Corrigé de l'EXAMEN du 10 janvier 2025

I

On dit qu'un groupe G est *simple* s'il admet $\{1\}$ et G comme seuls sous-groupes distingués. Pour H sous-groupe de G , notons $N_H = \{g \in G / gHg^{-1} = H\}$ (c'est le *normalisateur* de H dans G). Pour p nombre premier, notons n_p le nombre de p -sous-groupes de Sylow de G . Soit G un groupe d'ordre 2025.

1. Décomposer 2025 en produit de facteurs premiers.

On a $2025 = 3^4 \cdot 5^2$.

2. Quels sont les ordres d'un 3 et 5-sous-groupes de Sylow de G ?

Ils sont d'ordres 81 et 25 respectivement.

3. Montrer que $n_3 \in \{1, 25\}$ et $n_5 \in \{1, 81\}$.

D'après Sylow, on a $n_3 | 25$ et donc $n_3 \in \{1, 5, 25\}$ et, de plus, $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$ impose $n_3 \in \{1, 25\}$. De même, $n_5 \in \{1, 3, 27, 81\}$ et $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$ imposent $n_5 \in \{1, 81\}$.

4. Supposons que $n_5 = 1$. Montrer que G admet un sous-groupe distingué non trivial.

Dans ce cas il y a un unique 5-sous-groupe de Sylow, qui est donc distingué dans G .

5. Supposons que $n_5 = 81$. Supposons que pour tous 5-sous-groupes de Sylow H_1, H_2 avec $H_1 \neq H_2$, on a $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

5.a. Montrer que G admet au moins 1945 éléments d'ordre une puissance de 5.

Comme G contient 81 sous-groupes d'ordre 25 qui, privés de $1 \in G$, sont disjoints, G possède $81 \times 24 + 1 = 1945$ éléments d'ordre divisant 25.

5.b. En déduire qu'il existe un unique 3-sous-groupe de Sylow de G .

Au plus $2025 - 1945 = 80$ éléments de G ne sont pas d'ordre d'une puissance de 5. Un 3-sous-groupe de Sylow de G existe par Sylow et contient 81 éléments d'ordre une puissance de 3. Il est donc constitué de ces 80 éléments et de $1 \in G$ si bien qu'il est unique.

6. Soit H un sous-groupe de G . Montrer que N_H est un sous-groupe de G .

Vérification immédiate.

7. Montrer que tout sous-groupe L d'ordre 5 est distingué dans un groupe K d'ordre 25.

Comme K est un 5-groupe, son centre Z n'est pas $\{1\}$. Le normalisateur N de L dans K contient L et Z . Si $L = Z$, L est distingué dans K . Si $L \neq Z$, on a $|N| > 5$, $|N|$ divise 25 et donc $N = K$. Donc L est distingué dans K .

8. Supposons que $n_5 = 81$. Soient H_1 et H_2 deux 5-sous-groupes de Sylow distincts de G . Posons $H = H_1 \cap H_2$. Supposons $H \neq \{1\}$.

8.a. Montrer que H est d'ordre 5.

Son ordre divise 25. C'est donc 1, 5 ou 25. Les hypothèses excluent les ordres 1 et 25.

8.b. Montrer que N_H contient H_1 et H_2 .

D'après 7, H est distingué dans H_1 et H_2 . Donc H_1 et H_2 sont contenus dans N_H .

8.c. Montrer que N_H contient 81 5-sous-groupes de Sylow. En déduire que $N_H = G$.

Comme $N_H \subset H$, on a $|N_H| = 3^a \cdot 5^b$ avec $a \leq 4$ et $b \leq 2$. Comme N_H contient des sous-groupes d'ordre 25, d'après 8, on a $b = 2$. Par conséquent, N_H possède $m = 1, 3, 9, 27$ ou 81 5-sous-groupes de Sylow. Mais $m \neq 1$ car, par 8.b, on a $m \geq 2$. De plus $m \equiv 1 \pmod{5}$. On a donc $m = 81$. Donc, on a $a = 4$. Donc N_H est d'ordre 2025. C'est donc G .

