Université Paris Cité | Année 2024-25
L3 Mathématiques – Actions de groupes | L. Merel

Feuille 3

p-groupes, sous-groupes de Sylow

1.a. Soit p un nombre premier. Soit n un entier ≥ 2 . Quel est l'ordre du groupe (multiplicatif) $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times$?
1.b. Montrer qu'on a un morphisme surjectif de groupe $R_{p,n} : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ donné par la réduction modulo p. Quel est l'ordre du groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$? Notons $U_{p,n}$ le noyau de $R_{p,n}$. Quel l'ordre de $U_{p,n}$?
1.c. Supposons désormais $p > 2$. Montrer par récurrence sur l'entier $e \geq 0$ que $(1+p)^{p^e} \equiv 1 + p^{e+1} \pmod{p^{e+2}}$. En déduire que $1+p$ est d'ordre p^{n-1} dans $U_{p,n}$, puis que $U_{p,n}$ est cyclique.
1.d. Soit $x \in U_{p,n}$ d'ordre d premier à p. Montrer que $R_p(x)$ est d'ordre d. En déduire que $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \times U_{p,n}$, donné par $x \mapsto (x^{p^{n-1}}, R_p(x))$, est un isomorphisme de groupes.
1.e. Montrer qu'on a un morphisme surjectif de groupe $R_4 : (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^\times \to (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$ donné par la réduction modulo 4. Le groupe $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$ est-il cyclique ?
1.f. Montrer que 5 est d'ordre 2^{n-2} dans $(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^\times$. En déduire que $(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^\times$ est isomorphe au produit d'un groupe cyclique d'ordre 2^{n-2} et d'un groupe d'ordre 2.

2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p est cyclique. Soit G un groupe d'ordre p^2.
2.a. Donner deux exemples non isomorphes de groupes d'ordre p^2.
2.b. Quels sont les ordres possibles des éléments de G ?
2.c. Montrer que si G possède un élément d'ordre p^2, il est cyclique d'ordre p^2.
2.d. Montrer que le centre de G contient un élément g_1 d'ordre p. Notons G_1 le groupe engendré par g_1.
2.e. Soit $g_2 \in G - G_1$. Notons G_2 le sous-groupe engendré par g_2. Montrer que G_1G_2 est un groupe abélien et qu'il est égal à G.
2.f. En déduire que, si tout élément de G est d'ordre 1 ou p, G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$.

3. Soit p un nombre premier. Soit N l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. Posons $H = \mathrm{I}_3 + N$. C'est le *groupe de Heisenberg*.
3.a. Montrer que c'est un groupe d'ordre p^3 pour la multiplication des matrices. Est-il abélien ?
3.b. Montrer que H possède trois élément A, B, C d'ordre p tels que $AC = CA$, $BC = CB$ et $ABA^{-1}B^{-1} = C$, de telle sorte que tout élément de H s'écrive $B^jC^kA^i$, avec i, j, k des entiers bien définis modulo p.
3.c. Écrire alors le produit $B^jC^kA^iB^{j'}C^{k'}A^{i'}$, pour i, j, k, i', j', k' entiers.
3.d. Si $p \neq 2$, montrer que tout élément de H est d'ordre p ou 1, puis que le centre Z de H est d'ordre p.
3.e. Si $p = 2$, étudier l'ordre des éléments de H. Le groupe H est-il isomorphe au groupe des quaternions ?
3.f. Quel est l'ordre de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$? Montrer que H est un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

4.a. Combien le groupe alterné $\mathcal{A}_4$ a-t-il de 2-sous-groupes de Sylow ? Quel est leur ordre ?
4.b. Mêmes questions pour le groupe alterné $\mathcal{S}_4$.
4.c. Expliciter ces groupes de Sylow. Sont-ils abéliens ?

5. Soit p un nombre premier. Montrer que les p-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{S}_p$ sont cycliques d'ordre p.
5.a. En déduire que ces p-Sylow sont engendrés chacun par un cycle de longueur p.
5.b. Montrer qu'il y en a $(p-2)!$. En déduire que $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$ (Théorème de Wilson).

6. Soit p un nombre premier. Considérons $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.
6.a. Montrer que G opère sur $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 - \{0\}$.
6.b. Montrer qu'on a une application surjective $C_1 : G \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 - \{0\}$ qui à une matrice associe sa première colonne. Montrer que pour tout vecteur $x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 - \{0\}$, l'ensemble $C_1^{-1}(\{x\})$ est formé par les matrices dont la première colonne est x et la deuxième colonne n'est pas colinéaire à x. En déduire que cet ensemble est de cardinal $p^2 - p$. En déduire que G est d'ordre $p(p-1)^2(p+1)$.
6.c. Montrer que tout p-sous-groupe de Sylow de G est d'ordre p.
6.d. Montrer que $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ est d'ordre p, puis que T engendre un p-sous-groupe de Sylow U_T de G.

6.e. Montrer que U_T est le stabilisateur dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ d'un vecteur de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 - \{0\}$.
6.f. Montrer que U_T possède $p+1$ conjugués dans G.

7. Soit p un nombre premier > 2. Considérons l'ensemble $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ muni de la loi interne $((a,b),(a',b')) \mapsto (aa', ab'+b)$. Soit $n > 1$ un diviseur de $p-1$.
7.a. Montrer qu'ainsi $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est un groupe, dit *groupe mirabolique* et noté M. Est-il abélien ?
7.b. Rappelons que $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ est cyclique. Montrer qu'il existe un sous-groupe C de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ d'ordre n.
7.c. Montrer que $M_C = C \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est un sous-groupe non-abélien d'ordre np.

