Université Paris Cité Année 2024-25

L3 Mathématiques – Actions de groupes L. Merel

Feuille 1

Groupes symétriques, actions de groupes

1. Soit X un ensemble. Notons $\mathcal{S}(X)$ le groupe symétrique sur X. Soit k un entier ≥ 0.
1.a. Rappeler comment $\mathcal{S}(X)$ opère sur X. Cette action est-elle transitive ?
1.b. Montrer que $\mathcal{S}(X)$ opère sur X^k par $(\sigma, (x_1, , , , x_k)) \mapsto (\sigma(x_1), ..., \sigma(x_k))$. C'est l'*action diagonale*. Cette action est-elle transitive ?
1.c. Notons $\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble formé par les sous-ensembles de X de cardinal k. Montrer que $\mathcal{S}(X)$ opère sur $\mathcal{P}_k(X)$ par $(\sigma, Y) \mapsto \sigma(Y)$. Cette action est-elle transitive ?

2. Soit X un ensemble. Soit ϕ une bijection $X \to X$.
2.a. Montrer qu'on a une action du groupe $\mathbf{Z}$ sur X par $(n, x) \mapsto \phi^n(x)$.
2.b. Indiquer un cas où cette action est fidèle.
2.c. L'action peut-elle être fidèle si l'ensemble X est fini ?

3.a. Dresser la liste des éléments du groupe alterné $\mathcal{A}_5$. Indiquer les ordres des éléments.
3.b. Tout élément de $\mathcal{A}_5$ peut-il s'écrire comme produit de cycles de longueur 3 ?

4.a. Soit $n \geq 2$. Montrer que toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ s'écrit comme la composée de transpositions.
4.b. Soit $n \geq 3$. Soient i, j deux entiers distincts dans $\{2, \dots, n\}$. Calculer $(1 \ \ i)(1 \ \ j)(1 \ \ i)$.
4.c. Soit $n \geq 3$. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit comme la composée de transpositions de la forme $(1 \ \ i)$ où i appartient à $\{2, \dots, n\}$.
4.d. Soit $n \geq 3$. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit à l'aide de la transposition $(1 \ \ 2)$ et du cycle $(2\ 3\ \dots\ n\ 1)$.
4.e. Soit G un groupe fini. Montrer qu'il est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe engendré par deux éléments.

5.a. Soit c_1, ..., c_k des cycles de $\mathcal{S}_n$ à supports disjoints de longueur l_1,..., l_k respectivement. Montrer que produit $c_1...c_k$ est d'ordre le ppcm de l_1,...,l_k.
5.b. Le groupe $\mathcal{S}_8$ possède-t-il un élément d'ordre 15 ? Un élément d'ordre 21 ?

6. Soit c_1, ..., c_k des cycles de $\mathcal{S}_n$ à supports disjoints de longueur l_1,..., l_k respectivement. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $\sigma c_1...c_k\sigma^{-1}$ est produit de cycles à supports disjoints de longueur l_1,..., l_k respectivement.

7.a. Montrer que $T = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ et même du groupe alterné $\mathcal{A}_4$.
7.b. Montrer que T a la propriété suivante. Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_4$, et tout $t \in T$, on a $\sigma t \sigma^{-1} \in T$. Autrement dit, T est un sous-groupe normal de $\mathcal{S}_4$. Est-il normal dans $\mathcal{A}_4$?

8. Soit K un corps commutatif.
8.a. Montrer que $K^\times$ opère sur K par multiplication. Quelles sont les orbites de K sous l'action de $K^\times$?
8.b. Montrer que $K^\times \times K$, muni de la loi $((a, b), (a', b')) \mapsto (aa', ab' + b)$, est un groupe. Est-il commutatif ? Est-il isomorphe à $K^\times \times K$ muni de la loi produit ?
8.c. Si K est un corps fini, quel est l'ordre de $K^\times \times K$?
8.d. Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer qu'il existe un groupe non abélien d'ordre $p(p-1)$.
8.e. Montrer que $K^\times \times K$ opère sur K par la loi $((a, b), x) \mapsto ax + b$. Cette action est-elle fidèle ?

9. Soit K un corps commutatif. Soit n un entier ≥ 1. Soit G le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$.
9.a. Montrer que $\mathrm{GL}_n(K)$ opère sur K^n par multiplication des vecteurs-colonnes par les matrices. Cette action est-elle fidèle ? Est-elle transitive ? Quelles sont les orbites ?
9.b. En déduire que $\mathrm{GL}_n(K)$ opère sur l'ensemble $\mathbf{P}^{n-1}(K)$ des droites de K^n. Cette action est-elle fidèle ? Est-elle transitive ?