9. Montrer que G n'est pas simple.

Si $n_5 = 1$, par 4, G possède un unique 5-sous-groupe de Sylow, qui est donc distingué. Si $n_5 \neq 1$, par 5 et 8, G admet un unique 3-sous-groupe de Sylow (donc distingué) ou un sous-groupe d'ordre 5 dont le normalisateur dans G est égal à G (et donc distingué).

II

On pose $\mathbf{F}_7 = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. Notons X l'ensemble des paires de droites distinctes de $\mathbf{F}_7^2$. Notons D_0 et D_∞ les droites dirigées par les vecteurs $(0, 1)$ et $(1, 0)$ respectivement. Posons $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_7)/a \in \mathbf{F}_7^\times \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_7)/a \in \mathbf{F}_7^\times \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$.

1. Combien d'éléments le groupe (multiplicatif) $\mathbf{F}_7^\times$ possède-t-il ?

Un corps à q éléments possède $q - 1$ inversibles. Il y a donc 6 éléments dans $\mathbf{F}_7^\times$.

2. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$ agit sur X par $g \cdot \{D_1, D_2\} = \{g \cdot D_1, g \cdot D_2\}$.

Les axiomes sont immédiatement vérifiés.

3. Quel est le stabilisateur de $\{D_0, D_\infty\} \in X$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$?

Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$. Il stabilise la paire $\{D_0, D_\infty\}$ si et seulement si a) $g \cdot D_0 = D_0$ et $g \cdot D_\infty = D_\infty$ ou b) $g \cdot D_0 = D_\infty$ et $g \cdot D_\infty = D_0$. Dans le cas a) (resp. b)), g est une matrice diagonale (resp. antidiagonale) de déterminant 1. Le stabilisateur cherché est donc G .

4. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$.

C'est le cas, puisque G est le stabilisateur d'un élément.

5. Quel est l'ordre de G ?

L'ensemble G est en bijection avec deux copies de $\mathbf{F}_7^\times$. Il a donc $2 \times 6 = 12$ éléments.

6. L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$ sur X est-elle transitive ?

L'ensemble X possède $8 \times 7/2 = 28$ éléments. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$ possède $(7^2 - 1)(7^2 - 7)/(7 - 1) = 7 \times 48$ éléments. L'orbite de $\{D_0, D_\infty\}$ possède $|\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)/G| = 7 \times 48/12 = 28$ éléments. Il n'y a donc qu'une seule orbite et l'action est transitive.

7. Quel sont les ordres des éléments de G ?

L'ordre de $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ est 4, celui de $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ est l'ordre de a , *i.e.* 1, 2, 3 ou 6.

8. Le groupe G est-il isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_4$? Au groupe $\mathcal{S}_3 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?

Le groupe $\mathcal{A}_4$ n'a pas d'élément d'ordre 6. Le groupe $\mathcal{S}_3 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ n'a pas d'élément d'ordre 4. Aucun n'est isomorphe à G .

9. Le groupe G est-il distingué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$?

Supposons que $gGg^{-1} = G$ pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$. Mais $gGg^{-1} = G$ est le stabilisateur de $\{g \cdot D_0, g \cdot D_\infty\} \in X$. Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)$ opère transitivement sur X , G fixe tous les éléments de X . Si $g \in G$ fixe les paires $\{D_1, D_2\}$ et $\{D_2, D_3\}$, on a $g \cdot D_2 = D_2$. Donc G fixe toutes les droites, ce qui est absurde. Donc G n'est pas distingué.

10. Le groupe G est-il isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$?

Notons μ_6 le groupe des racines 6-èmes de l'unité dans $\mathbf{C}$. Considérons le groupe $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})/a \in \mu_6 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})/a \in \mu_6 \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Il est isomorphe à G . Fixons un isomorphisme $\phi : \mu_6 \rightarrow \mathbf{F}_7^\times$ que l'on prolonge en posant $\phi(0) = 0 \in \mathbf{F}_7$. On obtient un isomorphisme $T \rightarrow G$ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} \phi(a) & \phi(b) \\ \phi(c) & \phi(d) \end{pmatrix}$.