8. Soient p et q deux nombres premiers, avec $q < p$, q ne divisant pas $p-1$. Soit G un groupe d'ordre pq.
8.a. Montrer que G possède un unique q-sous-groupe de Sylow G_q et un unique p-sous-groupe de Sylow G_p.
8.b. En déduire que ces sous-groupes de Sylow sont cyclique et normaux dans G.
8.c. Montrer que $G = G_pG_q$, puis que G est isomorphe à $G_p \times G_q$, puis que G est cyclique d'ordre pq.

9. Soit G un groupe. Il est dit *résoluble* s'il existe un entier $r \geq 0$ et une suite finie croissante $(G_k)_{0\leq k\leq r}$ de sous-groupes de G, tels que G_k est normal dans G_{k+1}, le quotient G_{k+1}/G_k est abélien, $G_0 = \{1\}$, et $G_r = G$. Soit p un nombre premier.
9.a. Montrer que les groupes symétriques $\mathcal{S}_n$ pour $n \leq 4$ sont résolubles. Le groupe $\mathcal{S}_5$ est-il résoluble ?
9.b. Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble.
9.c. Soit H un sous-groupe abélien normal de G. Si G/H est résoluble, montrer que G est résoluble.
9.d. Notons Z le centre de G. Supposons que G/Z est un groupe résoluble. Ainsi il existe un entier $r \geq 0$ et une suite finie croissante $(H_k)_{0\leq k\leq r}$ de sous-groupes de G/Z, tels que H_k est normal dans H_{k+1}, le quotient H_{k+1}/H_k est abélien, $H_0 = \{1\}$, et $H_r = G/Z$. Pour k entier, $0 \leq i \leq r$, on note G_k l'image réciproque de H_k par la sujection canonique $G \to G/Z$. Montrer que cela fait de G un groupe résoluble.
9.e. Supposons que G est un p-groupe. Montrer que le centre Z est d'ordre > 1. En déduire que G est résoluble par un raisonnement par récurrence. Montrer qu'on peut même imposer que G_k est d'indice p dans G_{k+1}, puis que G contient un sous-groupe d'ordre p^s pour tout entier $s \leq t$.
9.f. Soit p un nombre premier. Supposons que G est d'ordre np^t, avec n premier à p. Montrer que G contient un sous-groupe d'ordre p^s pour tout entier s, $0 \leq s \leq t$.

10.a. Soit G un groupe d'ordre 12. Notons n_2 et n_3 le nombre de 2-Sylow et 3-Sylow de G respectivement. Montrer que n_2 vaut 1 ou 3 et que n_3 vaut 1 ou 4.
10.b. Supposons que $n_3 = 4$. Montrer qu'on a 8 éléments d'ordre 3 dans G. En déduire que $n_2 = 1$. Montrer que l'action de G par conjugaison sur les 3-Sylow produit un morphisme $G \to \mathcal{S}_4$.
10.c. Montrer que ce dernier morphisme est injectif d'image $\mathcal{A}_4$.
10.d. Indiquer quatre groupes d'ordre 12 deux à deux non isomorphes.

11. Soit G un groupe simple d'ordre 60. Notons n_p le nombre de p-sous-groupes de Sylow de G.
11.a. Montrer que si on a un morphisme non trivial $G \to \mathcal{S}_5$, G est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.
11.b. Déterminer le nombre de p-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{A}_5$, pour $p = 2$, $p = 3$ et $p = 5$.
11.c. Déduire des théorèmes de Sylow que $n_5 = 6$, $n_3 \in \{4, 10\}$, $n_2 \in \{3, 5, 15\}$.
11.d. En utilisant que G est simple, montrer que $n_3 = 10$ et $n_2 \in \{5, 15\}$.
11.e. Combien d'éléments d'ordre 3 et 5, le groupe G contient-il ?
11.f. Supposons $n_2 = 15$. Montrer qu'il existe des 2-Sylow P et P' tels que $P \cap P'$ est d'ordre 2. Soit $g \in P \cap P'$ d'ordre 2. Montrer que le centralisateur C de g dans G contient P et P', qu'il est d'ordre divisible par 4. En déduire que H est d'indice 5 dans H. En déduire un morphisme non trivial de groupes $G \to \mathcal{S}_5$.
11.g. Lorsque $n_2 = 5$, montrer que l'action par conjugaison de G sur l'ensemble W_2 des 2-Sylow produit un morphisme non-trivial de groupes $G \to \mathcal{S}_5$. Montrer que l'image de ce morphisme est $\mathcal{A}_5$.
11.h En déduire que G est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

12.a. Montrer que le groupe $\mathcal{S}_5$ agit transitivement sur ses sous-groupes d'ordre 5 par conjugaison.
12.b. En déduire que le groupe $\mathcal{A}_5$ (resp. $\mathcal{S}_5$) ne contient pas de sous groupe d'ordre 20 (resp. 40).

13. Soit G un groupe abélien. Pour p nombre premier, on note G_p la partie p-primaire de G.
13.a. Montrer qu'on a un morphisme de groupes injectif $\prod_p G_p \to G$.
13.b. En déduire que G est isomorphe à $\prod_p G_p$, où p parcourt les nombres premiers divisant l'ordre de G.