. Le groupe G est-il distingué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$?
10. Le groupe G est-il isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$?