9.c. Posons $n = 2$. Notons B l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_2(K)$. Soit D une droite de K^2. Montrer que le stabilisateur de D dans $\mathrm{GL}_2(K)$ est isomorphe à B.
9.d. Soit d un entier, avec $1 \leq d \leq n$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(K)$ opère sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d de K^n.

10. Posons, dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $-I = (-1)I$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $-J = (-1)J$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ et $-K = (-1)K$. Posons $H_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$.
10.a. Montrer que H_8 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.
10.b. Établir les identiés : $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = K$, $KI = J$, $JK = I$. Que valent JI, IK et KJ ?
10.c. Écrire la table de multiplication de H_8.
10.d. Donner les ordres des éléments de H_8.
10.e. Faire la liste des sous-groupes de H_8.
10.f. Montrer qu'ils sont tous normaux.
10.g. Quel est le centre de H_8 ?

11. Soit n un entier > 1. Considérons l'ensemble $P_n = \{e^{2ik\pi/n}/k \in \mathbf{Z}\} = \{e^{2ik\pi/n}/k \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\}$. C'est un polygone régulier à n cotés dans $\mathbf{C}$. Posons $\zeta = e^{2i\pi/n}$.
11.a. Pour $q \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, montrer qu'on a des isométries de $\mathbf{C}$: ρ_q, donnée par $z \mapsto \zeta^q z$, et σ_q, donnée par $z \mapsto \zeta^q \bar{z}$.
11.b. Montrer que ces bijections forment un groupe d'ordre $2n$ noté D_n. C'est le *groupe diédral.*
11.c. Montrer que ρ_1 est d'ordre n et qu'on a $\rho_1^q = \rho_q$, pour tout $q \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
11.d. Montrer que, pour tout $q \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, σ_q est d'ordre 2.
11.e. Montrer qu'on a les relations $\sigma_q \rho_1 \sigma_q = \rho_1^{-1}$, pour tout $q \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
11.f. Notons C_n le sous-groupe de D_n engendré par ρ_1. Montrer qu'il est d'ordre n et normal dans D_n.
11.g. Montrer que D_n est abélien si et seulement si $n \leq 2$.
11.h. Montrer que le centre de D_n est d'ordre 1 si n est impair et d'ordre 2 si $n > 2$ est pair.
11.i. Montrer que pour tout $\tau \in D_n$, et tous z, $z' \in \mathbf{C}$, on a $|\tau(z) - \tau(z')| = |z - z'|$ (τ est une isométrie de $\mathbf{C}$). Donner le sens géométrique des éléments de D_n comme transormations du plan.
11.j. Montrer que D_n opère sur P_n.
11.k. Décrire le morphisme de groupes $D_n \to \mathcal{S}(P_n)$ issu de l'action de D_n sur P_n.
11.l. Montrer que toute isométrie de $\mathbf{C}$ qui laisse P_n invariant est dans D_n. Autrement dit, D_n est le groupe des isométries de P_n.

12.a. Décrire la liste des ordres des éléments du groupe diédral D_4.
12.b. Les groupes D_4 et H_8 sont-ils isomorphes ?
12.c. Indiquer d'autres groupes d'ordre 8 qui ne sont isomorphes ni à D_4, ni à H_8.

13. Soit C un cube dans un espace affine euclidien de dimension 3. Soit G le groupe des isométries de ce cube. C'est le groupe formé par les isométries de de l'espace qui stabilisent les sommets de C. Soit S l'ensemble des sommets, F l'ensemble des faces, D l'ensemble des grandes diagonales de C.
13.a. Montrer que les actions de G sur les ensembles S, F et D produisent des homomorphismes de G vers respectivement $\mathcal{S}_8$, $\mathcal{S}_6$ et $\mathcal{S}_4$.
13.b. Montrer que la symétrie par rapport au centre de gravité O de C est une involution s_O appartenant au centre de G.
13.c. Montrer l'ensemble des élément de G qui agissent trivialement sur D est le groupe d'ordre 2 engendré par s_O.
13.d. En déduire qu'on a un morphisme de groupes $\phi : G \to \mathcal{S}_4$ de noyau le groupe d'ordre 2 engendré par s_O.
13.e. Soit δ_1, $\delta_2 \in D$. Notons s_{δ_1,δ_2} la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par δ_1 et δ_2. Montrer que $s_{\delta_1,\delta_2} \in G$. Montrer que $\phi(s_{\delta_1,\delta_2})$ est une transposition.
13.f. En déduire que toute transposition de $\mathcal{S}_4$ est dans l'image de ϕ, puis que ϕ est surjectif.
13.g. En déduire que G est isomorphe à $\mathcal{S}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En particulier, on a $|G| = 48$.