Université Paris Cité — Année 2024-25

L3 Mathématiques – Actions de groupes — L. Merel

Feuille 2

Sous-groupes normaux, groupes quotients

1. Soit G un groupe opérant sur un ensemble X. Pour $x \in X$, on note G_x le stabilisateur de x dans G. Pour $g \in G$, on pose $X^g = \{x \in X / g.x = x\}$.
1.a. Soit $h \in G$. Montrer que $G_{h.x} = hG_x h^{-1}$.
1.b. Montrer qu'on a $X^{hgh^{-1}} = h.X^g$.

2. Soit G un groupe. Soient x, $y \in G$ d'ordres finis n et m respectivement.
2.a. Supposons n et m premiers entre eux, et que x et y commutent. Montrer que xy est d'ordre nm.
2.b. Supposons seulement que x et y commutent. Montrer que xy est d'ordre divisant le ppcm μ de n et m.
2.c. Supposons encore que x et y commutent. Le produit xy peut-il être d'ordre strictement inférieur à μ ?
2.d. Supposons $G = \mathcal{S}_3$. Montrer qu'il existe x, y dans G d'ordres 2 et 3 respectivement, avec xy d'ordre 2.

3. Montrer que tout groupe d'ordre premier p est cyclique d'ordre p.

4. Soit H_1 et H_2 deux groupes. Posons $G = H_1 \times H_2$.
4.a. Montrer qu'on a des morphismes de groupes injectifs $H_1 \to G$ et $H_2 \to G$ donnés par $h_1 \mapsto (h_1, 1)$ et $h_2 \mapsto (1, h_2)$ respectivement. Notons G_1 et G_2 les images de ces morphismes.
4.b. Montrer que G_1 et G_2 sont distingués dans G.
4.c. Montrer qu'on a des morphismes surjectifs de groupes $G \to G_1$ et $G \to G_2$ donnés par $(h_1, h_2) \mapsto h_1$ et $(h_1, h_2) \mapsto h_2$ respectivement. Quels sont leurs noyaux ?
4.d. En déduire que G/G_1 et G/G_2 sont isomorphes à G_2 et G_1 respectivement.

5. Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G. Soit N un sous-groupe distingué de G.
5.a. Montrer que $HN = \{hn \in G / h \in H, n \in N\}$ est un sous-groupe de G.
5.b. Montrer que $N \cap H$ est distingué dans H.
5.c. Établir qu'on a un morphisme de groupes $H/(H \cap N) \to HN/N$ déduit de $h(H \cap N) \mapsto hN$.
5.d. Montrer que c'est un isomorphisme de groupes.

6. Soit G un groupe fini. Soit H_1 et H_2 des sous-groupes de G. On pose $H_1H_2 = \{h_1h_2 / h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$.
6.a. Considérons $H_1 \times H_2 \to G$, qui à (h_1, h_2) associe h_1h_2. Est-ce un morphisme de groupes ? Montrer qu'elle est injective si et seulement si $H_1 \cap H_2$ est réduit à l'élément neutre.
6.b. Établir la formule $|H_1H_2| = |H_1||H_2|/|H_1 \cap H_2|$.
6.c. L'ensemble H_1H_2 est-il un sous-groupe de G ?
6.d. Montrer que si H_1 ou H_2 est normal dans G, H_1H_2 est un sous-groupe de G.
6.e. Supposons que $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ et que H_1 et H_2 sont normaux dans G. Montrer que les groupes $H_1 \times H_2$ et H_1H_2 sont isomorphes.
6.f. Soit G_1 et G_2 deux groupes. Montrer que G est isomorphe à $G_1 \times G_2$ si et seulement si les quatre conditions suivantes sont réunies : (i) G contient deux sous-groupes H_1 et H_2 isomorphes à G_1 et G_2 respectivement, (ii) H_1 et H_2 sont normaux dans G, (iii) on a $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, (iv) on a $|G| = |G_1||G_2|$.
6.g. Lesquelles de ces conditions sont vérifiées lorsque $G = \mathcal{S}_3$, G_1 est d'ordre 2 et G_2 est d'ordre 3 ?

7. On a vu que $T = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ est un sous-groupe normal de $\mathcal{S}_4$ (et donc de $\mathcal{A}_4$).
7.a. Montrer que le groupe quotient $\mathcal{A}_4/T$ est cyclique d'ordre 3.
7.b. Montrer que $\mathcal{S}_4$ opère par conjugaison sur T privé de l'identité.
7.c. Cette action est-elle transitive ?
7.d. En déduire un morphisme de groupes $\mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}_3$.
7.e. Est-il surjectif ? Quel est son noyau ?
7.f. Montrer que le groupe quotient $\mathcal{S}_4/T$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.
7.g. Le groupe $\mathcal{S}_4$ possède-t-il un sous-groupe isomorphe à $\mathcal{S}_3$?

7.h. Est-il isomorphe à $\mathcal{S}_3 \times T$?

8. Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit nombre premier divisant $|G|$. Soit H un sous-groupe de G d'indice p.
8.a. Supposons que $p = 2$. Montrer que $H\backslash G = \{H, G - H\}$. Quelles sont les classes de G/H ?
8.b. Supposons encore que $p = 2$. En déduire que H est distingué dans G.
8.c. Montrer que l'action de G sur G/H définit un morphisme de groupe $f : G \to \mathcal{S}_p$.
8.d. En déduire que le noyau de f est $\cap_{x \in G} xHx^{-1}$.
8.e. En déduire que le noyau de f est un sous-groupe de H.
8.f. Considérons l'action de H sur G/H. Quel est le stabilisateur dans H de $H \in G/H$?
8.g. Écrire la formule des classes. En déduire que tout stabilisateur dans H d'un élément de G/H vaut H.
8.h. En déduire que le noyau de f est H, puis que H est un sous-groupe distingué de G.

9. Soit H un sous-groupe distingué du groupe alterné $\mathcal{A}_5$. On suppose que H ne se réduit pas à l'identié.
9.a. Montrer que $\mathcal{A}_5$ est composé des éléments suivant de $\mathcal{S}_5$: l'identité, des doubles transpositions (à supports disjoints), des 3-cycles et des 5-cycles.
9.b. Montrer que tous les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_5$.
9.c. En déduire que si H contient un 3-cycle, on a $H = \mathcal{A}_5$.
9.d. Les 5-cycles sont-ils tous conjugués dans $\mathcal{S}_5$? dans $\mathcal{A}_5$?
9.e. Montrer que si H contient une double transposition, il contient toutes les doubles transpositions.
9.f. Montrer que le produit des doubles transpositions $(1, 2)(3, 4)$ et $(1, 2)(4, 5)$ est un 3-cycle.
9.g. Montrer que les 5-cycles $(1, 2, 3, 4, 5)$ et $(1, 3, 2, 5, 4)$ sont conjugués dans $\mathcal{A}_5$.
9.h. Montrer que le produit $(1, 2, 3, 4, 5)(1, 3, 2, 5, 4)$ est un 3-cycle.
9.i. En déduire que $H = \mathcal{A}_5$. On dit que $\mathcal{A}_5$ est un *groupe simple.*
9.j. Montrer que tout sous-groupe de $\mathcal{A}_5$ d'ordre 30 est normal dans $\mathcal{A}_5$.
9.k. En déduire que $\mathcal{A}_5$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 30.

10. Soit G un groupe. Notons $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G (*i.e.* des morphismes bijectifs $G \to G$).
10.a. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$, muni de la composition des applications, est un groupe.
10.b. Montrer que $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ donné par $g \mapsto (h \mapsto ghg^{-1})$ est un morphisme de groupes.
10.c. Montrer que le noyau de ϕ est le centre $Z(G)$ de G, puis que $Z(G)$ est un sous-groupe normal de G.
10.d. On note $\mathrm{Int}(G)$ l'image de ϕ. C'est le groupe des *automorphismes intérieurs* de G. Montrer que c'est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.
10.e. Que valent $\mathrm{Int}(G)$, $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ lorsque $G = \mathcal{S}_3$?
10.f. Que valent $\mathrm{Int}(G)$, $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ lorsque G est cyclique d'ordre n ?
10.g. Que valent $\mathrm{Int}(G)$, $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ lorsque G est le groupe diédral D_n ?

11. Soit G un groupe. Soit N et K deux sous-groupes distingués de G, avec $N \subset K$.
11.a. Montrer que K/N est distingué dans G/N.
11.b. Montrer qu'on a morphisme de groupes $G/K \to (G/N)/(K/N)$ déduit de $g \mapsto gN$.
11.c. Montrer que c'est un isomorphisme.

12. Soit G un groupe. Pour g, $h \in G$, un élément de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ est appelé un *commutateur*. Notons $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs de G. C'est le *sous-groupe dérivé* de G.
12.a. Si G est abélien, que vaut $D(G)$?
12.b. Si $G = \mathcal{S}_n$, montrer que $D(G) \subset \mathcal{A}_n$. Que vaut $D(\mathcal{S}_3)$?
12.c. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe normal de G.
12.d. Montrer que $D(\mathcal{S}_5) = \mathcal{A}_5$. On pourra utiliser la simplicité de $\mathcal{A}_5$.
12.e. Montrer que $D(D_n) = C_n$, où D_n est le groupe diédral et C_n est son sous groupe cyclique d'ordre n.
12.f. Montrer que le quotient $G/D(G)$ est abélien. C'est l'*abélianisé* de G.
12.g. Soit G' un groupe abélien. Soit $f : G \mapsto G'$ un morphisme de groupes. Notons $s : G \mapsto G/D(G)$ la surjection canonique. Montrer qu'il existe $\phi : G/D(G) \to G'$ un morphisme de groupes tel que $f = \phi \circ s$. Autrement dit, f se factorise par s.
12.h. Soit H un sous-groupe normal de G tel que G/H est un groupe abélien. Montrer que H contient $D(G)$. Autrement dit $G/D(G)$ est le plus grand quotient abélien de G.